COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

PROBLÈMES

DE

MÉCANIQUE

PAR F. J.

CHEZ LES ÉDITEURS

TOURS
ALFRED MAME ET FILS
Imprimeurs-Libraires

PARIS
CH. POUSSIELGUE
Rue Cassette, 15

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

Presented in 1929 by
George William Myers
Class of 1888

531.9
J1p

REMOTE STORAGE

PROBLÈMES

DE

MÉCANIQUE

Tout exemplaire qui ne sera pas revêtu des trois signatures ci-dessous sera réputé contrefait.

Les Éditeurs,

Le Cours de Mathématiques élémentaires comprend les ouvrages suivants :

Éléments d'Arithmétique.
» d'Algèbre.
Cours d'Algèbre élémentaire.
Éléments de Géométrie.
Cours de Géométrie élémentaire.
Éléments de Géométrie descriptive.
» de Trigonométrie.
» de Mécanique.
» de Cosmographie.

Tables de logarithmes.
Exercices d'Arithmétique.
» d'Algèbre.
» de Géométrie.
» de Géométrie descriptive.
Compléments de Trigonométrie.
Problèmes de Mécanique.
Cours d'Algèbre élémentaire.
— —

Arpentage, Levé des plans et Nivellement.

Sciences physiques et naturelles : *Notions de Physique. — Notions d'Histoire naturelle. — Notions de Chimie. — Éléments d'Histoire naturelle : Zoologie, Botanique, Géologie. — Notions de sciences physiques et naturelles.*

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

PROBLÈMES

DE

MÉCANIQUE

PAR F. J.

CHEZ LES ÉDITEURS

TOURS
ALFRED MAME & FILS
Imprimeurs-Libraires.

PARIS
CH. POUSSIELGUE
Rue Cassette, 15.

531.9
J1p
REMOTE STORAGE

PRÉFACE

Nos *Éléments de Mécanique* renferment deux séries de questions proposées aux élèves : des *Exercices* placés à la suite de chaque chapitre, et un recueil de *Problèmes* qui termine le livre.

Les exercices présentent des développements de la théorie exposée dans le cours, ou des questions intéressantes qui auraient par trop surchargé le livre de l'élève. Il est bon de les proposer aux élèves intelligents et chercheurs pour lesquels le travail courant de la classe ne peut suffire.

La plupart des problèmes ont été donnés aux examens. Quelques-uns ne sont que des applications numériques des formules; ils ont pour objet de familiariser les élèves avec ces formules, de leur en faire saisir l'utilité pratique et de les habituer au calcul des effets mécaniques.

Beaucoup de questions donnent lieu à d'excellents exercices d'Algèbre et de Trigonométrie; elles remplaceraient avantageusement les calculs abstraits qui, en général, offrent peu d'intérêt aux élèves.

Les questions de Dynamique ont été multipliées à dessein : de nombreux problèmes sur les *masses*, les *accélérations*, donnent aux élèves des idées justes sur les forces et sur leurs effets.

Le présent ouvrage donne les solutions de tous les *problèmes* proposés dans le livre des *Éléments;* il en renferme en outre quelques autres qui nous ont paru devoir

685522

intéresser le lecteur, tant par leur nouveauté que par leur originalité. Un très grand nombre des *Exercices* de Cinématique et de Dynamique y sont résolus; tous les *Exercices des résistances passives* sont étudiés dans les *Questions de frottement*. Un tableau de correspondance placé en tête du volume facilite les recherches.

Les exercices dont nous ne donnons pas le développement sont résolus pour la plupart dans des traités plus étendus que nos Éléments, par exemple dans la *Mécanique de Collignon* *.

Il eût été facile de diminuer l'ouvrage par des solutions plus concises, et surtout par de plus fréquents renvois aux questions déjà traitées; la marche que nous avons suivie nous a semblé plus profitable, car les problèmes se résolvent indépendamment les uns des autres. Ces solutions détaillées peuvent ainsi fournir des modèles de copies d'examen.

Quelques solutions sortent du domaine des mathématiques élémentaires; nous n'avons cependant pas cru devoir les supprimer.

La Mécanique prend une place de plus en plus large dans les études; les progrès de l'enseignement technique l'étendront encore; de nombreux traités en exposent les principes, mais il manquait un recueil de problèmes de mécanique élémentaire; c'est cette lacune que nous avons essayé de combler.

Nous nous estimerions heureux si, en faisant étudier ce mystérieux agent qu'on nomme *force*, nous pouvions aider au développement des intelligences et les conduire à *Celui qui a tout créé avec poids, nombre et mesure.*

---

* *Cours élémentaire de Mécanique*, par Ed. Collignon; chez Hachette.

TABLE DE CORRESPONDANCE

Exercice	15	Problème	16.
»	16	»	16.
»	17	Application du théorème d'Euler.	
»	37	Problème	65.
»	52	Éléments de mécanique, p. 276.	
»	53	Problème	100.
»	78	»	142.
»	79	»	126.
»	84	»	162 bis.
»	85	»	169 bis.
»	86	»	170.
»	87	»	171.
»	89	»	171 bis.
»	91	»	235.
»	92	»	238 bis.
»	93	»	169.
»	94	»	162 ter.
»	97	»	275 bis.
»	101	»	202.
»	102	»	203.
»	104	»	222 bis.
»	105	»	224 bis.
»	106	»	222.
»	108	»	214 et 215.
»	109 et 110	»	219.
»	127	»	256 bis.
»	128	»	272 bis.
»	129	»	272 ter.
»	130	Page 408, remarque II.	
»	131	Problème	259 bis.
»	132	Problème supplémentaire I, p. 409.	

Exercice 133	Problème 282 bis.
» 134	» 289 bis.
» 135	» 289 bis.
» 136	» 288 bis.
» 137	» 288 ter.
» 138	Page 451.
» 139	Page 452 et problème 280 bis.
» 141	Problème 300.
» 142	» 305 bis.
» 144	» 321 bis.
» 145	» 321 ter.
» 152	Nos 7 et 8, p. 493.
» 153	Problème 330 bis.
» 154	N° 5, p. 492 et n° 20, p. 498.
» 155	Problème 330 ter.
» 157	» 329 bis.
» 158	N° 52, p. 512.
» 159	Nos 44 à 47, p. 510.
» 161	N° 60, p. 515.
» 162	Nos 64 et 65, p. 517.
» 163	N° 66, p. 518.
» 164	N° 67, p. 519.
» 165	N° 70 et suiv., p. 521.
» 166	Nos 75 à 78, p. 522.
» 167	N° 81, page 524.
» 168	Nos 82, 83, p. 525.
» 169	N° 53, p. 512.
» 170	N° 58, p. 514.
» 171	Nos 84 à 88, p. 526 et suiv.
» 172 et 173	Nos 89 à 94, p. 531 et suiv.
» 174 et 175	Nos 95 à 100, p. 534 et suiv.

TABLE DES MATIÈRES

STATIQUE

Composition et décomposition des forces 1
Forces perpendiculaires aux côtes d'un polygone 33
Équilibre d'une ferme 43
Direction d'un bateau voilier. 58

Centre de gravité 61
Des lignes . . . . . *ibid.*
Des surfaces. 64
Des volumes et questions diverses. 78

Machines simples. 108
Levier. . . . . *ibid.*
Poulie 124
Treuil. 129
Plan incliné 133

Problèmes divers 151

CINÉMATIQUE

Mouvement uniforme 227
Graphique des trains 230

Mouvements variés 257
Étude de mouvements uniformément variés . . . . . *ibid.*
Étude de mouvements variés. 259
Méthode graphique pour les espaces parcourus 269

Chute des corps. 277

Composition des mouvements. 312

Mouvements des projectiles 326
Variations de la vitesse 327
Parabole de sûreté. 334
Corps qui tombe sur un plan incliné 341
Rencontre de deux projectiles. 351

Détermination de mouvements 357
Mouvement de la projection d'un point qui décrit une circonférence. 361

DYNAMIQUE

Forces, masses, accélérations 370
Machine d'Atwood 382
Plan incliné 386
Chemin rectiligne de durée minimum d'un point à une droite. 409
Mouvement de la projection d'un point qui décrit une circonférence. 427
Formule du pendule simple 433

Force centrifuge. 440
Forme de la surface libre d'un liquide en rotation 446
Pendule conique. 451
Action de la force centrifuge sur la pesanteur 454

Travail des forces 459
Travail de la détente d'un gaz. 480

QUESTIONS DE FROTTEMENT

Démarrage d'un corps posé sur un plan. 491
Le plan est horizontal . . . . . *ibid.*
Le plan est incliné. 493

Mouvement d'un corps sur un plan. 503
Le plan est horizontal . . . . . *ibid.*
Le plan est incliné. 505

Travail absorbé par le frottement d'un corps sur un plan. 509
Plan horizontal . . . . . *ibid.*
Plan incliné. 510

Frottement des tourillons 512
Équilibre de la poulie fixe. 514
Mouvement uniforme d'une voiture. 515
Transformation d'un traîneau en voiture. 517
Poulie à frottement réduit. 518
Bardage d'une pierre 519
Coin. 521
Vis 522
Équilibre . . . . . *ibid.*
Rendement 525
Frottement d'une corde sur un cylindre. 526

CHOC DES CORPS

Corps mous 530
Théorème de Carnot. 532
Corps élastiques 534
Problèmes sur le frottement 538

PROBLÈMES

DE

MÉCANIQUE

STATIQUE

Composition et décomposition des forces.

Problème 1

Résultante de deux forces, l'une de 5^k, *l'autre de* 4^k.

1° *Elles sont rectangulaires.*

On a trouvé (M., n° 29, 1°)*

$$R^2 = F^2 + F_1^2$$

qui donne $R^2 = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6{,}403$

Rép. 6^k403.

2° *Elles font un angle de* 45°.

On a (M., n° 28) : $R^2 = F^2 + F_1^2 + 2FF_1 \cos A$

Dans ce cas, l'angle $A = 45°$

par suite, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $R = \sqrt{5^2 + 4^2 + 40\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{41 + 20\sqrt{2}} = 8{,}324$

Rép. 8^k324.

* Voir *Éléments de Mécanique*, par F. I. C.

3° *Elles font un angle de* 60°.

On sait que (Trig., n° 8) * $\cos 60° = \frac{1}{2}$

donc $$R = \sqrt{5^2 + 4^2 + 40 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{61} = 7{,}810$$

Rép. 7^k810.

4° *Elles font un angle de* 10°.

$$R = \sqrt{5^2 + 4^2 + 40 \cos 10°}$$
$$\text{Log. } 40 = 1{,}602\ 06$$
$$\text{Log. } \cos 10° = \bar{1}{,}993\ 35$$
$$\text{Log. } 40 \cos 10° = 1{,}595\ 41$$
$$40 \cos 10° = 39{,}39$$

par suite, $$R = \sqrt{41 + 39{,}39} = 8{,}966$$

Rép. 8^k966.

5° *Elles font un angle de* 170°.

$$\text{Cos } 170° = -\cos 10°$$

On voit, d'après le numéro précédent, que

$$R = \sqrt{41 - 39{,}39} = 1{,}268$$

Rép. 1^k268.

6° *Elles font un angle de* 180°.

Ces forces sont directement opposées, et l'on a (M., n° 29, 2°)

$$R = 5 - 4$$

Rép. 1^k.

7° *Elles font un angle de* 0°.

Les forces ont la même direction.

On a (M., n° 29, 2°) $R = 5 + 4$

Rép. 9^k.

Problème 2

Un point matériel est sollicité par deux forces qui sont à angle droit l'une sur l'autre et dont les intensités sont respectivement 3^k849 *et* 4^k527. *Trouver la grandeur de la force qu'il faudrait appliquer à ce point pour le tenir en équilibre, et les angles de cette nouvelle force avec les deux autres.* (Lille, Diplôme Ens. sp., 1879.)

---

* *Éléments de Trigonométrie*, par F. I. C., 2 édition.

Soient F et F_1 les forces données ; on trouve leur résultante R au moyen de la formule (M., n° 29)

$$R^2 = F^2 + F_1^2$$

d'où $R = \sqrt{F^2 + F_1^2} = 5{,}942$

La force qui équilibrera les forces données sera R_1 directement opposée et égale à R.

En désignant par α l'angle FAR, on a (M., n° 27)

$$F = R \cos \alpha$$

d'où $\cos \alpha = \frac{F}{R}$

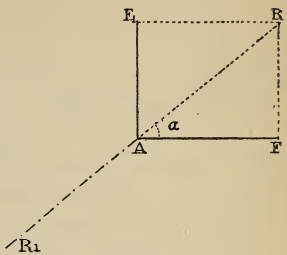


Fig. 1.

par suite, $\alpha = 40^\circ\, 22'..$

et $FAR_1 = 180^\circ - 40^\circ\, 22'.. = 139^\circ\, 37'..$

$F_1AR_1 = 90^\circ + 40^\circ\, 22 = 130^\circ\, 22'..$

Rép. La résultante vaut 5^k942.

L'angle avec F est $139^\circ\, 37'$.

» F_1 $130^\circ\, 22'$.

Problème 3

Deux forces concourantes font un angle de $35^\circ\, 42'\, 3''$; *elles sont grandes de* $4\,252^k$ *et* $6\,842^k$. *On propose de calculer en grandeur et en direction la force unique qui ferait équilibre au système des deux forces.* (Douai, Diplôme.)

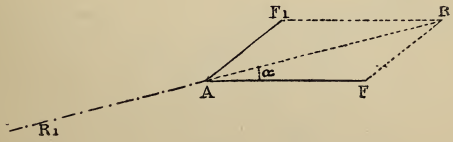


Fig. 2.

Soient F et F_1 les deux forces.

Leur résultante R est donnée par la formule (M., n° 28)

$$R^2 = F^2 + F_1^2 + 2FF_1 \cos A$$

qui donne $R = 10\,589^k$

Pour trouver la direction de la résultante, on peut se servir de la relation (M., n° 26)

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin A}$$

d'où

$$\sin \alpha = \frac{F_1 \sin A}{R}$$

En effectuant les calculs, on obtient

$$\alpha = 13^\circ\, 33'3''$$

La direction de la résultante peut être donnée par l'angle FAR_1.

Or

$$FAR_1 = 180^\circ - \alpha = 166^\circ\, 26'56''$$

Rép. La résultante vaut $10\,589^k$.
L'angle, avec F, est $166^\circ\, 26'56''$.

Problème 4

Décomposer une force de 13^k en deux forces rectangulaires.

1° *L'une est 12^k.*

De la formule (M., n° 29) $R^2 = F^2 + F_1^2$

on tire

$$F^2 = R^2 - F_1^2$$

par suite, on a

$$F = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$$

Rép. 5^k.

2° *Elles sont égales.*

Dans ce cas,

$$R^2 = 2F^2$$

d'où

$$F^2 = \frac{R^2}{2}$$

Donc

$$F = \sqrt{\frac{13^2}{2}} = \sqrt{84,5} = 9,192$$

Rép. $9^k192...$

3° *L'une est double de l'autre.*

Alors

$$R^2 = F^2 + 4F^2 = 5F^2$$

d'où

$$F^2 = \frac{R^2}{5}$$

Donc

$$F = \sqrt{\frac{169}{5}} = \sqrt{33,8} = 5,813$$

Rép. $5^k813...$
$11^k627...$

4° *Leur somme est 16^k.*

En désignant les composantes cherchées par x et y, on a :

$$x^2 + y^2 = 13^2 = 169$$

et $$x + y = 16$$

d'où (Alg., n° 267) * $$xy = \frac{87}{2}$$

par suite, $$X^2 - 16X + \frac{87}{2} = 0$$

$$X = 8 \pm \sqrt{\frac{41}{2}} = 8 \pm \frac{\sqrt{82}}{2}$$

$$X = 8 \pm 4{,}527$$

Rép. $12^k527\ldots$
$3^k472\ldots$

5° *Leur différence est* 7^k.

$$x^2 + y^2 = 169$$

$$x - y = 7$$

d'où $$xy = 60$$

par suite (Alg., n° 266), $X^2 - 7X - 60 = 0$

$$X = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{7 \pm 17}{2}$$

On trouve pour X deux valeurs : $X_1 = 12$ et $X_2 = -5$, la première seule convient à la question ; elle donne $x = 12$ et $y = 5$.

Rép. 12^k.
5^k.

6° *Leur somme est maximum.*

On a $$x^2 + y^2 = 169$$

on pose $$x + y = m$$

par suite, $$xy = \frac{m^2 - 169}{2}$$

On peut donc écrire

$$X^2 - mX + \frac{m^2 - 169}{2} = 0$$

d'où $$X = \frac{m \pm \sqrt{2 \times 169 - m^2}}{2}$$

le maximun de m sera $m = 13\sqrt{2}$ (Alg., n° 300)

alors $$x = y = \frac{13\sqrt{2}}{2} = 9{,}192\ldots$$

Rép. Chaque force vaut $9^k192\ldots$

---

* *Éléments d'Algèbre*, par F. I. C., 3e édition.

Problème 5

Décomposer une force de 13^k *en deux forces faisant un angle de* 60°.

1° *L'une des forces est de* 12^k.

Dans la formule (M., n° 28)

$$R^2 = F^2 + F_1^2 + 2FF_1 \cos A$$

En faisant $A = 60^o$, $\cos A = \frac{1}{2}$, $F_1 = 12$

on obtient $R^2 = F^2 + 144 + 12F = 169$

d'où $F^2 + 12F - 25 = 0$

$$F = -6 \pm \sqrt{61} = -6 \pm 7{,}810...$$

La valeur positive peut seule être acceptée.

Rép. $1^k810...$

2° *Les forces sont égales.*

Dans la formule $R^2 = F^2 + F_1^2 + 2FF_1 \cos A$

En faisant $F_1 = F$

et $\cos A = \frac{1}{2}$

on obtient $R^2 = 3F^2$

par suite, $F = \sqrt{\frac{169}{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3} = 7{,}505...$

Rép. $7^k505...$

3° *L'une est double de l'autre.*

La formule (M., n° 28) devient

$$R^2 = F^2 + 4F^2 + 4F^2 \times \frac{1}{2}$$

$$F = \sqrt{\frac{169}{7}} = \frac{13\sqrt{7}}{7} = 4{,}913...$$

Rép. $4^k913...$
$9^k826...$

4° *Leur somme est* 16^k.

En désignant par x et y les forces cherchées, la formule (M., n° 28) donne $x^2 + y^2 + xy = 169$.

On a de plus $x + y = 16$

d'où $xy = 87$

On peut poser $X^2 - 16X + 87 = 0$

d'où $X = 8 + \sqrt{64 - 87}$

Racines imaginaires; la somme des deux composantes ne peut donc pas être 16^k, ainsi qu'on le verra au 6°.

5° *Leur différence est* 7^k.

On a $x - y = 7$

et $x^2 + y^2 + xy = 169$

On en tire $xy = 40$

par suite, $X^2 - 7X - 40 = 0$

et $$X = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 160}}{2} = \frac{7 \pm 14{,}456}{2}$$

On en tire $x = 10{,}728...$

$y = 3{,}728...$

Rép. 10^k728 et 3^k728.

6° *Leur somme est maximum.*

On a $x + y = m$

et $x^2 + y^2 + xy = 169$

d'où $xy = m^2 - 169$

On peut écrire $X^2 - mX + m^2 - 169 = 0$

d'où $$X = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m^2 + 676}}{2}$$

$$X = \frac{m \pm \sqrt{676 - 3m^2}}{2}$$

Pour que le radical soit réel, on doit avoir :

$$676 - 3m^2 > 0$$

par suite, le maximum de m est

$$m = \sqrt{\frac{676}{3}} = \frac{26\sqrt{3}}{3} = 15{,}011...$$

Rép. Les forces sont égales, chacune vaut 7^k505.

Remarque. Ce résultat explique celui du 4°; la somme des composantes, ne pouvant être plus grande que $15^k011...$, ne peut valoir 16^k.

Problème 6

Décomposer une force en deux autres qui lui soient égales. Angles de ces composantes avec la résultante.

La formule (M., n° 28) devient :

$$R^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos A$$

d'où $$\cos A = -\frac{1}{2}$$

par suite, $$A = 120^\circ$$

Et l'angle de chaque composante avec la résultante est 60°.

Rép. 60°.

Remarque. On serait arrivé tout aussi simplement au résultat en construisant le triangle (M., n° 30, 2°), qui alors est équilatéral.

Problème 7

Décomposer une force en deux forces égales faisant un angle α.

Soit F la force donnée et x chacune des forces cherchées.

On a (M., n° 28) $$F^2 = 2x^2 + 2x^2 \cos \alpha$$

ou $$F^2 = 2x^2 (1 + \cos \alpha)$$

d'où $$x^2 = \frac{F^2}{2(1 + \cos \alpha)}$$

Mais $$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{(Trig., n° 39)}$$

par suite, $$x^2 = \frac{F^2}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Rép. $$x = \frac{F}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Discussion. Puisque la résultante est comprise dans l'angle des forces (M., n° 22), l'angle α ne peut varier que de 0 à 180°.

Si $\alpha = 0^\circ$, $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$ et $x = \frac{F}{2}$, ce qui est évident puisque, les forces étant de même sens, la résultante est la somme des composantes.

Si $\alpha = 180^o$, $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ et $x = \infty$. Il n'y a pas de solution, car les forces étant directement opposées, leur résultante est égale à leur différence ; elle est donc nulle puisque les composantes sont égales, et elle ne peut valoir F, la force donnée.

Problème 8

Quel angle doivent faire deux forces de 3^k *et de* 4^k *pour que leur résultante soit* 5^k ?

La formule $R^2 = F^2 + F_1^2 + 2FF_1 \cos A$

donne $\cos A = \frac{R^2 - (F^2 + F_1^2)}{2FF_1}$

En mettant les valeurs numériques des données, on trouve

$$\cos A = 0$$

par suite, $A = 90^o$

Rép. L'angle est 90°, les deux forces sont rectangulaires.

Problème 9

Deux forces P *et* Q *sont dans le rapport de* $\sqrt{3}$ *à* 2 ; *elles ont une résultante de* 1^k ; *quel angle forment-elles ?*

Les forces P, Q, et leur résultante sont les trois côtés d'un triangle ARQ. Le triangle est rectangle, puisque l'on a $2^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2$

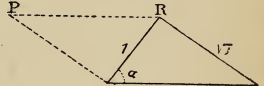


Fig. 3.

Il donne

$$\sin \alpha = \frac{RQ}{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(Trig., n° 8)}$$

par suite, $\alpha = 60^o$

Donc l'angle cherché PAQ vaut

$$60^o + 90^o = 150^o$$

Rép. 150°.

Problème 10

Quelle relation doit-il exister entre deux forces P *et* Q *faisant un angle de* 135°, *pour que la résultante soit égale à la plus petite ?*

Soit $$P < Q$$

On sait que

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(Trig., n° 8 et page 37).}$$

La formule (M., n° 28) donne

$$P^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où $$Q^2 = PQ\sqrt{2}$$

on en tire $$\frac{Q}{P} = \sqrt{2}$$

Rép. La force Q est donc la diagonale du carré construit sur la force P, le rapport des forces Q et P est $\sqrt{2}$.

Remarque. Le problème se résout graphiquement sans difficulté.

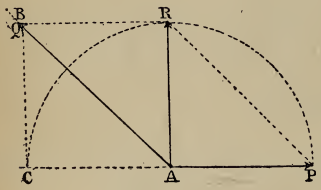


Fig. 4.

Soit AP la plus petite des deux forces et AB la direction de la seconde force, qui fait avec P un angle BAP de 135°.

Avec AP comme rayon, décrivons un arc de cercle, et du point P, menons à AB une parallèle qui coupe l'arc au point R.

La résultante est AR = P; elle est perpendiculaire à CP, puisque l'angle P, supplément de QAP, vaut 45°.

La parallèle RQ détermine AQ, intensité cherchée.

On voit que AQ est la diagonale du carré ACQR, dont le côté est égale à la force P.

Problème 11

Trois forces 7^k, 8^k, 10^k, *situées dans le même plan, se font équilibre. Trouver les angles qu'elles font entre elles.*

Soient P, Q, R, les forces données de 7^k, 8^k, 10^k.

L'une quelconque de ces forces, R par exemple, est égale et directement opposée à la résultante de deux autres (M., n° 20). La résultante des forces P et Q est donc une force R′ de 10^k, dont la direction est trouvée en construisant le triangle OQR′, dont les côtés sont proportionnels à 7, 8, 10.

Les trois forces données doivent donc avoir la position indiquée par la figure.

Pour trouver les angles demandés, il faut calculer ceux du triangle OQR′ dont on connaît les trois côtés. On emploie les formules du nº 79 de la *Trigonométrie*, et l'on obtient

$$OR'Q = 44^\circ 3\,; \quad R'OQ = 52^\circ\, 37'\,;$$
$$OQR' = 83^\circ\, 20'$$

Par suite :

Rép. $POQ = 96^\circ\, 40'$
$ROP = 135^\circ\, 57'$
$ROQ = 127^\circ\, 23'$.

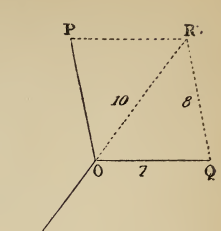


Fig. 5.

Remarque. Dans l'énoncé, il était inutile de dire que les trois forces sont dans le même plan (M., nº 94).

Problème 12

Les intensités de trois forces en équilibre sont $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5-\sqrt{6}}$. *Trouver les angles de ces forces.* (Conc. Ens. spéc.)

En opérant comme au problème précédent, on trouve :

Rép. $POQ = 120^\circ$
$POR = 130^\circ$
$QOR = 110^\circ$

Remarque. Il est facile de voir que l'on a (M., nº 20)

$$5 - \sqrt{6} = 2 + 3 - \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

par suite, $$\cos POQ = -\frac{1}{2}$$

d'où $$POQ = 120^\circ$$

Problème 13

Trois forces rectangulaires valent 3^k, 4^k, 5^k.

1º *Calculer leur résultante.*

On a (M., nº 35) $R^2 = F^2 + F_1^2 + F_2^2$

par suite, $R^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$

d'où $R = \sqrt{50} = 7{,}071$

Rép. 7^k071.

2° *Angle de cette résultante avec chaque composante.*

En désignant par α, β, γ les angles de la résultante avec les forces F_1 F_1, F_2, les formules (M., n° 36) donnent :

$$\text{Cos } \alpha = \frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos \beta = 3\,\frac{4\sqrt{2}}{10}$$

et

$$\cos \gamma = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Par suite : **Rép.** $\alpha = 64° 53'$
$\beta = 55° 33'$
$\gamma = 45°$ (Trig., page 37.)

Remarque. Il est facile de vérifier que les angles α, β, γ satisfont à la relation (M., n° 37)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Problème 14

Décomposer une force de 12^k *en trois forces :*

1° *Rectangulaires et égales.*

Dans ce cas, la formule (M., n° 35) devient

$$R^2 = 3F^2$$

d'où

$$F = \sqrt{\frac{144}{3}} = \sqrt{48} = 6{,}928$$

Rép. 6^k928.

2° *Rectangulaires, l'une est* 6^k, *une autre* 4^k.

On a (M., n° 35) $144 = 36 + 16 + F^2$

d'où

$$F = \sqrt{92} = 9{,}591$$

Rép. 9^k591.

3° *Rectangulaires et proportionnelles aux nombres* 1, 2, 3.

Ces composantes peuvent être représentées par

$$x,\ 2x,\ 3x$$

par suite,

$$144 = x^2 + 4x^2 + 9x^2 = 14x^2$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{144}{14}} = 3{,}207$$

Rép. 3^k207.
6^k414.
9^k621.

4° *Égales, faisant entre elles des angles de* 60°.

L'exercice 6 (M., page 23) donne la formule

$$R^2 = F^2 + F_1^2 + F_2^2 + 2FF_1 \cos(F, F_1) + 2FF_2 \cos(F, F_2) + 2F_1F_2 \cos(F_1, F_2)$$

Les angles de la résultante avec les composantes étant de 60°, les cos. valent $^1/_2$; la formule précédente devient

$$R^2 = 6F^2$$

d'où $$F = \sqrt{\frac{144}{6}} = \sqrt{24} = 4{,}898$$

Rép. 4^k898.

5° *Les trois composantes sont dans le même plan.*

Si la force donnée est dans le plan des composantes, cette décomposition peut se faire d'une infinité de manières (M., n° 38, 2°).

Si la force donnée n'est pas dans le plan des composantes, le problème est impossible (M., n° 22).

Problème 15

Sur une droite, en des points distants de 1^m, *sont appliquées des forces parallèles de* 5^k *et de* 3^k. *Trouver la résultante et son point d'application.*

1° *Les forces sont de même sens.*

La résultante vaut 8^k (M., n° 48).

Son point d'application est entre les points d'application des composantes, et l'on doit avoir, en supposant la force 5 appliquée en A, la force 3 en B et la résultante en C (M., n° 49),

$$\frac{P}{BC} = \frac{R}{AB} \text{ ou } \frac{5}{BC} = \frac{8}{1}$$

d'où $$BC = \frac{5}{8}$$

de même $$\frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB} \text{ ou } \frac{3}{AC} = \frac{8}{1}$$

d'où $$AC = \frac{3}{8}$$

Rép. La résultante est de 8^k ; elle est à $^3/_8$ de mètre de la force de 5^k, et à $^5/_8$ de celle de 3^k.

2° *Elles sont de sens contraire.*

La résultante est alors de 2^k (M., n° 50).

Son point d'application est sur le prolongement de AB et du côté du point A.

Et l'on doit avoir :

$$\frac{P}{BC} = \frac{R}{AB} \text{ ou } \frac{5}{BC} = \frac{2}{1}$$

d'où

$$BC = \frac{5}{2} = 2^m5$$

et

$$\frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB} \text{ ou } \frac{3}{AC} = \frac{2}{1}$$

d'où

$$AC = \frac{3}{2} = 1^m5$$

Rép. La résultante vaut 2^k ; elle est de même sens que la force de 5^k ; elle se trouve à 1^m5 de la force de 5^k et à 2^m5 de celle de 3^k.

Problème 16

Décomposer une force de 8^k en deux forces qui lui soient parallèles :

1° *Les forces sont de même sens et égales ; leurs points d'application sont distants de 2^m.*

Rép. Chaque force vaut 4^k.
Chaque composante est à 1^m de la force donnée.

2° *Elles sont dans le rapport de 2 à 5, les points d'application sont distants de 2^m.*

Il y a deux cas à considérer : suivant que les composantes sont de même sens ou de sens contraire.

Composantes de même sens :

En désignant par P la plus grande composante et par Q la plus petite, on a les équations (M., n° 48)

$$P + Q = 8 \qquad (1)$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{5}{2} \qquad (2)$$

De l'équation (2), on tire

$$\frac{P}{P+Q} = \frac{5}{7}$$

Par suite, à cause de (1), on a

$$P = \frac{5}{7} \times 8 = \frac{40}{7}$$

et

$$Q = \frac{2}{7} \times 8 = \frac{16}{7}$$

En nommant A, B et C les points d'application des forces P, Q et R, on a aussi (M., nº 48)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{2}{5}$$

et

$$AC + BC = 2$$

d'où

$$AC = \frac{4}{7} \text{ et } BC = \frac{10}{7}$$

Rép. $P = 5^k \frac{5}{7}$; $Q = 2^k \frac{2}{7}$

$AC = \frac{4}{7}{}^m$; $BC = 1^m \frac{3}{7}$.

Composantes de sens contraire :

En désignant par P la plus grande force dont le sens est le même que celui de la force donnée, et par Q la plus petite force, on a les relations (M., nº 50)

$$P - Q = 8$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{5}{2}$$

On en tire

$$P = \frac{40}{3}, \quad Q = \frac{16}{3}$$

Les points A et B, où les forces P et Q sont appliquées, sont d'un même côté de C, point d'application de la force donnée, et l'on doit avoir (M., nº 50)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{2}{5}$$

et

$$BC - AC = 2$$

d'où

$$AC = \frac{4}{3} ; \quad BC = \frac{10}{3}$$

Rép. $P = 13^k \frac{1}{3}$; $Q = 5^k \frac{1}{3}$

$AC = 1^m \frac{1}{3}$; $BC = 3^m \frac{1}{3}$.

3° *L'une vaut* 3^k, *son point d'application est à* 1^m *de celui de la force donnée.*

Il y a encore deux cas à considérer, suivant que les forces sont de même sens et de sens contraire.

Si les deux forces données sont de même sens.

En nommant P la force cherchée, on a

$$P = 8 - 3 = 5$$

et

$$\frac{AC}{1} = \frac{3}{5}$$

Rép. $P = 5^k$

$AC = 0^m6.$

Si les forces données sont de sens contraire.

On a

$$P = 8 + 3 = 11$$

$$\frac{AC}{1} = \frac{3}{11}$$

Rép. $P = 11^k$

$AC = \frac{3}{11}{}^m.$

4° *L'une est* 10^k.

Puisque la composante donnée est plus grande que la résultante, l'autre composante sera de sens contraire à la première.

On a donc $P = 10 - 8 = 2$

Cette force de 2^k est de sens contraire aux deux autres.

On a encore $\frac{AC}{BC} = \frac{10}{2}$

Les données ne permettent pas de calculer AC et BC ; on peut seulement trouver leur rapport.

Rép. $P = 2^k$

$\frac{AC}{BC} = 5.$

Problème 17

Décomposer une force de 12^k *en trois autres qui lui soient parallèles.*

1° *Les forces sont égales et de même sens.*

Chaque composante sera de 4^k.

Il faut trouver les points d'application. Soient O celui de la force donnée et A celui d'une composante.

La force de 12 aura une composante de 4 en A et une autre de 8 en B, pourvu que

$$AO = 2OB$$

La force de 8 se décompose en deux forces de 4, appliquées aux points C et D, et l'on a

$$BC = BD$$

Les deux composantes C et D sont donc appliquées aux extrémités d'un diamètre quelconque de la circonférence B.

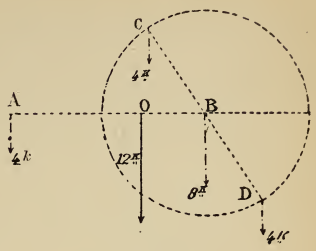


Fig. 6.

La distance AO est évidemment quelconque ; lorsque AO est donnée, le point B est déterminé ; mais la longueur BC est encore quelconque.

2° *Elles sont égales, l'une est de sens contraire aux autres.*

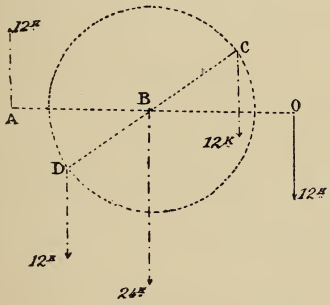


Fig. 7.

Chaque composante vaut 12^k.
On doit avoir $AO = 2BO$ et le point B milieu de CD.

3° *Leurs points d'application sont donnés.*

Cette question est résolue dans le Cours, n° 57.

Problème 18

Sur une droite AC *on prend trois points équidistants* A, B, C ; *on applique en* A *une force de* 3^k, *en* B *une autre de* 4^k, *en* C

une de 5^k. *En quel point faut-il soutenir la droite pour qu'elle soit en équilibre ?*

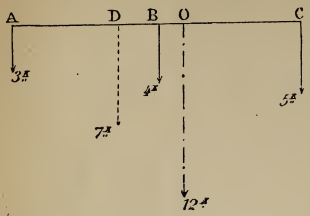


Fig. 8.

Les forces 3^k et 4^k ont une résultante de 7^k, appliquée au point D déterminé par la relation

$$\frac{AD}{BD} = \frac{4}{3}$$

Il reste à composer la force D, de 7^k, avec la force C, de 5^k. Leur résultante, qui est celle du système donné, vaudra 12^k, et son point d'application O sera donné par la relation

$$\frac{OD}{OC} = \frac{5}{7}$$

Pour trouver comment ce point partage la droite AC, désignons par d la distance $AB = BC$

On a $$AD = \frac{4}{7} AB = \frac{4}{7} d$$

par suite, $$DC = \frac{10}{7} d$$

mais $$OC = \frac{7}{12} DC$$

Donc $$OC = \frac{7}{12} \times \frac{10}{7} d = \frac{5}{6} d$$

Rép. $$OC = \frac{5}{6} d$$

$$OA = \frac{7}{6} d.$$

Problème 19

Un point matériel est attiré vers les trois sommets d'un triangle équilatéral par des forces respectivement égales à 3^k, 4^k, 5^k. *On demande de déterminer, par une construction graphique, la position que devra occuper le point matériel pour être en équilibre.* (Rennes, concours Ens. spéc., 1873.)

Les forces 3^k, 4^k, 5^k étant en équilibre, l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres ; la résultante des forces 3^k et 4^k vaut donc 5^k. Les angles de ces forces

sont obtenus en construisant le triangle OPM, dont les côtés sont 3, 4, 5.

On sait que ce triangle est rectangle en P (fig. 9).

Nous connaissons les angles POQ, POR, QOR que doivent faire les forces données, pour être en équilibre.

Le problème revient à trouver un point d'où les côtés d'un triangle équilatéral soient vus sous les angles trouvés.

C'est le problème connu sous le nom de *problème de la carte.* (Voir *Géométrie,* problème 230*.)

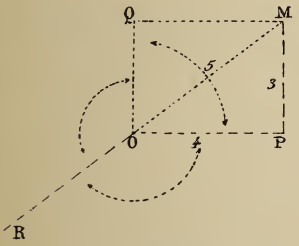


Fig. 9.

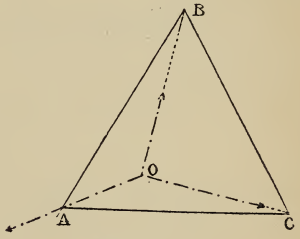


Fig. 10.

Nous allons le résoudre graphiquement.

Soit ABC (fig. 10) le triangle équilatéral donné.

Sur BC décrivons le segment capable de l'angle POQ (fig. 9); dans le cas donné, cet angle étant droit, le segment capable sera la demi-circonférence BOC décrite sur BC comme diamètre.

Sur AC, décrivons le segment AOC capable de l'angle POR.

Le point O, intersection des deux arcs, est le point cherché. OA, OB et OC sont les directions des forces 5^k, 3^k, 4^k.

Remarques. 1° On aurait pu facilement traiter la question par le calcul. (Voir Trig., n° 92.)

2° On résoudrait de la même manière le problème plus général: *Un point matériel* O *est soumis à l'action de trois forces* P, Q, R, *assujetties à passer par les sommets d'un triangle quelconque donné* ABC. *Quelle est la position d'équilibre du point* O ?

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment que l'on ait

$$P + Q > R > P - Q$$

---

* *Éléments de Géométrie*, par F. I. C., 4e édition.

puisque, dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.

Problème 20

Un point A *est tiré par trois forces de* 5^k, 12^k, 13^k *dont les directions passent par des points donnés* B, C, D. *Quelle sera la position d'équilibre du point* A ?

Ce problème est analogue au précédent ; les forces 5^k et 12^k sont encore rectangulaires, seulement le triangle donné BCD est quelconque.

Avec des longueurs 5, 12 et 13 construisons le triangle OPM ; on trouve OP, OQ, OR (fig. 11) pour la direction des trois forces données.

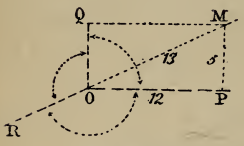


Fig. 11.

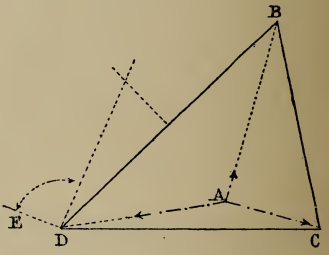


Fig. 12.

Soit BCD (fig. 12) le triangle qui a pour sommets les points donnés.

Sur BC décrivons le segment capable de l'angle droit QOP ; sur BD le segment capable de l'angle QOR.

Le point d'intersection A est le point cherché.

Les forces 5^k, 12^k et 13^k auront les directions AB, AC et AD.

Problème 21

Aux trois sommets d'un triangle on a suspendu des poids. Par quel point suspendre ce triangle pour qu'il reste horizontal?

1° *Les poids sont égaux.*

Les poids égaux P, appliqués en A et en C (fig. 13), se composent en un poids 2P, appliqué au point D, milieu de AC.

Le poids 2P et le poids P ont une résultante 3P, appliquée au point O, donné par la relation

$$\frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}$$

Le point cherché O est donc le centre de gravité du triangle (M., nº 75).

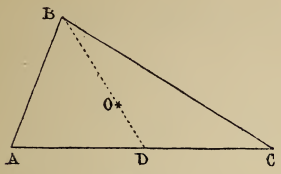


Fig. 13.

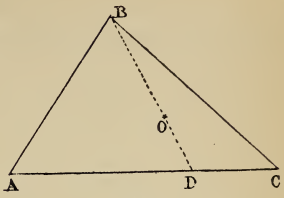


Fig. 14.

2º *Les poids sont* 2^k, 3^k, 4^k.

Le point D (fig. 14), où est appliquée la résultante des forces A et C, est donné par la relation $\frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$

De même le point O, où est appliquée la résultante des forces B et D, c'est-à-dire le point cherché, divise la droite BD de manière que l'on ait $\frac{OD}{OB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3º *Les points sont* 3^k, 4^k, *le troisième sommet ne supporte rien.*

Le point O cherché partage le côté qui joint les deux sommets A et B, où sont appliquées les forces de 3 et de 4, de manière que l'on ait $\frac{AO}{BO} = \frac{4}{3}$

Problème 22

Mêmes questions qu'au problème 21, *en tenant compte du poids du triangle, ce poids étant* 1^k.

1º *Les poids sont égaux.*

Le poids 1^k est appliqué au centre de gravité du triangle ; le point O cherché est, comme au problème précédent, le centre de gravité du triangle.

2º *Les poids sont* 2^k, 3^k, 4^k.

On trouve le point E (fig. 15) où est appliquée la résultante de forces 2, 3, 4 ; puis le point G, centre de gravité du triangle.

Le point O cherché partage la droite GE, de manière que l'on ait

$$\frac{OE}{OG} = \frac{1}{9}$$

Dans ce problème, la droite GE est parallèle à AC.

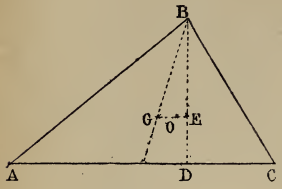


Fig. 15.

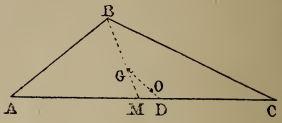


Fig. 16.

3° *Les poids sont* 3^k *et* 4^k, *le troisième sommet ne supporte rien.*

On doit avoir (fig. 16) $\frac{AD}{CD} = \frac{4}{3}$

$$\frac{BG}{GM} = 2$$

et $\frac{OD}{OG} = \frac{1}{7}$

Problème 23

Au milieu de chaque côté d'un triangle, on suspend des poids de 2^k, 3^k, 4^k ; *en quel point le soutenir pour qu'il reste horizontal?*

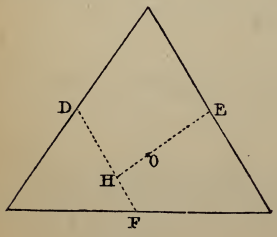


Fig. 17.

1° *Le triangle est sans pesanteur.*

Les forces 4^k et 2^k ont pour résultante une force de 6^k, appliquée en H, de manière que

$$\frac{FH}{DH} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Les forces $H = 6^k$ et $E = 3^k$ ont leur résultante appliquée en O, de manière que

$$\frac{OH}{OE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2° *Le triangle pèse* 1^k.

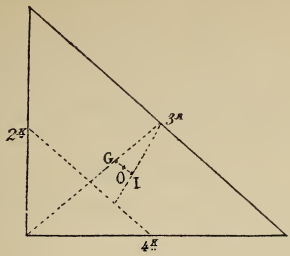


Fig. 18.

On trouve, comme précédemment, le point I, centre des forces 2, 3, 4; puis on compose les forces G de 1^k et I de 9^k; on a le centre O des quatre forces, en divisant GI de manière que

$$\frac{OI}{OG} = \frac{1}{9}$$

Problème 24

Un plan horizontal repose sur une sphère par un point O. *On place sur ce plan un poids de* 14^k *au point* A *et un poids de* 21^k *au point* B. *On demande en quel point il faut placer un poids de* 25^k *pour qu'il y ait encore équilibre. La distance* OI, *du point* O *à la droite* OB, *est de* 0^m5; $AI = 0^m6$ *et* $BI = 0^m4$.

Composons d'abord les forces A et B, en désignant par x et y les distances des points A et B au point d'application de la résultante; on doit avoir

$$\frac{x}{y} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

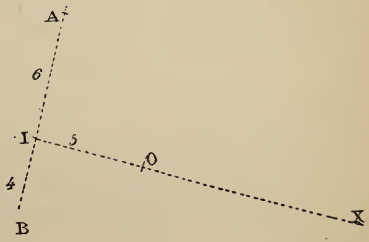


Fig. 19.

Le point I donné divise précisément la droite AB dans ce rapport, puisque

$$\frac{0,6}{0,4} = \frac{3}{2}$$

La résultante des forces A et B est donc appliquée en I.

Le point X, où sera appliquée la force de 25^k, sera sur la droite IO, de manière que l'on ait

$$\frac{OX}{OI} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

Puisque $OI = 0{,}50$, on aura $OX = 0{,}70$

Le point demandé doit donc se trouver sur le prolongement de 10 et à 0^m70 à partir du point O.

Problème 25

Aux angles d'un carré on suspend des poids, trouver le centre de gravité du système.

1° *Les poids sont* 1^k, 2^k, 3^k, 4^k.

Ces poids sont appliqués aux poids A, B, C, D.

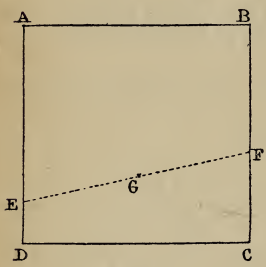


Fig. 20.

Les forces B et C ont une résultante de 5, appliquée en F, pourvu que

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{3}$$

Les forces A et B ont aussi une résultante de 5 appliquée en E,

$$\frac{ED}{EA} = \frac{1}{4}$$

La résultante totale sera appliquée au point G, milieu de EF. C'est le centre de gravité cherché.

2° *Les poids sont* 2^k, 1^k, 4^k, 3^k.

Solution analogue à la précédente.

Problème 26

Mêmes questions qu'au n° 25, mais en tenant compte du poids 5^k *du carré.*

Après avoir obtenu le point G, où est appliquée la résultante 10^k des poids donnés, on compose cette force avec celle de 5^k, qui est appliquée au milieu des diagonales. On a ainsi le point demandé.

Problème 27

Trouver en quel point il faut soutenir un hexagone régulier supportant des poids égaux à cinq de ses sommets. (Besançon, dipl. Ens. sup., 1880.)

Soit F le sommet qui ne supporte aucun poids.

Les forces égales A et B ont leur résultante appliquée en M, milieu de AB.

De même, les forces D et E ont leur résultante au milieu N, de DE.

Les forces M et N ont leur résultante appliquée au point O, milieu de MN.

Il reste à combiner une force de 4 au point O, et une force de 1 au point C.

Le point G cherché sera sur CO, de manière que

$$\frac{OG}{CG} = \frac{1}{4}$$

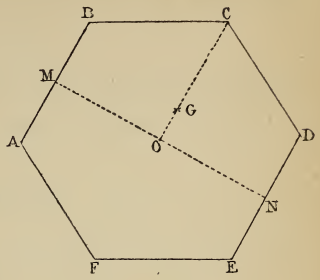


Fig. 21.

Il faut soutenir l'hexagone par le point G, pris sur le diamètre qui passe par le sommet non chargé, à une distance du centre égale au $^1/_5$ du rayon, mais du côté du sommet opposé.

Remarque. On peut encore déterminer le point cherché par la construction suivante.

Menons le rayon OF qui passe par le sommet où aucun poids n'est appliqué, joignons AE ; le point R, milieu de AE, est le point d'application de la résultante des forces égales A et E.

Menons le rayon OA et joignons RB ; au point F est appliquée la résultante des forces R et B. En effet, les triangles OFR et AFB sont semblables, puisque OR et AB sont parallèles ; on a donc

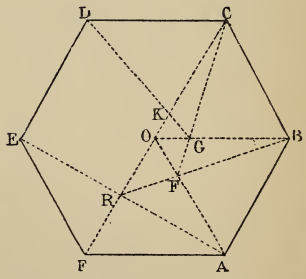


Fig. 22.

$$\frac{RF}{BF} = \frac{OR}{AB} = \frac{1}{2}$$

Les segments RF et FB sont bien en raison inverse des forces R et B.

Menons le rayon OB et joignons FC ; au point G est appliquée

la résultante des forces $F = 3$ et $C = 1$, car les triangles semblables OGF et CGB donnent

$$\frac{OG}{GB} = \frac{1}{3}$$

Enfin menons les rayons OC et joignons GD; le point K est le point cherché, car on a $OK = \frac{1}{4} CK$

Problème 28

Un anneau est soutenu par son centre, on lui suspend des poids : comment les placer pour que l'anneau soit horizontal ?

1° *Les poids sont* 3^k *et* 3^k.

Pour que l'anneau soit horizontal, il faut que la résultante des poids suspendus passe par le centre de cet anneau; les poids, étant égaux, doivent être aux extrémités d'un même diamètre.

2° *Les poids sont* 2^k, 3^k.

L'anneau ne peut rester horizontal; il se mettra dans un plan vertical, de manière que la résultante passe par le centre.

3° *Les poids sont* 1^k, 2^k, 3^k.

Le poids de 3^k étant placé en un point A, les deux autres doivent être réunis à l'autre extrémité du diamètre du point A.

4° *Les poids sont* 2^k, 3^k, 4^k.

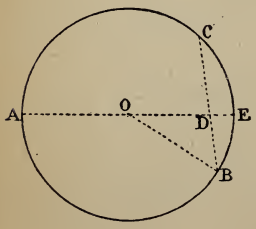


Fig. 23.

1re Méthode. Soit A le point où l'on suspend le poids de 4^k, la résultante 5^k des deux autres poids devra être appliquée sur le diamètre AE, en un poids D donné par la relation

$$\frac{OD}{OA} = \frac{4}{5}$$

d'où $$OD = \frac{4}{5} R$$

Mais pour que la résultante des poids 2^k, 3^k soit appliquée en D, il faut qu'ils soient aux extrémités d'une corde CB, partagée au point D en deux segments x et y, tels que

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

On a aussi la relation

$$xy = \text{ED} \times \text{DA} = \frac{\text{R}}{5} \times \frac{9\text{R}}{5}$$

ou

$$xy = \frac{9}{25}\,\text{R}^2 \qquad (2)$$

En résolvant le système (1) et (2), on obtient

$$x = \frac{\sqrt{6}}{5}\,\text{R}$$

2e Méthode. On peut résoudre cette question au moyen des moments.

Soient A, B, C les points où sont appliqués les poids 4^k, 3^k, 2^k; désignons par x l'arc EC et par y l'arc EB.

Pour qu'il y ait équilibre, la résultante doit passer par le centre.

Considérons un plan passant par AO, et perpendiculaire au plan de la figure; les moments, par rapport à ce plan, donnent l'équation

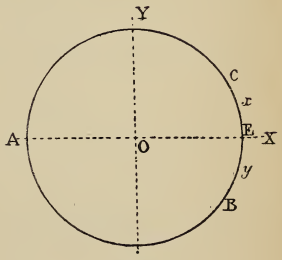


Fig. 24.

$$2 \sin x - 3 \sin y = 0 \qquad (1)$$

Les moments, par rapport au plan OY, donnent

$$2 \cos x + 3 \cos y - 4 = 0 \qquad (2)$$

De (1) on tire $\qquad \sin y = \frac{2}{3} \sin x$

par suite, $\qquad \cos y = \frac{\pm\sqrt{9 - 4 \sin^2 x}}{3}$

Cette valeur mise dans l'équation (2) donne

$$2 \cos x \pm \sqrt{9 - 4 \sin^2 x} - 4 = 0$$

d'où $\qquad \pm\sqrt{9 - 4 \sin^2 x} = 2\,(2 - \cos x)$

Élevant au carré, on obtient

$$4\,(\sin^2 x + \cos^2 x) - 16 \cos x + 7 = 0$$

ou

$$4 - 16 \cos x + 7 = 0$$

d'où

$$\cos x = \frac{11}{16}$$

Cette valeur mise dans (2) donne

$$\cos y = \frac{7}{8}$$

Ce qui donne pour la valeur des arcs

$$x = 46^\circ 34'$$
$$y = -28^\circ 57'$$

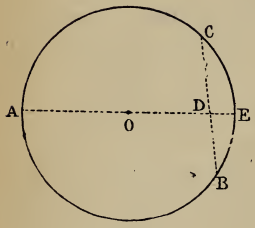


Fig. 25.

Remarque. Il est facile de s'assurer que ces valeurs sont les mêmes que celles trouvées par l'autre méthode.

Il suffit de calculer l'angle BOE, dans le triangle BOD, dont

$$BO = 1, \quad OD = \frac{4}{5}, \quad BD = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

(Trig., n° 79).

On trouve $BOE = 28^\circ 57'$, valeur obtenue ci-dessus.

5° *Les poids nets sont* 2^k, 4^k, 5^k, 8^k.

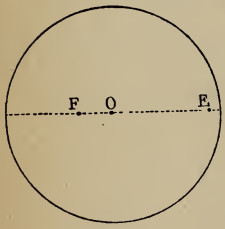


Fig. 26.

Les poids 2 et 4 ont une résultante de 6, les poids 5 et 8 ont 13 pour résultante ; ces forces ne feront équilibre que si elles sont appliquées aux points E, F de manière que

$$\frac{OF}{OE} = \frac{6}{13}$$

Les poids 2 et 4 seront aux extrémités d'une corde divisée par le point F en segments dans le rapport $^1/_2$. La corde des poids 5 et 8 sera partagée au point E dans le rapport $^5/_8$.

Il y a une infinité de solutions.

En se servant des équations, on aurait deux équations à trois inconnues ; il faudrait donner une valeur à l'un des arcs, et, comme ci-dessus, on obtiendrait les valeurs correspondantes des deux autres arcs.

Si l'on appliquait deux des poids, 4 et 2 par exemple, au même point, on aurait un cas analogue au 4° ; les trois poids seraient 6^k, 5^k et 8^k.

Problème 29

Une tige rigide est sollicitée par quatre forces appliquées respectivement en quatre de ses points A, B, C, D. *La première* P *est verticale, la deuxième* F *égale* 1^k *et agit verticalement de haut en bas. Les deux autres* Q *et* R *sont perpendiculaires à* AD. *L'angle* A, *que fait la droite avec l'horizontale* AH, *est de* 30°. *On a* $AB = 0^m40$; $BC = 0^m30$; $CD = 0^m25$.

Sachant qu'il y a équilibre, on demande de calculer les trois forces inconnues P, Q, R. (Bordeaux, Conc. acad., Ens. sp., 1877.)

1re Solution. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que l'on ait

$$P = F \quad \text{et} \quad Q = R$$

car si P était différent de F, ces deux forces auraient une résultante, cette résultante devrait être détruite par celle des forces Q et R, ce qui est impossible, ces deux résultantes n'étant pas directement opposées. Donc les forces P et F sont égales, et les forces Q et R sont aussi égales.

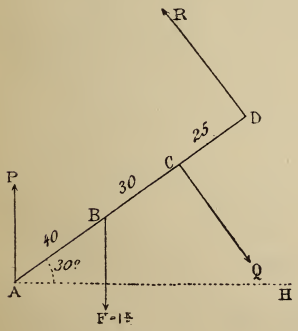


Fig. 27.

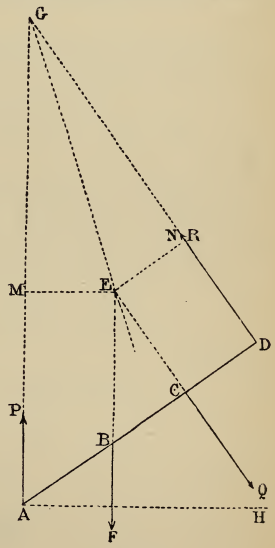


Fig. 28.

Il reste à déterminer l'intensité de Q ou de R.

Pour cela, prolongeons AP et DR jusqu'à leur rencontre G (fig. 28), BF et CQ jusqu'en E. Le point G est sur la direction de la résultante des forces P et R, le point E appartient à celle des forces F et Q ; ces deux résultantes, étant de sens contraire

puisqu'elles se détruisent, sont dirigées suivant EG et GE. Le point E étant sur la direction de la résultante des forces P et R,

on a (M., n° 46) $$\frac{R}{P} = \frac{ME}{NE}$$

d'où $$R = \frac{P \times ME}{NE} = \frac{1^k \times AB \cos 30^\circ}{CD}$$

Donc $$R = \frac{1^k \times 40 \cos 30^\circ}{25} = \frac{4\sqrt{3}}{5} = 1^k385$$

Rép. $P = 1^k$, $Q = R = 1^k385$.

2e Solution. Il est plus simple d'appliquer les équations générales d'équilibre. Dans ce cas, elles se réduisent à écrire que la somme des projections sur AH est nulle, ainsi que sur AP, et que la somme des moments, par rapport au point A, est nulle aussi.

En projetant sur AH, les forces P et F, perpendiculaires à cet axe, ont leurs projections nulles ; on doit donc avoir

$$\text{proj. de } Q + \text{proj. de } R = 0$$

ce qui exige que les forces Q et R soient égales et de sens contraire.

En projetant sur AP, on trouve que les projections de Q et de R s'annulent ; il faut que celles de P et de F s'annulent aussi : les forces P et F sont donc égales et de sens contraire.

On doit encore avoir, en prenant les moments par rapport au point A,

$$F \times AB \cos 30^\circ + Q \times AC - R \times AD = 0$$

à cause de $$Q = R$$

on a $$F \times AB \cos 30 = Q\,(AD - AC) = Q \times CD$$

d'où $$Q = \frac{F \times AB \cos 30^\circ}{CD}$$

par suite, $$Q = 1^k385$$

Problème 30

Prouver que trois forces appliquées en un point, et qui se font équilibre, sont les médianes du triangle formé en joignant leurs extrémités.

Soient P, Q, R trois forces en équilibre. L'une quelconque de ces forces, P par exemple, sera directement opposée à leur

résultante AB, diagonale du parallélogramme des forces Q et R; mais AB passe par le point M, milieu de QR, donc PM est médiane du triangle PQR; on prouverait de même que AQ et AR sont dirigées suivant les deux autres médianes.

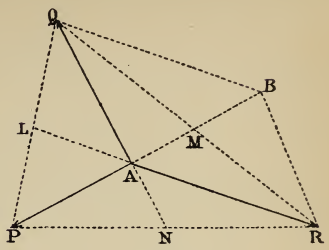


Fig. 29.

Si l'on prenait pour intensité des forces appliquées en A la longueur des médianes, les forces seraient encore en équilibre, car on a

$$\frac{PM}{AP} = \frac{QN}{AQ} = \frac{RL}{AR}$$

Problème 31

On applique au centre d'un pentagone régulier quatre forces égales respectivement dirigées vers quatre sommets du polygone, et l'on demande de déterminer la résultante de ces forces. (Paris, Conc. acad., Ens. sp., 1872.)

Soient F, F_1, F_2, F_3 les forces données; si l'on applique une force OP égale aux précédentes, le système des cinq forces F, F_1, F_2, F_3, P est en équilibre. Donc OR, égale et directement opposée à OP, est la résultante des quatre forces données.

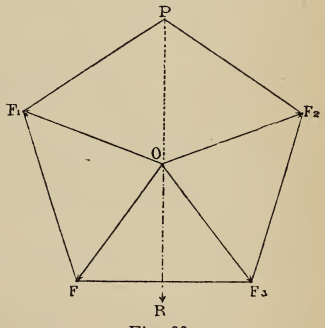


Fig. 30.

Remarque. Il est facile de vérifier que les cinq forces F, F_1, F_2, F_3, P sont en équilibre :

1° Si l'on construit le polygone des forces, ce polygone se ferme, puisque c'est un pentagone semblable à celui qui est donné.

2° Si l'on projette ces cinq forces sur un axe XX′ perpendiculaire à OP, la somme des projections est nulle; il en serait de même sur un autre axe perpendiculaire à une autre force.

3° Le théorème de Leibnitz (M., Exercice 41) fait encore voir que ces cinq forces sont en équilibre.

Problème 32

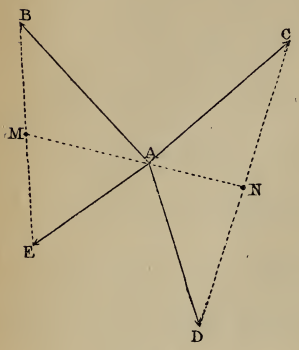


Fig. 31.

Quatre forces appliquées en A *peuvent ne pas être dans le même plan. Quelles conditions doivent remplir les droites* AM *et* AN *qui joignent le point* A *au milieu des droites* BE *et* CD, *pour que les quatre forces soient en équilibre ?*

La droite AN représente la moitié de la résultante des forces C et D, de même AM représente la moitié de celle des forces B et E ; pour qu'il y ait équilibre, il faut que AM et AN soient égales et directement opposées.

Problème 33

Aux trois sommets d'un triangle, on applique des forces parallèles, de même sens et respectivement proportionnelles aux côtés opposés. Au centre du cercle inscrit, on applique une force parallèle aux premières, de sens contraire et égale à leur somme.

Démontrer que le triangle, considéré sans pesanteur, est en équilibre sous l'action de ces quatre forces.

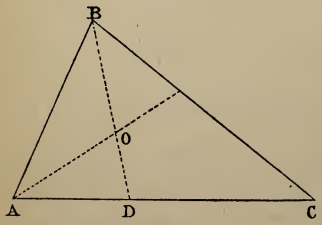


Fig. 32.

La force appliquée au centre du cercle inscrit, étant de sens contraire aux forces appliquées aux sommets et égale à leur somme, détruira leur résultante si elle lui est directement opposée.

Il suffit donc de prouver que le centre du cercle inscrit est le centre des forces appliquées aux sommets.

Soient f, f_1, f_2 les forces appliquées en A, B, C ; on a, par hypothèse,

$$\frac{f}{f_2} = \frac{BC}{AB}$$

Le point O étant le centre du cercle inscrit, BD est bissectrice de l'angle B ; on a donc

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{f_2}{f}$$

Le point D, divisant AC en parties inversement proportionnelles aux forces appliquées en A et en C, est le point d'application de leur résultante.

La résultante des trois forces sera donc appliquée en un point de la bissectrice BD ; il en serait de même pour une autre bissectrice ; *le point* O *centre du cercle inscrit est donc le centre des forces* f, f_1, f_2.

Problème 34

Par un point pris dans le plan d'un triangle, on mène des perpendiculaires à chaque côté ; ces perpendiculaires représentent des forces proportionnelles aux côtés sur lesquelles elles tombent.

Prouver que ces forces sont en équilibre.

Soient les forces OP, OR, OQ, perpendiculaires aux côtés du triangle ABC et proportionnelles à ces côtés. Les forces sont en équilibre, car le polygone de ces forces, ayant ses côtés proportionnels et ses angles égaux à ceux du triangle ABC, sera un triangle semblable à ABC. Ce polygone se ferme donc de lui-même ; par suite, les forces sont en équilibre (M., nº 32).

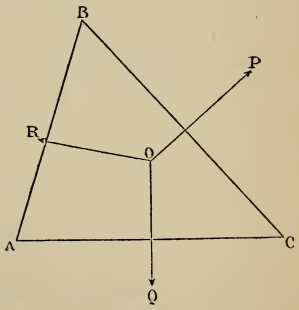


Fig. 33.

Il est évident qu'il en sera de même, quelle que soit la position du point O. Les forces doivent être prises dans une direction convenable, c'est-à-dire que l'une des forces ne doit pas être dans l'angle des deux autres.

2e Solution. Nous allons prouver que la force R′, égale et directement opposée à R, est la résultante des forces P et Q ; les forces P, Q, R sont donc en équilibre.

Par construction, les forces étant proportionnelles aux côtés, on peut écrire

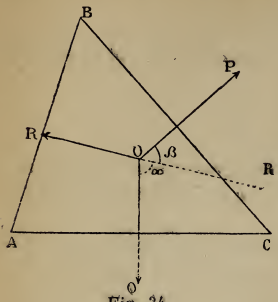


Fig. 34.

$$a = Pk, \quad b = Qk, \quad c = Rk$$

Le triangle ABC donne (Trig., nº 70)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

d'où

$$R^2k^2 = P^2k^2 + Q^2k^2 - 2PQk^2 \cos C \quad (1)$$

Mais l'angle C est le supplément de $(\alpha + \beta)$; par suite,

$$\cos C = -\cos(\alpha + \beta)$$

La relation (1) devient, en divisant tout par k^2,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(\alpha + \beta)$$

L'intensité de la force R est bien celle de la résultante des forces P et Q.

Le même triangle ABC donne encore (Trig., nº 69)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

qui deviennent $$\frac{Pk}{\sin A} = \frac{Qk}{\sin B} = \frac{R'k}{\sin C}$$

Et en remarquant que

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad C = 180 - (\alpha + \beta)$$

on a $$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R'}{\sin(\alpha + \beta)}$$

La force R′ est donc la résultante des forces P et Q.

Problème 35

Étendre le théorème précédent à un polygone quelconque.

(Les forces doivent être semblablement dirigées, c'est-à-dire qu'elles doivent toutes être dirigées du même côté, vers la droite, par exemple, d'un individu qui parcourrait le périmètre du polygone, sans revenir sur ses pas.)

1re Solution. Comme au problème précédent, si l'on construit le polygone de ces forces, le polygone ainsi obtenu, ayant ses côtés proportionnels à ceux du polygone donné et ses angles

égaux à ceux du même polygone, lui sera semblable ; ce sera donc un polygone fermé, les forces sont en équilibre.

2e Solution. On divise le polygone en triangles, par des diagonales. On mène des perpendiculaires à tous les côtés de ces triangles, comme au problème 34 : ces forces sont en équilibre. Mais chaque diagonale fait partie de deux triangles, il lui correspond dès lors deux forces égales et directement opposées : ces deux forces sont en équilibre ; on peut donc supprimer toutes les forces perpendiculaires aux diagonales, et les forces qui restent, c'est-à-dire celles qui sont perpendiculaires aux côtés du polygone, sont encore en équilibre (M., nº 16, 3º).

3e Solution. Dans ce problème, comme dans le précédent, on peut faire tourner d'un angle de 90º le système des forces autour du point commun, sans que ce système change. Mais alors les projections de ces forces sur un axe quelconque sont égales à celles des côtés du polygone sur ce même axe, multipliées par un coefficient commun qui exprime le rapport de similitude.

Or la somme des projections du polygone donné est nulle, puisque ce polygone est fermé ; il en sera de même pour la somme des projections des forces ; ces forces sont donc en équilibre (M., nº 41).

Problème 36

Soit un point O *pris dans le plan d'un triangle* ABC, *et soient* E, F, G *les milieux des côtés. Prouver que le système des forces* OE, OF, OG *est équivalent à celui des forces* OA, OB, OC. (Concours Ens. sp.)

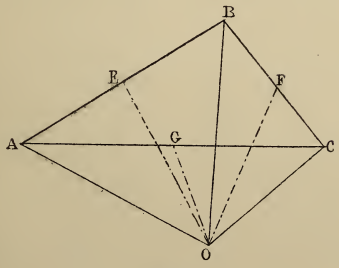


Fig. 35.

La droite OE est la moitié de la diagonale du parallélogramme construit sur OA et OB.

Les forces OA et OB ont pour résultante 2OE.
« OB et OC « 2OF.
« OC et OA « 2OG.

Donc 2OA, 2OB et 2OC peuvent être remplacées par 2OE, 2OF, 2OG.

Donc OA, OB et OC forment un système équivalent à celui de OE, OF, OG.

Problème 37

Sur le milieu des côtés d'un triangle et dans son plan, on applique des forces perpendiculaires et respectivement proportionnelles aux côtés. Prouver que ces forces, étant toutes dirigées à l'extérieur du triangle, se font équilibre. Il en serait de même si elles étaient dirigées à l'intérieur.

Les perpendiculaires élevées au milieu de chaque côté d'un triangle se rencontrent au centre du cercle circonscrit, les forces peuvent être transportées en ce point. Alors on rentre dans le cas du problème 34 ; les forces sont donc en équilibre.

Problème 38

Étendre ce théorème à un polygone quelconque.

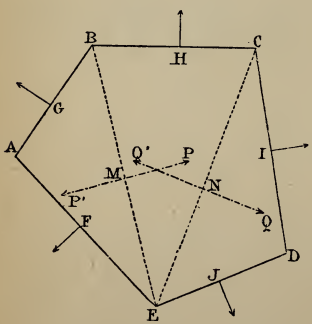


Fig. 36.

(Les perpendiculaires doivent être dans le même sens, c'est-à-dire toutes à la droite ou toutes à la gauche d'un observateur qui fait le tour du polygone, sans revenir sur ses pas.)

Divisons le polygone en triangles et considérons le triangle ABE.

Si au milieu M de la diagonale BE nous appliquons une force P perpendiculaire à BE et telle que

$$\frac{P}{BE} = \frac{G}{AB} = \frac{F}{AE}$$

les trois forces P, G, F sont en équilibre. En agissant de même pour chacun des triangles, on voit qu'au milieu de chaque diagonale sont appliquées deux forces égales et de sens contraire.

Toutes les forces appliquées aux diagonales se faisant équilibre deux à deux, on peut les supprimer (M., nº 16), et le système des forces restantes, c'est-à-dire le système donné, est en équilibre.

Problèmes supplémentaires.

Nous croyons utile d'ajouter les questions suivantes :

I. *Un polygone régulier d'un nombre pair de côtés est inscrit dans un cercle ; on joint un point quelconque de la circonférence à tous les sommets du polygone. Prouver que la résultante de toutes les forces représentées par les droites ainsi déterminées passe toujours par le centre et qu'elle est constamment égale au produit du rayon par le nombre de côtés du polygone.*

Considérons les forces MB et ME dont les extrémités sont diamétralement opposées ; elles ont pour résultante le diamètre MN = 2R.

Toutes les forces données peuvent être ainsi prises deux à deux, ayant leurs extrémités diamétralement opposées.

Chacun de ces groupes de forces aura pour résultante le diamètre MN ; en désignant par n le nombre des côtés du polygone, l'ensemble des forces aura donc une résultante égale à

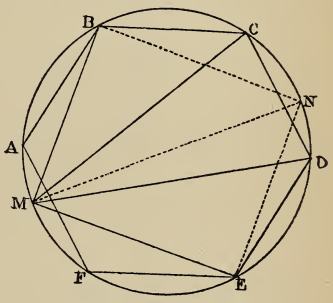


Fig. 37.

$$\frac{n}{2} \times 2R \quad \text{ou } nR$$

Remarque. Cette question n'est qu'un cas particulier de la suivante.

II. *Une circonférence est divisée en* n *parties égales ; on joint un point* A *quelconque de cette circonférence à chacun des points de division. Prouver que les forces représentées par les droites ainsi obtenues ont pour résultante une force* nR *dirigée suivant le diamètre qui passe par le point* A, *quel que soit ce point* A.

Soient F_1, F_2, F_3..... F_n les points qui divisent la circonférence en n parties égales, et A le point donné.

Si l'on désigne par a l'arc AF_1, et par h l'arc $F_1 F_2$, en se

rappelant qu'un sinus est la moitié de la corde qui sous-tend un arc double, on a la corde AF_1

ou la force $$F_1 = 2R \sin \frac{a}{2}$$

De même $$F_2 = 2R \sin \frac{a+h}{2}$$

. . . . . .

et $$F_n = 2R \sin \frac{a+(n-1)h}{2}$$

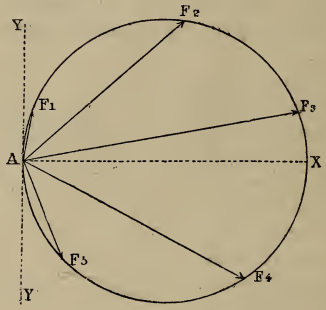


Fig. 38.

Projetons ces forces sur l'axe AX qui passe par le point A et le centre, et sur l'axe AY perpendiculaire à AX.

On a pour les projections sur l'axe AY

$$\text{proj. } F_1 = F_1 \cos F_1AY$$

Mais l'angle F_1AY a pour mesure $\frac{a}{2}$

Donc $$\text{proj. } F_1 = F_1 \cos \frac{a}{2} = 2R \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = R \sin a$$

De même

$$\text{proj. } F_2 = F_2 \cos \frac{a+h}{2} = 2R \sin \frac{a+h}{2} \cos \frac{a+h}{2} = R \sin (a+h)$$

. . . . . .

et $$\text{proj. } F_n = R \sin [a + (n-1)h]$$

La somme de ces projections est donc

$$R [\sin a + \sin (a+h) + \sin (a+2h) \ldots + \sin [a + (n-1)h]]$$

La quantité entre crochets [] est la somme des sinus de n arcs en progression arithmétique ; cette somme S est (Exercices de Trigonométrie, page 11) :

$$S = \frac{\sin\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

On voit facilement que cette somme est nulle, car l'arc nh égalant la circonférence, l'arc $\frac{nh}{2}$ est une demi-circonférence, et $\sin\frac{nh}{2}$ est égal à zéro.

Donc la somme des projections des forces données, et, par suite, la projection de leur résultante sur l'axe AY, est nulle. Cette résultante est donc perpendiculaire à cet axe, elle est dirigée suivant AX.

Pour trouver son intensité, projetons les forces sur l'axe AX.

On a $\qquad$ proj. de $F_1 = F_1 \cos F_1AX$

Mais l'angle F_1AX a pour mesure la moitié de l'arc F_1X, c'est-à-dire $\qquad \frac{\pi - a}{2}$

Donc $\qquad$ proj. $F_1 = F_1 \cos\frac{\pi - a}{2}$

or $\qquad \cos\frac{\pi - a}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) = \sin\frac{a}{2}$

par suite,

$$\text{proj. } F_1 = F_1 \sin\frac{a}{2} = 2R \sin\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2} = 2R \sin^2\frac{a}{}$$

De même $\qquad$ proj. $F_2 = F_2 \cos\frac{\pi - (a+h)}{2}$

mais $\qquad \cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{a+h}{2}\right] = \sin\frac{a+h}{2}$

Donc $\qquad$ proj. $F_2 = F_2 \sin\frac{a+h}{2} = 2\,R \sin^2\frac{a+h}{2}$

. . . . . .

et $\qquad$ proj. $F_n = 2R \sin^2\frac{a + (n-1)h}{2}$

On peut remplacer $2 \sin^2 \frac{a}{2}$ par $1 - \cos a$

ce qui donne

$$\text{proj. } F_1 = R\,(1 - \cos a)$$
$$\text{proj. } F_2 = R\,[1 - \cos\,(a + h)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{proj. } F_n = R\,[1 - \cos\,[a + (n-1)\,h]]$$

En faisant la somme de ces projections, on obtient

$$S = nR - R\,[\cos a + \cos\,(a + h) + \ldots\ldots \cos\,[a + (n-1)\,h]\,]$$

La quantité entre crochets est la somme des cosinus de n arcs en progression arithmétique.

On sait qu'elle est exprimée par (Exerc. de Trig., p. 12) :

$$\frac{\cos\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right] \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}$$

On retrouve le même facteur $\sin \frac{nh}{2}$ qui vaut zéro ; cette somme est donc nulle; par suite, la somme S des projections sur AX est nR.

Donc la résultante est dirigée suivant le diamètre AX, et elle est égale à nR, quelle que soit la position du point A.

Problème 39

Soit une droite rigide AB *de* 0^m40 *de longueur. On applique à ses extrémités deux forces* AF, BF′ *agissant dans le même plan et égales chacune à* 6^k. *La première fait avec* AB *un angle de* 150°, *la seconde un angle de* 120°. *On demande en quel point de* AB *il faut appliquer une force pour maintenir* AB *en équilibre, quelle est l'intensité de cette force, et quel angle elle fait avec* AB. (Bordeaux, Conc. acad. Ens. sp., 1874.)

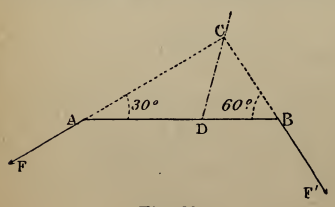


Fig. 39.

Prolongeons les forces F et F′ jusqu'à leur point de rencontre C. Le triangle ACB est rectangle, et, puisque l'angle A vaut 30°, le côté BC est moitié de l'hypoténuse.

On a donc $AB = 40$, $BC = 20$, $AC = 20\sqrt{3}$

Les forces données étant rectangulaires et égales, leur résultante vaut $6\sqrt{2} = 8^k485$

elle est bissectrice de l'angle C ; par suite, on a

$$\frac{BD}{AD} = \frac{20}{20\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d'où
$$\frac{BD}{AD + BD} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

et
$$BD = AB\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 14{,}64$$

Il est facile de voir que l'angle CDB vaut 75°.

Rép. *La force qui doit équilibrer le système est de* 8^k485.
Elle est appliquée à 0^m1464 *du point* B.
Elle fait un angle de 75° *avec* AB *du côté du point* B.

Problème 40

On conserve les mêmes données que dans le problème précédent, sauf l'intensité de BF′, *qui est inconnue. On demande quelle doit être cette intensité pour que la force qui doit maintenir* AB *en équilibre, passe par le milieu de cette droite.* (Bordeaux, Conc. acad. Ens. sp., 1874.)

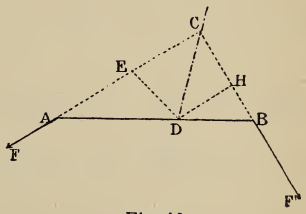


Fig. 40.

Le point D appartenant à la résultante, on a

$$\frac{F'}{F} = \frac{DE}{DH}$$

Mais à cause des triangles rectangles AED et DHB qui ont un angle aigu de 30°, on a

$$DE = \frac{AD}{2} = 10 \quad \text{et} \quad DH = \frac{DB\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

par suite,
$$\frac{F'}{F} = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d'où
$$F' = \frac{F}{\sqrt{3}} = \frac{F\sqrt{3}}{3}$$

Puisque $F = 6$

on a donc $F' = 2\sqrt{3} = 3^k 464$

Le triangle CBD est équilatéral, puisque $CD = BD$ et que l'angle $B = 60^o$.

Donc la résultante fait avec AB un angle de 60°, et elle vaut $2F'$ ou $6^k 928$.

Problème 41

A deux points fixes A *et* B, *on attache un cordon au milieu duquel on suspend un poids* P. *Trouver les tensions en* A *et en* B, *si l'angle* ACB *vaut* 90°, 120°, 60°, 45°, 135°.

Le problème revient à décomposer une force P en deux autres égales et faisant un angle donné C.

En désignant par x l'une de ces forces, on a (M., n° 28)

$$P^2 = 2x^2 + 2x^2 \cos C$$

ou

$$x^2 = \frac{P^2}{2(1 + \cos C)}$$

par suite,

$$x^2 = \frac{P^2}{4 \cos^2 \frac{C}{2}} \qquad \text{(Trig., n° 39).}$$

Donc

$$x = \frac{P}{2 \cos \frac{C}{2}}$$

Rép. $C = 90^o$, $x = \dfrac{P}{2 \cos 45^o} = \dfrac{P\sqrt{2}}{2} = P \times 0{,}707$

$C = 120^o$, $x = \dfrac{P}{2 \cos 60^o} = \dfrac{P}{2 \times \frac{1}{2}} = P$

$C = 60^o$, $x = \dfrac{P}{2 \cos 30^o} = \dfrac{P\sqrt{3}}{3} = P \times 0{,}577$

$C = 45^o$, $x = \dfrac{P}{2 \cos 22^o 30'} = P \times 0{,}541$

$C = 135^o$, $x = \dfrac{P}{2 \cos 67^o 30'} = P \times 1{,}307$

Problème 42

Deux tiges égales, articulées en C, *sont maintenues par un lien inextensible* AB ; *le plan* ABC *est vertical. Un poids* Q

est suspendu au point C. *Quelle est la traction exercée par* AB, *l'angle* C *étant droit?* (Besançon, Dipl. Ens. sp.)

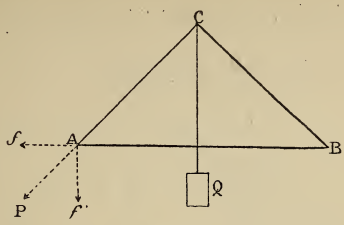


Fig. 41.

La force Q se décompose en deux forces égales dirigées suivant CA et CB. Les composantes étant rectangulaires, chacune vaut $\frac{Q}{\sqrt{2}}$ que nous représentons par P ; une de ces forces P peut être transportée en A, où elle se décompose en deux forces f, f' rectangulaires et égales à $\frac{P}{\sqrt{2}}$.

La force f' n'a aucune action sur le lien AB ; la force f est celle qui le tend.

Donc $$f = \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{2}.$$

Problème 43

Équilibre d'une ferme. *Le poids de la toiture est uniformément réparti sur les arbalétriers égaux* AB, BC, *dont le pied est engagé dans l'entrait* AC *en* A *et en* C.

Trouver les réactions aux divers points d'appui.

Supposons le poids de la couverture uniformément réparti sur le toit; ce que porte l'arbalétrier AB peut être considéré comme une force P, appliquée au point O, milieu de AB. Cette force est équilibrée 1° par la réaction R de l'arbalétrier BC ; 2° par la réaction S du mur ; 3° par la réaction F de l'entrait.

1re Méthode. Pour déterminer ces réactions, prolongeons la direction OP jusqu'en D, où elle rencontre la réaction BR prolongée ; la droite BD est horizontale, puisque tout est symétrique

par rapport au plan BH. On transporte la force P en D, où elle se décompose en DI et DJ ; DI est égale à R ; DJ se transporte en AJ', où elle se décompose en AL et AK. La droite AL donne l'intensité de la réaction S du mur sur lequel porte l'extrémité A ;

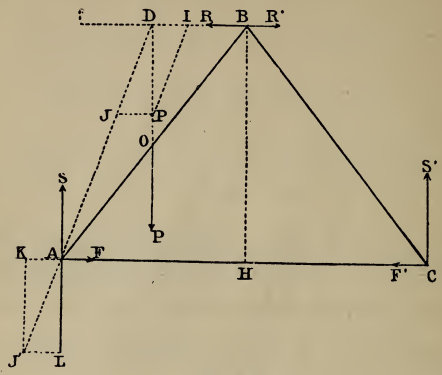


Fig. 42.

le triangle rectangle AJ'L étant égal à DJP', la force AL = DP' ; la réaction du mur est donc égale au poids total P ; la droite AK donne la réaction F qui doit se développer dans l'entrait : cette réaction est égale à R.

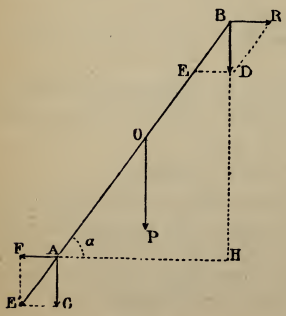


Fig. 43.

2° Méthode. On peut aussi agir comme il suit :

La force P se décompose en deux forces $\frac{P}{2}$ appliquées aux points B et A.

Au point B la force $\frac{P}{2}$ se décompose en R et E. La force R est égale à la réaction de l'autre arbalétrier.

La force BE peut être transportée en A, où elle se décompose en AF et AG ; les triangles égaux AE'G et BED font voir que

$$AF = BR \quad \text{et} \quad AG = BD \quad \text{ou} \ \frac{P}{2}$$

Cette force $\frac{P}{2}$ s'ajoute à la composante $\frac{P}{2}$, déjà appliquée en A, quand on a décomposé P.

La force verticale appliquée en A est donc égale à P.

La composante AF est donnée par la relation

$$F = E \cos \alpha$$

mais dans le triangle BED, $E = \frac{P}{2 \sin \alpha}$

Donc $$F = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

En résumé, le mur supporte en A un poids égal à P.

La réaction d'un arbalétrier sur l'autre est égale à la réaction développée dans l'entrait; cette réaction est exprimée par $\frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$.

Discussion. Quand on fait varier l'angle α, la longueur de AB varie ; pour trouver ce que deviennent les réactions, désignons par p le poids de la couverture pour chaque unité de surface ; la charge P sera représentée par $P = p \times AB$.

La distance des murs ne varie pas ; en la désignant par $2d$, on a $$AH = d$$

par suite, $$AB = \frac{d}{\cos \alpha}$$

et $$P = \frac{pd}{\cos \alpha}$$

En mettant cette valeur de P dans celle que nous avons obtenue pour F, on trouve

$$F \text{ ou } R = \frac{pd}{2 \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha} = \frac{pd}{2 \sin \alpha}$$

Donc $$R = \frac{pd}{2 \sin \alpha}$$

et $$P = \frac{pd}{\cos \alpha}$$

Ces relations montrent que lorsque α grandit, R diminue tandis que P, ou la réaction du mur, grandit.

Remarque. On pourrait encore employer très avantageusement la méthode générale des équations d'équilibre. (Voir probl. 129.)

Problème 44

Position d'équilibre du cordon ABC, *passant sur les poulies* A *et* C, *et soumis à l'action des poids* P, Q, R.

Les tensions des cordons sont P, Q, R. Quand il y aura équilibre, le parallélogramme EDBF donnera BD, BF, BE proportionnelles aux forces P, Q, R.

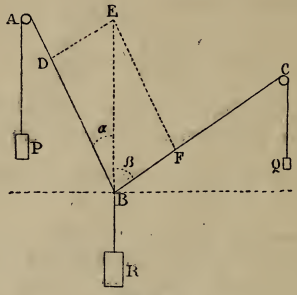


Fig. 44.

Il faut déterminer les angles α et β.

Ire Méthode. On a (M., no 26)

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

d'où $$P \sin\alpha = Q \sin\beta \qquad (1)$$

et $$Q \sin(\alpha+\beta) = R \sin\alpha \qquad (2)$$

En développant l'équation (2), on a

$$Q \sin\alpha \cos\beta + Q \cos\alpha \sin\beta = R \sin\alpha$$

En remplaçant $\sin\beta$ par sa valeur $\frac{P \sin\alpha}{Q}$, tirée de (1),

on obtient $$Q \sin\alpha \cos\beta + P \cos\alpha \sin\alpha = R \sin\alpha$$

Et en supprimant le facteur $\sin\alpha$

$$Q \cos\beta + P \cos\alpha = R \qquad (3)$$

De (1) on tire $$\sin\alpha = \frac{Q \sin\beta}{P}$$

De (3) $$\cos\alpha = \frac{R - Q\cos\beta}{P}$$

En écrivant que $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

on obtient $$\frac{Q^2 \sin^2\beta}{P^2} + \frac{(R - Q\cos\beta)^2}{P^2} = 1$$

qui devient, en remplaçant $(\sin^2\beta + \cos^2\beta)$ par 1,

$$R^2 + Q^2 - P^2 = 2QR\cos\beta$$

d'où $$\cos\beta = \frac{R^2 + Q^2 - P^2}{2QR}$$

par suite, $$\cos\alpha = \frac{R^2 + P^2 - Q^2}{2PR}$$

Remarque. La question revient à trouver les angles α et β d'un triangle dont les côtés sont P, Q, R.

La *Trigonométrie*, n° 79, donne immédiatement les formules ci-dessus et les transforme en d'autres qui sont calculables par logarithmes.

2e Méthode. On arrive plus rapidement aux équations en projetant les forces sur deux axes rectangulaires XX′, YY′.

Les forces étant en équilibre, la somme de leurs projections sur chacun des axes doit être nulle.

En projetant sur l'axe des X, la projection de R étant nulle, on a

$$-P\sin\alpha + Q\sin\beta = 0 \quad (1)$$

Sur l'axe des Y, R se projette en vraie grandeur, mais dans le sens négatif; on a

$$P\cos\alpha + Q\cos\beta - R = 0 \quad (2)$$

Équations que nous venons de résoudre.

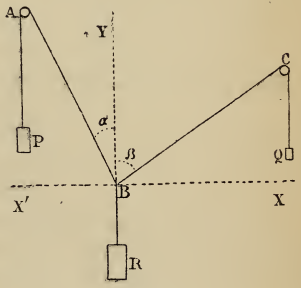


Fig. 45.

Problème 45

Une barre rigide AB *supporte les poids* P *et* Q; *une corde attachée en* A *et en* B *tient le système suspendu à un point fixe* C.

1° *Position du point* C, *pour que* AB *reste horizontal.*

Quand il y a équilibre, les points C et D sont sur la résultante qui est verticale, et par suite perpendiculaire à AB.

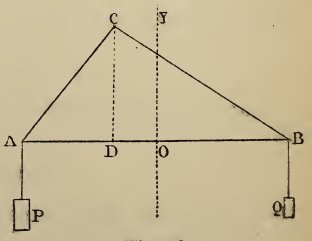


Fig. 46.

On doit avoir, en faisant $AD = m$, $BD = n$ et $AB = 2c$:

$$\frac{m}{n} = \frac{Q}{P}$$

d'où
$$m = \frac{Q}{P+Q} \times 2c$$

et
$$n = \frac{P}{P+Q} \times 2c$$

2° *Tension des cordons.*

Soit F la tension du cordon AC, et F_1 celle du cordon BC; ces deux forces, dirigées suivant AC et BC, ont une résultante dirigée suivant DC et égale à $P + Q$.

Leurs intensités sont données par les relations suivantes, dans lesquelles α et β désignent les angles des cordons CA et CB avec la résultante CD,

$$\frac{F}{\sin\beta} = \frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{P+Q}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Mais on a, en désignant CD par y et OD par x,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{y}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{n}{y}$$

On voit que, par construction, le point C appartient à une ellipse qui a ses foyers en A et en B, et dont le grand axe est la longueur du cordon que nous désignons par $2a$. (G., n° 614.)

On a donc la relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (G., n° 645.)

dans laquelle $b^2 = a^2 - c^2$ (G., n° 620.)

et
$$x = c - m = c - \frac{2cQ}{P+Q} = \frac{c(P-Q)}{P+Q}$$

On peut obtenir la valeur de y :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

par suite, celle des angles α et β, ce qui donne les tensions F et F_1.

Problème 46

Un cordon BCQ *passe dans un anneau* C, *qui est attaché à l'extrémité d'une corde* $AC = l$; AB *est horizontale et égale à* $2l$; *le poids suspendu à l'extrémité du cordon est* Q.

1° *Position d'équilibre du système.*

La tension du cordon BCQ est partout la même; la tension du cordon AC, qui équilibre les forces égales CB et CQ, est dirigée suivant la bissectrice de l'angle BCQ.

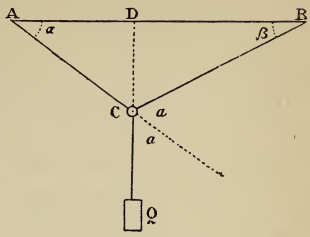


Fig. 47.

Désignons par a la moitié de l'angle BCQ, le triangle rectangle ACD donne

$$a = 90^\circ - \alpha \qquad (1)$$

l'angle a, extérieur au triangle BCA, donne

$$a = \alpha + \beta \qquad (2)$$

De (1) et (2) on tire $\beta = 90^\circ - 2\alpha$ (3)

Le triangle ABC donne

$$\frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2}$$

d'où $2 \sin \beta = \sin (\alpha + \beta)$ (4)

De l'équation (3), on tire $\sin \beta = \cos 2\alpha$

et des équations (2) et (1),

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

L'équation (4) devient $2 \cos 2\alpha = \cos \alpha$

Or $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

ce qui donne, pour l'équation (5),

$$4 \cos^2 \alpha - 2 = \cos \alpha$$

ou $4 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 2 = 0$

d'où l'on tire $\cos \alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

La racine négative est étrangère à la question; on a donc

$$\cos \alpha = 0{,}84307$$

d'où $\alpha = 32^\circ 32'$

Rép. *L'angle α, qui détermine la position d'équilibre, est* 32°32'.

2° *Tension du cordon* AC.

En désignant cette tension par F, on doit avoir

$$\frac{F}{\sin DCB} = \frac{Q}{\sin ACB}$$

Or $\sin DCB = \sin BCQ = \sin 2a$

et $\sin ACB = \sin a$

Donc $F = \frac{Q \sin 2a}{\sin a} = \frac{2Q \sin a \cos a}{\sin a} = 2Q \cos a$

mais $a = 90^\circ - \alpha$

Donc $F + 2Q \sin \alpha = Q \times 2 \sin 32^\circ 32'$

ou $F = Q \times 1{,}0755$

Rép. *Tension du cordon,* $Q \times 1{,}0755...$

Remarque. On serait arrivé au même résultat au moyen des projections. Les forces étant en équilibre, on a, en projetant sur un axe horizontal, $F \cos \alpha - Q \cos \beta = 0$

En projetant sur un axe vertical,

$$F \sin \alpha + Q \sin \beta - Q = 0$$

Équations qui se ramènent aux précédentes.

Problème 47

Cinq forces de 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k, *appliquées à un même point, sont dans un même plan ; elles font avec la première des angles qui vont en croissant de* 10° :

1° *Calculer leur résultante.*

2° *Angle de la résultante avec la première force.*

3° *Quelle force équilibrerait ces cinq forces?*

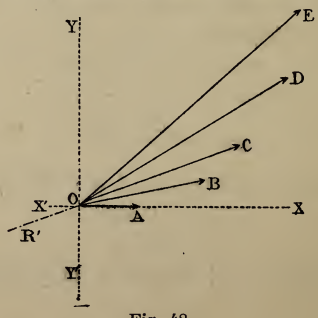


Fig. 48.

Par O, point d'application des forces, faisons passer deux axes rectangulaires OX et OY ; le premier coïncide avec la direction de la force OA.

On obtiendra la résultante par la méthode indiquée dans le cours (M., n° 39).

Forces.	Composantes suivant OX.	Composantes suivant OY.
OA	$1 \cos 0^\circ = 1$	$1 \cos 90^\circ = 0$
OB	$2 \cos 10^\circ = 1{,}969$	$2 \cos 80^\circ = 0{,}347$
OC	$3 \cos 20^\circ = 2{,}819$	$3 \cos 70^\circ = 1{,}026$
OD	$4 \cos 30^\circ = 3{,}464$	$4 \cos 60^\circ = 2{,}000$
OE	$5 \cos 40^\circ = 3{,}800$	$5 \cos 50^\circ = 3{,}212$
	$X = 13{,}052$	$Y = 6{,}585$

Mais $R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{13{,}052^2 + 6{,}585^2} = \sqrt{213{,}84}$

donc $R = 14^k 62$

2° Pour trouver l'angle de R avec OA, on applique la formule

$$\cos a = \frac{X}{R} = \frac{13{,}052}{14{,}62}$$

L'angle a cherché est 26°47′.

3° La force qui équilibrera les cinq forces données sera égale et directement opposée à la résultante ; elle est donc OR′, qui fait avec OX un angle de — 153°13′ ; son intensité est $14^k 62$.

On pourrait encore résoudre ce problème en cherchant (M., n°s 28 et 26) la résultante R_1 des forces OA et OB, puis l'angle de R_1 avec OB ; en y ajoutant 10°, on aurait l'angle de OR avec OC, ce qui permettrait de trouver R_2, et ainsi de suite ; mais les calculs seraient beaucoup trop longs.

Problème 48

Même question, les forces font des angles de 60°.

En opérant comme au problème précédent, on trouve :

Forces.	Composantes suivant OX.	Composantes suivant OY.
F_1	$1 \cos 0^\circ = 1 \times 1 = 1$	$1 \sin 0^\circ = 1 \times 0 = 0$
F_2	$2 \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$	$2 \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
F_3	$3 \cos 120^\circ = 3 \times -\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$	$3 \sin 120^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
F_4	$4 \cos 180^\circ = 4 \times -1 = -4$	$4 \sin 180^\circ = 4 \times 0 = 0$
F_5	$5 \cos 240^\circ = 5 \times -\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$	$5 \sin 240^\circ = 5 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$
	$X = -6$	$Y = 0$

La résultante est donc égale à 6^k ; elle est dirigée en sens contraire de la force de 1^k.

Problème 49

Connaissant les angles qu'une force fait avec deux axes rectangulaires, déterminer l'angle qu'elle fait avec le troisième axe.

On a trouvé (M., n° 37) la relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Si l'on connaît α et β, angles avec l'axe des X et l'axe des Y, on trouve, pour l'angle γ avec l'axe des Z,

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$$

Problème 50

Une force F *fait avec l'axe des* X *un angle de* 30°, *et avec l'axe des* Y *un angle de* 60°; *une autre force* F' *fait avec les mêmes axes des angles de* 45° *et de* 60°. *Quel est l'angle des forces* F *et* F' ?

On a trouvé (M., Exercice 5) la formule

$$\cos V = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' \qquad (1)$$

Pour l'appliquer, déterminons les angles des deux forces données avec l'axe des Z.

L'angle γ, de F, est donné par la formule de l'exercice précédent

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - (\cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ)}$$

qui devient $\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)}$

d'où $\cos \gamma = 0$

et $\gamma = 90^\circ$

La force F est donc dans le plan XAY ; il était facile de le voir à priori, les angles 30° et 60° étant complémentaires.

L'angle de la force F' est donné par

$$\cos \gamma' = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$\cos \gamma' = \frac{1}{2}$$

d'où $\gamma' = 60^\circ$

La formule (1) donne

$$\cos V = \cos 30^\circ \cos 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos 90^\circ \cos 60^\circ$$

$$\cos V = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{6}}{4} = 0{,}86237$$

d'où $V = 30^\circ 25'$.

Rép. *Les forces* F *et* F' *font donc un angle de* 30° 25'.

Problème 51

Résultante de trois forces :

$F = 3^k$, $F_1 = 4^k$, $F_2 = 5^k$,

dont les angles sont $(F, F_1) = 90^\circ$,

$(F, F_2) = 60^\circ$, $(F_1, F_2) = 45^\circ$.

Les forces F et F_1 étant rectangulaires, nous les prendrons pour axes des X et des Y ; celui des Z sera perpendiculaire au plan XAY.

L'angle de la force F_2 avec l'axe des Z sera 60°, comme on l'a trouvé au problème 50.

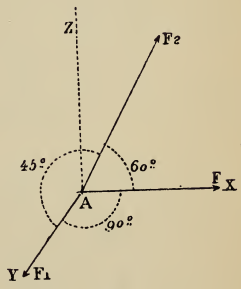


Fig. 49.

En projetant chacune des forces sur les axes, on a (M., n° 39)

Forces.	Projection sur X.	Projection sur Y.	Projection sur Z.
$F = 3$	3	0	0
$F_1 = 4$	0	4	0
$F_2 = 5$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5}{2}$
	$X = \frac{11}{2}$	$Y = \frac{8+5\sqrt{2}}{2}$	$Z = \frac{5}{2}$

d'où $R^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{8+5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 65 + 20\sqrt{2}$

par suite, $R = \sqrt{65 + 20\sqrt{2}} = 9{,}658$

La résultante a donc une intensité de 9^k658....

Pour trouver sa direction, cherchons les angles qu'elle fait avec les axes.

On a (n° 39) :

$$\cos a = \frac{X}{R}\ ; \quad \cos b = \frac{Y}{R}\ ; \quad \cos c = \frac{Z}{R}$$

$$\cos a = \frac{11}{2 \times 9{,}658} \qquad a = 55^\circ\, 18'$$

$$\cos b = \frac{15{,}071}{2 \times 9{,}658} \qquad b = 38^\circ\, 44'$$

$$\cos c = \frac{5}{2 \times 9{,}658} \qquad c = 75^\circ$$

Remarque. On aurait pu trouver l'intensité de la résultante en employant la formule de l'exercice 6 :

$$R^2 = F^2 + F_1^2 + F_2^2 + 2FF_1 \cos(F, F_1) + 2FF_2 \cos(F, F_2) + 2F_1 F_2 \cos(F_1, F_2)$$

qui devient $R^2 = 9 + 16 + 25 + 0 + 15 + 20\sqrt{2}$

$$R^2 = 65 + 20\sqrt{2}$$

d'où $R = \sqrt{65 + 20\sqrt{2}}$

$$R = 9^k\, 658$$

Problème 52

Résultante de trois forces: $F = 3^k$, $F_1 = 5^k$, $F_2 = 7^k$ *dont les angles sont* $(F, F_1) = 50^\circ$, $(F, F_2) = 60^\circ$, $(F_1, F_2) = 45^\circ$.

On a immédiatement, en appliquant la formule de l'exercice 6 :

$$R^2 = 9 + 25 + 49 + 30 \cos 50^\circ + 42 \cos 60^\circ + 70 \cos 45^\circ$$

$$R^2 = 83 + 19{,}283 + 21 + 49{,}497$$

$$R = \sqrt{172{,}78}$$

$$R = 13^k\, 141$$

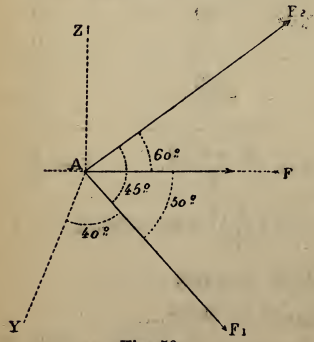


Fig. 50.

Méthode des projections. Pour obtenir la résultante au moyen des projections, on prend pour axe des X l'une des forces, F par exemple ; le plan XAY sera celui des forces F et F_1 ; il faut trouver les angles β et γ de la troisième force F_2, avec les axes Y et Z.

Les forces F_1 et F_2 font un angle de 45° ; on peut appliquer la formule de l'exercice 5 et écrire

$$\cos 45^\circ = \cos 50^\circ \cos 60^\circ + \cos 40^\circ \cos \beta + \cos 90^\circ \cos \gamma$$

Puisque $\cos 90^\circ = 0$, le dernier terme s'annule, et la formule

devient $$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \cos \beta$$

d'où $$\cos \beta = \frac{\sqrt{2} - \cos 50^\circ}{2 \cos 40^\circ}$$

et $$\beta = 59^\circ 46'$$

On obtient l'angle γ de la force F_2 avec l'axe des Z, comme au problème 49, et l'on trouve $\gamma = 45^\circ 12'$

On peut calculer le tableau suivant :

Forces.	Projection sur X.	Projection sur Y.	Projection sur Z.
$F = 3$	$F \cos 0 = 3$	$F \cos 90^\circ = 0$	$F \cos 90^\circ = 0$
$F_1 = 5$	$F_1 \cos 50^\circ = 3{,}214$	$F_1 \cos 40^\circ = 3{,}830$	$F_1 \cos 90^\circ = 0$
$F_2 = 7$	$F_2 \cos 60^\circ = 3{,}5$	$F_2 \cos 59^\circ 46' = 3{,}524$	$F_2 \cos 45^\circ 12' = 4{,}932$
	$X = 9{,}714$	$Y = 7{,}354$	$Z = 4{,}932$

En mettant ces valeurs de X, Y, Z dans la formule

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

on trouve $$R = 13{,}141$$

L'angle de R avec chacun des axes est donné par les formules

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}$$

Rép. $R = 13^k 141$
$a = 42^\circ 22'$
$b = 55^\circ 59'$
$c = 67^\circ 58'$.

Problème 53

Cinq forces de 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k *forment les arêtes d'un angle solide dont toutes les faces ont* 30°. *Calculer leur résultante.*

On pourrait, comme dans le problème précédent, se servir des projections ; il est plus simple d'avoir recours à la formule générale établie dans l'exercice 6 :

$$R^2 = \Sigma F^2 + 2\Sigma F F_1 \cos (F, F_1)$$

Dans la question proposée, les forces sont dirigées suivant les arêtes d'une pyramide pentagonale régulière ; les arêtes adja-

centes font des angles égaux à 30°. Deux arêtes non adjacentes font aussi des angles égaux dont il faut calculer la valeur.

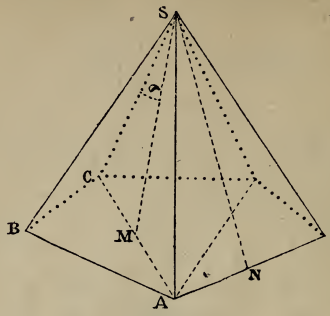


Fig. 51.

Soit σ la moitié de l'angle ASC qu'il faut trouver.

On a, en désignant par a la longueur SA :

$$\sin\sigma = \frac{AM}{AS} = \frac{AM}{a}$$

$$AM = AB \cos BAM = AB \cos 36^\circ$$

$$AB = 2AN = 2 \times a \sin 15^\circ$$

d'où $$AM = 2a \sin 15^\circ \cos 36^\circ$$

et $$\sin\sigma = 2 \sin 15^\circ \cos 36^\circ$$

ce qui donne $$\sigma = 24^\circ\, 45'$$

et $$CSA = 49^\circ\, 30'$$

En mettant ces valeurs dans R^2, on obtient :

$$R^2 = \Sigma F^2 \left.\begin{array}{l} + F\ F_1 \\ + F_1 F_2 \\ + F_2 F_3 \\ + F_3 F_4 \\ + F_4 F \end{array}\right| \begin{array}{l} 2 \cos 30^\circ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l} + F\ F_2 \\ + F\ F_3 \\ + F_1 F_3 \\ + F_1 F_4 \\ + F_2 F_4 \end{array}\right| 2 \cos 49^\circ\, 30'$$

d'où $$R^2 = 55 + 45\sqrt{3} + 40 \times 2 \cos 49^\circ\, 30'$$

par suite, $$R = \sqrt{184{,}898\,250}$$

Rép. $R = 13^k\, 593$.

Problème 54

Halage d'un bateau. 1° *Avec deux forces égales, comment doivent être les cordes pour que le bateau suive l'axe du canal?*

Les manœuvres qui tirent les cordes longent les bords du canal; pour que le bateau suive l'axe, il faut que cet axe se confonde avec la bissectrice de l'angle ABA', et, par suite, que les cordes soient égales.

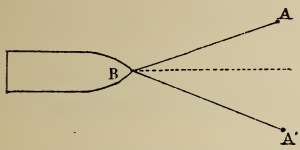


Fig. 52.

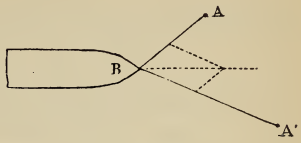


Fig. 53.

2° *Et si les forces étaient inégales?*

Les forces étant inégales, il faut que la plus petite force fasse avec l'axe un angle plus grand que celui de la plus grande; on voit (fig. 53) que, pour cela, les longueurs des cordes doivent être dans le même rapport que les forces qui leur sont appliquées; on suppose que les manœuvres marchent à égale distance des bords du canal.

3° *Conditions pour que deux forces données obtiennent le maximum d'effet.*

La résultante sera d'autant plus grande, que l'angle des forces sera plus petit.

Il faudra donc que les cordes soient aussi longues que possible, pourvu que ces cordes puissent être suffisamment tendues pour ne pas frotter sur les bords du canal.

Problème 55

Expliquer la suspension des cerfs-volants sous l'action du vent et de la traction de la corde.

Soit le cerf-volant AA' sur lequel agissent : le vent, dont la direction et l'intensité sont représentées par GV ; la corde, qui tire dans le sens GT, avec une intensité GT, et *p* le poids de l'appareil.

Supposons ces trois forces appliquées au point G, centre de gravité du cerf-volant.

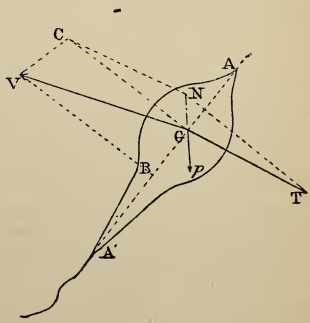


Fig. 54.

On peut décomposer V en deux forces : l'une, GB, dirigée suivant la surface, et qui ne produit pas d'effet ; l'autre, GC, perpendiculaire à GB.

Cette force GC, combinée avec la traction GT, donnera une résultante GN.

Si GN est verticale et égale à p, le cerf-volant sera en équilibre.

Si GN n'est pas verticale, on cherche sa composante verticale, et le cerf-volant monte ou descend suivant que cette composante est plus grande ou plus petite que p.

Remarque. Près du sol, le vent, brisé par des obstacles, a ordinairement une vitesse beaucoup plus faible que dans les régions élevées; aussi, pour lancer un cerf-volant, a-t-on soin de le tirer, en courant en sens contraire de la direction du vent.

Problème 56

Faire voir qu'en orientant convenablement la voile, on peut, sous l'action d'un vent de direction donnée, faire prendre à un bateau des directions presque en sens contraire.

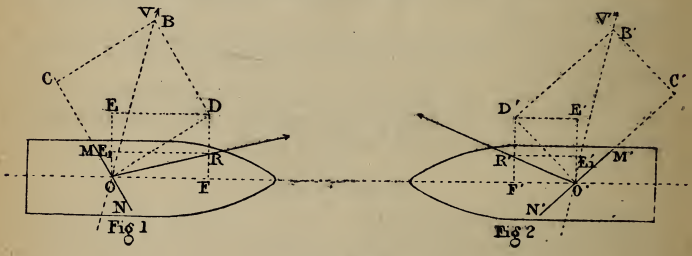


Fig. 55.

Supposons OV (fig. 1) la direction du vent dont l'action sur la voile MN est ramenée à une force d'intensité OB.

Cette force OB donne, suivant la direction de la voile, une composante OC qui ne produit point d'effet, et une seconde composante OD normale à la voile. La composante OD peut se décomposer en deux forces rectangulaires OE, OF ; la force OE tend à déplacer le bateau dans le sens OE, cette force est considérablement diminuée par la grande résistance que l'eau oppose à ce mouvement, à cause de la forme du navire ; supposons cette force réduite à OE_1 ; en la composant avec OF, on trouve OR pour la direction que prend le bateau.

Le déplacement OE se nomme *dérive*.

En raisonnant de même sur la figure 2, on voit que le bateau se place suivant O'R', direction sensiblement opposée à la première.

On ne lira pas sans intérêt la note suivante qui donne des détails plus précis sur la question qui nous occupe.

Note. *Faire voir qu'en orientant convenablement la voile, on peut, sous l'action d'un vent donné, faire prendre à un bateau des directions opposées l'une à l'autre, et même le faire avancer contre le vent.*

Orientation de la voile sur le navire. Les voiles sont soutenues verticalement contre les mâts par les vergues, et on les oriente avec des cordes appelées amures, qui sont fixées aux angles des toiles et que l'on attache aux murs du navire du côté d'où vient le vent ; on dit que le navire vogue *tribord amures*, *bâbord amures* ou *amures arrière*, suivant que les amures sont attachées à tribord (droite), à bâbord (gauche) ou à l'arrière.

Action du vent sur la voile. Supposons au navire une seule voile, et réduisons-la, pour plus de simplicité, à une surface plane AB.

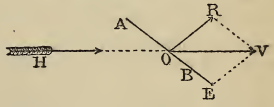


Fig. 56.

Le vent, agissant sur elle dans une direction quelconque HO, y développe une force V que l'on peut supposer appliquée au centre de la voile et qui se décompose en deux autres : l'une OE, dirigée suivant le plan de la voile, ne produit point d'effet ; l'autre, perpendiculaire à ce plan, tend à faire mouvoir dans sa direction OR le vaisseau auquel elle se communique par l'intermédiaire des mâts.

On voit immédiatement que :

1° *Si* OV *est perpendiculaire à* AB, OE = 0 et OR = OV ; le vent produit alors sur la voile son maximum d'effet.

2° *Si* OV *est oblique sur* AB, l'action du vent sur la voile est d'autant plus faible que cette obliquité est plus grande : quand celle-ci augmente, OR diminue tandis que OB augmente.

3° *Si* OV *est dans le plan de* AB, OE = OV et OR = 0 ; le vent ne produit sur la voile aucun effet.

Il faut remarquer que la composante propulsive R, développée par le vent, est toujours perpendiculaire au plan de la voile.

Différentes directions que l'on peut faire prendre à un vaisseau sous l'action d'un même vent, par l'orientation de la voile.

(Nous laissons de côté beaucoup de causes importantes dans la pratique, mais dont il est difficile de tenir compte.)

Supposons les amures à l'arrière. Alors, quel que soit l'angle du vent avec la voile, la force propulsive sera dirigée suivant la quille du navire que l'on devra maintenir, au moyen du gouvernail, dans la direction de la route.

(Le gouvernail a pour effet de déterminer les mouvements de rotation du vaisseau autour de son axe vertical.)

Angles du vent avec la route :

1° HOR = 180° ; *le vent souffle dans la direction de la route.* On obtient alors le maximum de vitesse pour le vent donné : R = V ; cette allure du vaisseau s'appelle *vent arrière.*

2° HOR *diminue de* 180° *à* 135°; R diminue de V à $\frac{V\sqrt{2}}{2}$. Quand l'angle égale 150°, le vaisseau a l'allure du *grand largue;* il a encore une assez grande vitesse.

3° HOR *diminue au delà de* 135°; R diminue très rapidement et se trouve bientôt insuffisante pour vaincre la résistance de l'eau et faire avancer le navire.

4° HOR = 90°, R = 0; si l'on ne tient pas compte de l'action du vent sur le flanc du navire, celui-ci est immobile; on dit qu'il est *à la cape.* On le met dans cette position pour rester dans le parage où l'on est, par exemple quand la mer est mauvaise ou que l'on craint les récifs pendant la nuit, sur une mer inconnue.

5° HOR *est plus petit que* 90°; R devient négatif, c'est-à-dire que cette force est dirigée vers l'arrière; elle fait culer le navire.

Remarque. D'une manière générale, quand l'angle HOR est trop petit et que la composante R est trop faible pour donner une vitesse suffisante au vaisseau, on dit que le vent *refuse;* au contraire, on dit qu'il *adonne*, quand HOR étant plus grand, R donne une propulsion suffisante.

Quand l'angle HOR est trop petit pour que l'on obtienne une propulsion suffisante avec les amures à l'arrière, on met celles-ci à bâbord ou à tribord, suivant le cas, en choisissant la position qui donne le meilleur résultat.

Supposons donc que l'on mette les amures à tribord ou à bâbord. Alors la composante utile R n'est plus dirigée suivant la route; mais on peut toujours la supposer décomposée en deux forces perpendiculaires, dont l'une, F, est dirigée suivant la route.

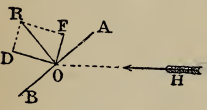


Fig. 57.

Cette force est d'autant plus grande que ROF est plus petit; elle est nulle pour ROF = 90°, mais elle existe pour un angle très petit *i*.

L'autre force D, perpendiculaire à F, tend à faire avancer le navire perpendiculairement à sa route. Le mouvement résultant s'opérerait suivant OR, si l'on ne tenait pas compte de la résistance de l'eau: l'angle ROF de la route du navire avec le chemin qu'il parcourt se nomme *angle de dérive.* Dans la pratique, il est singulièrement diminué.

Au moyen du gouvernail on dirige la quille du navire suivant OF, le cap en route (la proue du côté où l'on veut aller).

Il faut remarquer que la résistance de l'eau est toujours directement opposée à la force propulsive, et proportionnelle à la plus grande section du navire, faite perpendiculairement à la direction de cette résultante.

On voit alors que l'eau n'offrant que peu de résistance à la proue, la force OF aura presque tout son effet, tandis que la résistance au flanc étant beaucoup

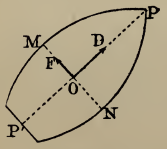


Fig. 58.

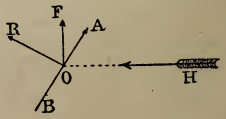


Fig. 59.

plus grande, à cause de la forme du navire, OD sera considérablement diminuée.

De sorte que la résultante des nouvelles forces OF′ et OD′ fera avec OF un angle beaucoup moindre que ROF.

Quand on combine les choses de manière que HOF = 90°, le vaisseau a l'allure du *largue*.

Nous savons que R est d'autant plus grand que AOH est plus grand, qu'elle devient nulle pour AOH = 0, mais qu'elle existe pour un angle très petit, par exemple E. Nous avons vu qu'en même temps F n'est pas nulle pour AOF très petit = i. Si, dans ce cas, nous appelons d l'angle de dérive diminué comme nous venons de le dire, l'angle que fait la direction du vent avec la direction du chemin parcouru sera

$$E + i + d$$

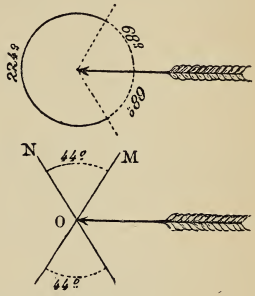


Fig. 60.

La pratique montre que l'on peut avancer encore sensiblement quand cet angle = 68° environ. Quand il en est ainsi, on dit que le vaisseau vogue au plus près du vent, ou tout simplement *au plus près*.

On peut avancer au plus près du même vent bâbord amures et tribord amures, et par conséquent on peut faire route vers tous les points de la boussole, excepté vers ceux qui sont à moins de 68° de part et d'autre de la direction du vent, c'est-à-dire dans toutes les directions comprises dans plus de 220°.

On voit tout d'abord que l'on peut avancer dans toutes les directions opposées l'une à l'autre et comprises dans un angle MON de plus de 40°.

Mais on peut aussi avancer contre le vent. Pour cela on est obligé de louvoyer, c'est-à-dire de courir des bordées HI, IJ, JK....., de part et d'autre de la direction du vent.

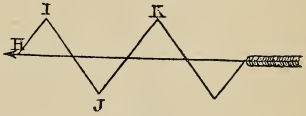


Fig. 61.

Ainsi, après avoir couru la bordée HI, en gouvernant au plus près, tribord amures, on vire de bord et l'on gouverne au plus près, bâbord amures, pour courir la bordée IJ, etc. etc.

Centre de gravité.

Problème 57

Trois lignes que nous supposons pesantes sont assemblées de manière à former un triangle. Leurs longueurs sont entre elles comme 4, 5, 6. On propose de dire comment, avec la règle et le compas, on peut déterminer le centre de gravité. (Douai, Dipl. Ens. sp.)

Soit ABC le triangle donné ; on sait (M., n° 72) que le centre

de gravité de son périmètre se trouve au point de concours des

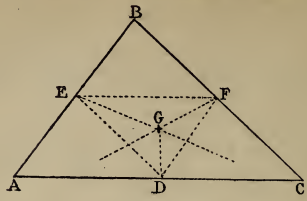


Fig. 62.

bissectrices du triangle DEF. En traçant EG et FG, deux de ces bissectrices, on trouve le point G cherché.

Problème 58

Centre de gravité :

1° *Du périmètre d'un parallélogramme* (fig. 63).

La résultante des poids des côtés AB, CD, se trouve au milieu G de EF ; ce point G est aussi au milieu de HI. C'est donc le centre de gravité cherché.

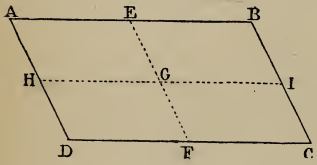


Fig. 63.

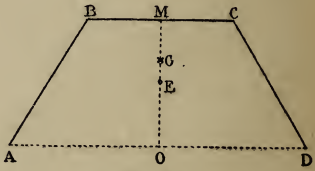


Fig. 64.

2° *Du périmètre d'un demi-hexagone régulier* (fig. 64).

On mène OM qui joint les milieux des bases ; les côtés AB et CD ont leur résultante en E, milieu de OM ; le côté BC a son centre de gravité en M.

Si l'on prend pour unité de force le poids d'un côté de l'hexagone, en M sera appliqué un poids 1, en E un poids 2, et au point G, centre de gravité cherché, un poids 3.

En désignant OG par x, et OM par h, on doit avoir (n° 62)

$$3x = 1 \times h + 2 \times \frac{h}{2} = 2h$$

Rép. $x = \frac{2}{3} h.$

3° *Du périmètre d'un demi-octogone régulier.*

Les côtés AB et DE ont leur résultante en M, celle des côtés BC et CD est en N.

En prenant les moments par rapport au point O, on a

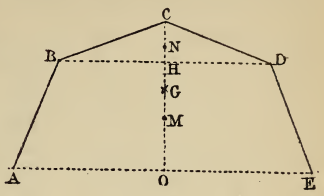


Fig. 65.

$$4 \times OG = 2 \times OM + 2 \times ON$$

$$\text{Or } OM = \frac{OH}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{4}$$

$$ON = OH + \frac{CH}{2}$$

$$CH = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{2})}{2}$$

$$ON = \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R(2-\sqrt{2})}{4} = \frac{R(2+\sqrt{2})}{4}$$

d'où $$4 \times OG = \frac{R\sqrt{2}}{2} + \frac{R(2+\sqrt{2})}{2} = R(1+\sqrt{2})$$

Rép. $OG = \frac{R(1+\sqrt{2})}{4}$

4° *Du périmètre du trapèze obtenu en joignant les milieux de deux côtés d'un triangle équilatéral.*

Ce trapèze est un demi-hexagone régulier.

En désignant MN par h, on a, en prenant les moments par rapport au point M,

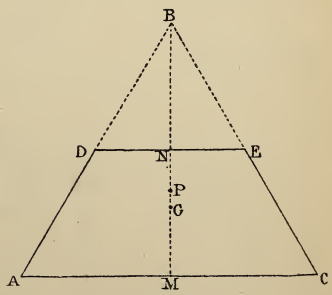


Fig. 66.

$$5MG = 2 \times MP + 1 \times MN$$

$$5MG = 2 \times \frac{h}{2} + h$$

Rép. $MG = \frac{2h}{5}$.

Problème 59

Centre de gravité des surfaces suivantes :

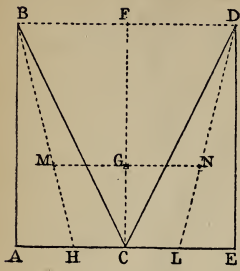


Fig. 67.

Figure 67. Les triangles égaux BAC, DEC ont leur centre de gravité en M et N. Le point cherché est en G, au milieu de MN, ou encore au tiers de CF à partir de la base AE. En désignant par a le côté du carré, on a

$$\textbf{Rép.} \quad CG = \frac{1}{3} a.$$

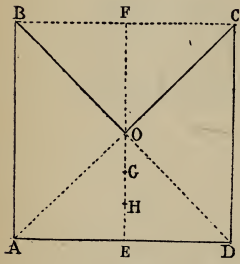


Fig. 68.

Figure 68. Le centre de gravité de la figure se trouve sur EF, axe de symétrie. Cette figure se compose de trois triangles égaux. Les triangles AOB, DOC donnent un poids $2p$, appliqué en O ; en H se trouve p. Le centre de gravité cherché est en G, de manière que l'on ait

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$$

Donc $$OG = \frac{1}{3} OH$$

mais $$OH = \frac{2}{3} OE = \frac{a}{3}$$

$$\textbf{Rép.} \quad OG = \frac{1}{9} a.$$

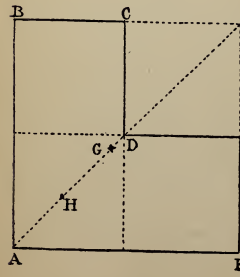


Fig. 69.

Figure 69. En désignant par p le poids de l'un des petits carrés, au point D est appliquée une force $2p$ et en H une force p. On a

$$GD = {}^1/_3\, DH = {}^1/_3 \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\textbf{Rép.} \quad GD = \frac{a\sqrt{2}}{12}.$$

Figure 70. Le centre de gravité se trouve sur l'axe de symétrie AF.

Les points C et D étant des milieux des côtés BF et EF, le triangle CFD est $^1/_8$ du carré, soit p son poids. Le point O peut être regardé comme le point d'application d'une force de $7p$ appliquée en G, et d'une force p appliquée en H, centre de gravité du triangle CDF.

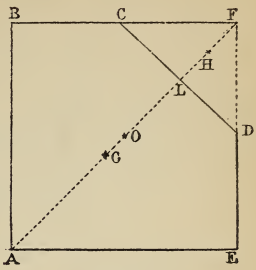


Fig. 70.

On a donc $\frac{OG}{OH} = \frac{1}{7}$

d'où $OG = \frac{OH}{7}$

or $OH = OF - FH$

$$OF = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad FH = {}^2/_3\, FL = {}^2/_3\, \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

par suite, $OH = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Rép. $OG = \frac{a\sqrt{2}}{21}$.

Figure 71. La figure se compose des triangles ABC et ACD ; le triangle ACD est double de ABC.

Le point G partage donc la droite MN qui joint les centres de gravité des triangles, de manière que l'on ait

Rép. $\frac{GM}{GN} = \frac{1}{2}$.

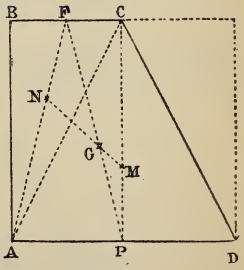


Fig. 71.

Remarque. La figure ABCD est un trapèze ; en lui appliquant la formule (M., nº 77),

on obtient $\frac{x}{y} = \frac{B + 2b}{2B + b}$

Rép. $\frac{GP}{GF} = \frac{4}{5}$, résultat qui concorde avec le précédent.

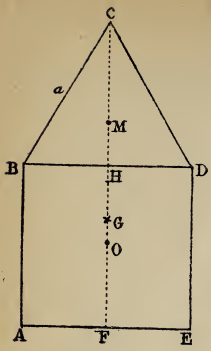


Fig. 72.

Figure 72. La surface du carré est a^2.

Celle du triangle équilatéral, $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

On doit avoir

$$\frac{OG}{GM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

par suite, $$\frac{OG}{OG + GM} = \frac{\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$$

d'où $$OG = OM \times \frac{\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$$

Mais $$OM = OH + HM$$

$$OH = \frac{a}{2}, \quad HM = \frac{HC}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

d'où $$OM = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a(3 + \sqrt{3})}{6}$$

par suite,

$$OG = \frac{a(3 + \sqrt{3})}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} = \frac{a(1 + \sqrt{3})}{2(4 + \sqrt{3})}$$

En multipliant les deux termes par $(4 - \sqrt{3})$, pour rendre le dénominateur rationnel, on obtient :

Rép. $$OG = \frac{a(1 + 3\sqrt{3})}{26}.$$

Figure 73. Désignons par a la base BC, par h la hauteur AD et par h' la hauteur ED.

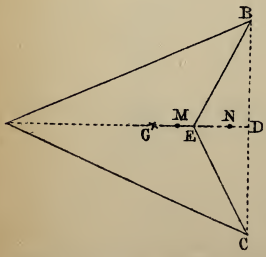


Fig. 73.

Soit M le centre de gravité du triangle ABC, N celui du triangle BEC et G celui que l'on cherche.

Le point M peut être regardé comme le point d'application de la résultante des forces appliquées en G et en N ; on doit donc avoir

$$\frac{MG}{MN} = \frac{ah'}{a(h - h')} = \frac{h'}{h - h'}$$

d'où $$MG = MN \times \frac{h'}{h - h'}$$

Or $$MN = MD - ND = \frac{h}{3} - \frac{h'}{3} = \frac{h - h'}{3}$$

Donc $$MG = \frac{h - h'}{3} \times \frac{h'}{h - h'} = \frac{h'}{3}$$

Rép. $MG = \frac{h'}{3}$.

Figure 74. Dans ce cas, G est la résultante des forces M et N ;

on a donc $$\frac{GM}{GN} = \frac{N}{M} = \frac{ah'}{ah} = \frac{h'}{h}$$

par suite, $\frac{GM}{MN} = \frac{h'}{h + h'}$

d'où $GM = MN \times \frac{h'}{h + h'}$

Or $MN = \frac{h + h'}{3}$

Donc

$$GM = \frac{h + h'}{3} \times \frac{h'}{h + h'} = \frac{h'}{3}$$

Rép. $GM = \frac{h'}{3}$.

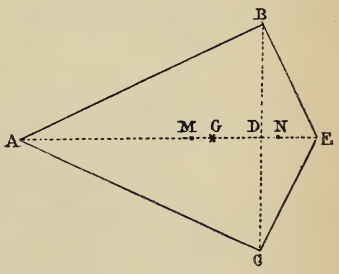


Fig. 74.

Remarque. Le point G est à la même distance de M que dans le problème précédent, mais en sens contraire.

Figure 75. La figure se compose de deux losanges égaux dont les centres de gravité sont en M et en N; le centre cherché est en G, au milieu de MN.

Mais $OG = \frac{OH}{2} = \frac{a}{4}$

Rép. $OG = \frac{a}{4}$.

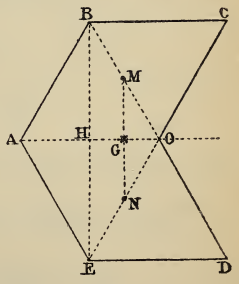


Fig. 75.

Figure 76. Le trapèze est un demi-hexagone régulier. On peut en trouver le centre de gravité par la méthode ordinaire (M., n° 78).

On peut encore remarquer qu'il se compose de trois triangles égaux.

Les triangles ABO et OCD ont leur résultante en M au tiers de OE, le triangle OBC a son centre de gravité en N.

On doit donc avoir $\frac{GM}{GN} = \frac{1}{2}$

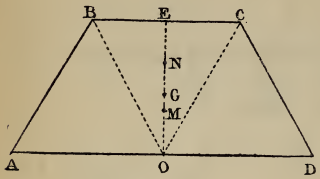


Fig. 76.

ou $\frac{GM}{MN} = \frac{1}{3}$

Mais $MN = \frac{h}{3}$

d'où $GM = \frac{h}{9}$

et $GO = \frac{h}{9} + \frac{h}{3}$

Rép. $GO = \frac{4h}{9}$.

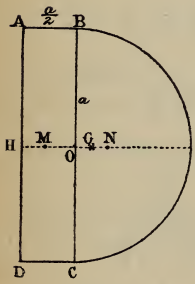


Fig. 77.

Figure 77. En prenant les moments par rapport au point H, on écrit :

$$G \times HG = M \times HM + N \times HN \quad (1)$$

Or $M = a^2$; $N = \frac{\pi a^2}{2}$

par suite, $G = a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{a^2(2+\pi)}{2}$

On a aussi $HM = \frac{a}{4}$

et $HN = \frac{a}{2} + \frac{4a}{3\pi} = \frac{a(8+3\pi)}{6\pi}$ (n° 82).

En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{a^2(2+\pi)}{2} \times HG = \frac{a^3}{4} + \frac{a^3(8+3\pi)}{12} = \frac{(a^3\,11+3\pi)}{12}$$

d'où $$HG = \frac{a^3(11+3\pi)}{6a^2(2+\pi)} = \frac{a(11+3\pi)}{6(2+\pi)}$$

En retranchant $\frac{a}{2}$ à HG, on obtient :

Rép. $OG = \frac{5a}{6(2+\pi)}$.

Figure 78. On a trouvé (M., nº 82), pour le secteur, la formule

$$OG = {}^2/_3 \frac{\text{rayon} \times \text{corde}}{\text{arc}}$$

qui devient, dans ce cas,

$$OG = {}^2/_3 \frac{a \times a\sqrt{2}}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}$$

Rép. $OG = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi} = a \times 0{,}6...$

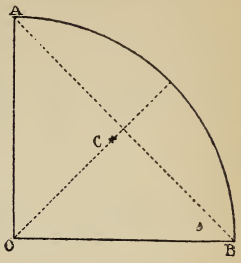


Fig. 78.

Figure 79. Le poids M du carré est la somme du poids N du secteur et du poids G de la surface, dont on cherche le centre de gravité.

En prenant les moments par rapport au point O, on a

$$M \times OM = N \times ON + G \times OG \quad (1)$$

Or $M = a^2$; $N = \frac{\pi a^2}{4}$

d'où $G = a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{a^2(4-\pi)}{4}$

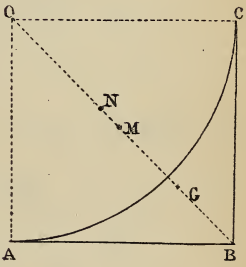


Fig. 79.

On a encore $OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $ON = \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi}$

En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient :

$$a^2 \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2}{4} \times \frac{4a\sqrt{2}}{3\pi} + \frac{a^2(4-\pi)}{4} \times OG$$

d'où l'on tire $\frac{a^2(4-\pi)}{4} \times OG = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Rép. $OG = \frac{2a\sqrt{2}}{3(4-\pi)} = a \times 1{,}09...$

Figure 80. En désignant par S la surface du demi-cercle, et

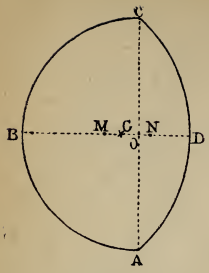


Fig. 80.

par D la distance de son centre de gravité M au point O, par s la surface du segment CDA, et par d la distance de son centre de gravité N au point O, par x la distance OG, on a, en prenant les moments par rapport au point O,

$$(S+s)\,x = S\,.\,D - sd$$

d'où
$$x = \frac{S\,.\,D - sd}{S+s} \qquad (1)$$

Figure 81. En employant les mêmes notations que pour la figure précédente, on a, en écrivant que le moment de M est la somme des moments de N et de G,

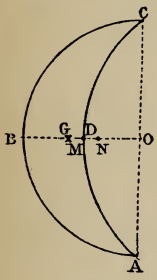


Fig. 81.

$$S\,.\,D = (S-s)\,x + sd$$

d'où
$$x_1 = \frac{S\,.\,D - sd}{S-s} \qquad (2)$$

Application. Supposons que le segment CDA soit de 120°.

On sait qu'alors la flèche OD est la moitié du rayon de l'arc CDA et que la corde AC égale ce rayon multiplié par $\sqrt{3}$.

En désignant la flèche OD par b, la corde AC par $2a$, et le rayon de l'arc ADC par r, on a

$$b = \frac{r}{2} \qquad 2a = r\sqrt{3}$$

d'où
$$r = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

et
$$b = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

On peut alors calculer s, surface du segment, et l'on trouve

$$s = \frac{a^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{9}$$

Pour obtenir d, on cherche d'abord la distance du centre de l'arc au centre de gravité du segment, *en divisant le cube de*

la corde par 12 *fois la surface du segment* (M., Exercice 29), ce qui donne $\frac{6a}{4\pi - 3\sqrt{3}}$

On en retranche $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, et l'on obtient

$$d = \frac{a(27 - 4\pi\sqrt{3})}{3(4\pi - 3\sqrt{3})}$$

On sait que $S = \frac{\pi a^2}{2}$ et $D = \frac{4a}{3\pi}$.

En mettant ces valeurs dans les formules (1) et (2), on trouve

$$x = \frac{2a(4\pi\sqrt{3} - 9)}{3(17\pi - 6\sqrt{3})} = a \times 0{,}196$$

et

$$x_1 = \frac{2a(4\pi\sqrt{3} - 9)}{3(\pi + 6\sqrt{3})} = a \times 0{,}624$$

Il serait facile de faire des calculs analogues en faisant

$b = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$, le segment est alors de 90°

$b = \frac{a(2 - \sqrt{3})}{2}$, « « 60°

Figure 82. Le centre de gravité du secteur AOB est en M, à une distance OM que nous avons trouvée ci-dessus (fig. 78).

Celui du demi-cercle ADO est en N (M., n° 82).

Le poids M est la somme des poids N et G.

Or le demi-cercle est la moitié du secteur, la surface restante est l'autre moitié, le poids G est donc égal à N, la distance MG est égale à MN.

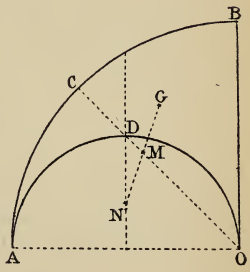


Fig. 82.

Figure 83. Puisque OD égale le diamètre AB, la surface de la demi-ellipse est double de la surface du demi-cercle (G., n° 637), la surface restante est donc égale à celle du demi-cercle.

Désignons par N le centre de gravité du demi-cercle et par M celui de la demi-ellipse.

On a (M., n° 82) $ON = \frac{4a}{3\pi}$

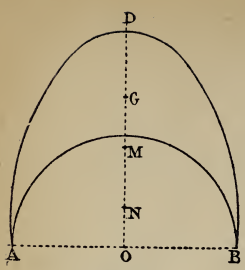


Fig. 83.

Pour trouver OM, nous appliquerons le théorème de Guldin (G., nº 904) qui donne

$$\text{Surf. ADB} \times 2\pi \times \text{OM} = \text{vol. ADB}$$

d'où $\text{OM} = \dfrac{\text{vol. ADB}}{2\pi \times \text{surf. ADB}}$

Or $\text{vol. ADB} = \dfrac{16}{3}\pi a^3$ (G., nº 918)

et $\text{surf. ADB} = \pi a^2$

Donc $\text{OM} = \dfrac{{}^{16}/_{3}\,\pi a^3}{2\pi^2 a^2} = \dfrac{8a}{3}$

Quand on a OM, il suffit de porter MN en MG pour trouver le point demandé.

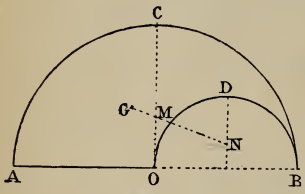


Fig. 84.

Figure 84. On détermine les points M et N centres de gravité des demi-cercles, le petit demi-cercle étant $^1/_4$ du grand, on a $G = 3N$.

Il faut donc joindre MN et prolonger cette droite de $MG = \dfrac{MN}{3}$, on obtient ainsi le point cherché.

Problème 60

Étant donné un carré ABCD, *on demande de trouver dans l'intérieur de ce carré un point* M *tel qu'en retranchant la partie* AMD, *le point* M *soit le centre de gravité de la partie restante.*

Soit M le point cherché, O le centre du carré, N le centre de gravité du triangle enlevé. Le poids O est la somme des poids M et N ; en prenant les moments par rapport au point E,

on a $$O \times EO = M \times EM + N \times EN \qquad (1)$$

Faisons $$EM = x$$

on a $$EO = \frac{a}{2}, \quad EN = \frac{x}{3}$$

L'équation (1) devient

$$a^2 \times \frac{a}{2} = \left(a^2 - \frac{ax}{2}\right) x + \frac{ax}{2} \times \frac{x}{3}$$

et après réduction

$$2x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$$

d'où $$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 6a^2}}{2}$$

$$x = \frac{a(3 \pm \sqrt{3})}{2}$$

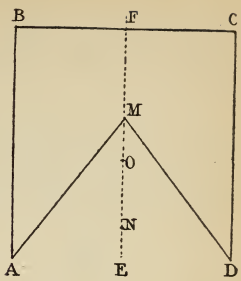


Fig. 85.

La valeur positive du radical, rendant x plus grand que a, doit être rejetée ; il reste donc

Rép. $x = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{2} = a \times 0{,}634...$

Problème supplémentaire.

Sur la médiane d'un triangle ABC, *trouver un point* M *tel qu'en retranchant la partie* AMC, *le point* M *soit le centre de gravité de la partie restante.*

Comme ci-dessus, on a

$$O \times DO = M \times DM + N \times DN \quad (1)$$

Les surfaces des triangles ABC et AMC sont dans le même rapport que leurs hauteurs ou que leurs médianes.

On peut donc écrire, en désignant AC par b, DB par m et DM par x :

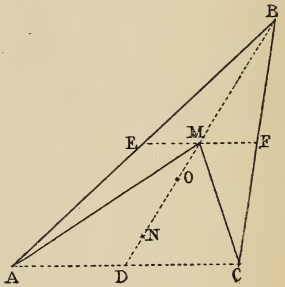


Fig. 86.

$$bm \times \frac{m}{3} = b(m - x) \times x + bx \times \frac{x}{3}$$

qui devient $$2x^2 - 3mx + m^2 = 0$$

d'où $$x = \frac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 8m^2}}{4}$$

par suite, $$x = \frac{m(3 \pm 1)}{4}$$

La première solution ne convient pas à la question, il reste :

Rép. $x = \frac{m}{2}$.

Cette solution est facile à vérifier, car alors les médianes des triangles BMA et BMC sont égales et en ligne droite, et ces triangles ont même surface.

Problème 61

Dans une pyramide droite, à base d'hexagone régulier, les aires de la base et de la surface latérale sont de 450 *et* 675 *centimètres carrés. On considère ces surfaces indépendamment du volume de la pyramide, et on les suppose uniformément pesantes dans toutes leurs parties. On propose de déterminer le centre de gravité de ces deux surfaces réunies.* (Douai, Dipl. Ens. sp., 1878.)

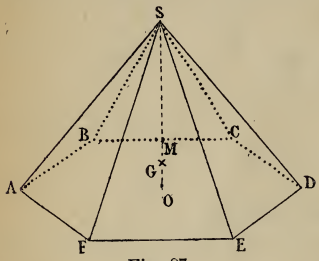


Fig. 87.

Les faces, étant égales et symétriquement placées par rapport à l'axe, donnent une résultante en M, au $^1/_3$ de la hauteur SO.

La base a son centre de gravité en O.

Il faut composer les forces M et O ; on aura, G étant le point d'application de leur résultante,

$$\frac{MG}{GO} = \frac{O}{M} = \frac{450}{675} = \frac{2}{3}$$

d'où $$GO = \frac{3}{5} OM = \frac{3}{5} \times \frac{h}{3}$$

Rép. $GO = \frac{h}{5}$.

Problème 62

Déterminer le centre de gravité de la surface convexe d'un tronc de cône, et celui de sa surface totale.

1° *Surface convexe.*

Soient R, r, h, les rayons et la hauteur du tronc de cône ; faisons $SC = H$, $SD = h'$, $SA = L$, $SB = l'$, $BA = l$.

La surface convexe du cône SAC a son centre de gravité en M au tiers de SC, $CM = \frac{H}{3}$.

Celle du cône SBD est en N, $DN = \frac{h'}{3}$.

Soit O le centre de gravité cherché.

En prenant les moments, par rapport au plan de la base AC, le poids M du cône total peut être regardé comme la somme des poids O et N du tronc de cône et du petit cône ; on a

$$M \times CM = O \times CO + N \times CN$$

d'où

$$O \times CO = M \times CM - N \times CN \quad (1)$$

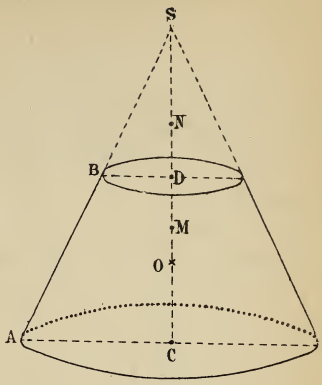


Fig. 88.

Évaluons les quantités qui entrent dans l'équation (1)

$$O = \pi(R + r)l, \quad CO = x$$

$$M = \pi RL, \qquad CM = \frac{H}{3}$$

$$N = \pi r l', \qquad CN = h + \frac{h'}{3}$$

Mais à cause des triangles semblables SCA et SDB, on a :

$$L = \frac{Rl}{R - r}, \qquad H = \frac{Rh}{R - r}$$

$$l' = \frac{rl}{R - r}, \qquad h' = \frac{rh}{R - r}$$

d'où

$$M = \frac{\pi R^2 l}{R - r}, \qquad CM = \frac{Rh}{3(R - r)}$$

$$N = \frac{\pi r^2 l}{R - r}, \qquad CN = h + \frac{rh}{3(R - r)} = \frac{(3R - 2r)h}{3(R - r)}$$

En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$\pi(R + r)l \times x = \frac{\pi R^2 l}{R - r} \times \frac{Rh}{3(R - r)} - \frac{\pi r^2 l}{R - r} \times \frac{(3R - 2r)h}{3(R - r)}$$

qui devient $(R + r)x = \frac{h}{3} \times \frac{R^3 - 3Rr^2 + 2r^3}{(R - r)^2}$

Mais $$\frac{R^3 - 3Rr^2 + 2r^3}{(R - r)^2} = R + 2r$$

Rép. $x = \frac{h}{3} \times \frac{R + 2r}{R + r}$.

Remarque. Si l'on fait dans cette formule $r = 0$, le tronc

de cône devient un cône, on trouve $x = \frac{h}{3}$, ce qui vérifie la formule.

Si l'on fait, au contraire, $R = 0$, on trouve $x = \frac{2h}{3}$; c'est qu'en effet le cône est appuyé sur sa pointe, et le centre de gravité est à une distance du sommet égale aux $^2/_3$ de la hauteur.

Si l'on fait $r = R$, le tronc de cône devient un cylindre, la formule donne $x = \frac{h}{2}$

2e Méthode. On arrive plus simplement au même résultat de la manière suivante.

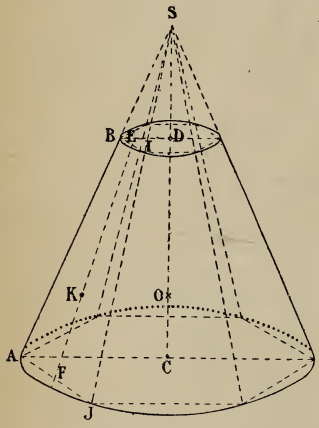


Fig. 89.

Supposons, inscrite dans le cône, une pyramide régulière de $2n$ faces.

La face BIAJ est un trapèze dont le centre de gravité est au point K, donné par la relation (M., nº 77)

$$\frac{KF}{KE} = \frac{2BI + AJ}{BI + 2AJ}$$

Mais on sait que $\frac{BI}{AJ} = \frac{r}{R}$;

donc $\frac{2BI + AJ}{BI + 2AJ} = \frac{2r + R}{r + 2R}$

Et, en appliquant une propriété des proportions,

$$\frac{KF}{EF} = \frac{2r + R}{3(R + r)}$$

Il en serait de même pour toutes les autres faces. La résultante de toutes les forces K est appliquée au point O qui divise la hauteur comme K divise EF ;

par suite, $CO = \frac{h(R + 2r)}{3(R + r)}$

valeur obtenue plus haut.

2º *Surface totale.*

Pour trouver la position du point G, centre de gravité de la surface totale, prenons les moments par rapport au plan de la base AC, le moment de C étant nul.

On a l'équation $G \times CG = O \times CO + D \times CD$ (1)

Mais $O = \pi (R + r) l$, $CO = \frac{h(R + 2r)}{3(R + r)}$

$D = \pi r^2$, $CD = h$

$G = \pi (R + r) l + \pi r^2 + \pi R^2$, $CG = x$

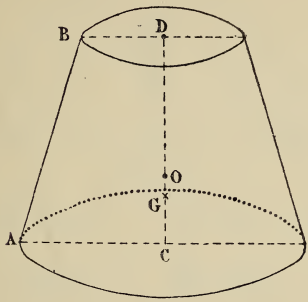


Fig. 90.

En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$\pi \left[(R + r) l + R^2 + r^2 \right] \times x = \frac{\pi (R + r)(R + 2r) lh}{3(R + r)} + \pi r^2 h$$

qui donne

Rép. $x = \frac{h}{3} \times \frac{(R + 2r) l + 3r^2}{(R + r) l + R^2 + r^2}$.

Remarque. Si l'on fait $r = 0$, on obtient $x = \frac{h}{3} \times \frac{l}{R + l}$ qui correspond en effet au centre de gravité de la surface totale d'un cône.

Si, de plus, le cône est équilatéral, on a $l = 2R$, et la formule donne

$$x = \frac{2h}{9}$$

Dans ce cas, en effet, la surface convexe est double de celle de la base.

Si $r = R$, on trouve $x = \frac{h}{2}$; c'est qu'alors le tronc de cône devient un cylindre.

Problème supplémentaire.

Centre d'une demi-couronne circulaire.

Soit M le centre de gravité du demi-cercle de rayon R, N celui du demi-cercle de rayon r.

En prenant les moments, par rapport au plan mené par AB perpendiculairement à OC, on a

$$G \times OG = M \times OM - N \times ON \qquad (1)$$

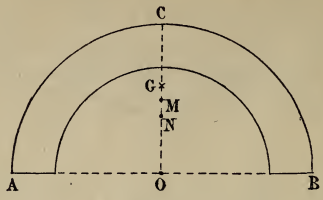


Fig. 91.

Or $M = \frac{\pi R}{2}$; $N = \frac{\pi r^2}{2}$; $G = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{2}$

$OM = \frac{4R}{3\pi}$; $ON = \frac{4r}{3\pi}$ (M., n° 82).

En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$OG = \frac{\frac{2}{3}(R^3 - r^3)}{\frac{\pi}{2}(R^2 - r^2)}$$

Rép. $OG = \frac{4}{3\pi} \times \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}$.

Remarques. Si, dans cette formule, on fait

I. $r = 0$, on obtient $OG = \frac{4R}{3\pi}$.

La couronne devient alors un demi-cercle de rayon R, et la valeur trouvée est bien celle du centre de gravité d'un demi-cercle.

II. Si $r = R$, on obtient $OG = \frac{2R}{\pi}$, formule du centre de gravité de la demi-circonférence.

Problème supplémentaire.

Centre de gravité d'un hémisphère creux.

La figure représente une section contenant l'axe de cet hémisphère. Soit M le centre de gravité de la sphère de rayon R, N celui de la sphère de rayon r et G le centre cherché.

En appliquant le théorème des moments, on a, comme au problème précédent :

$$G \times OG = M \times OM - N \times ON$$

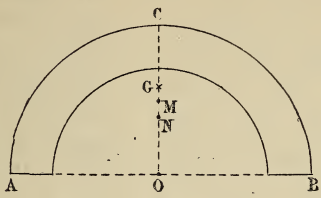


Fig. 92.

Or $$M = \frac{2}{3}\pi R^3 ; \qquad N = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$OM = \frac{3}{8} R ; \qquad ON = \frac{3}{8} r$$

et $$G = \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

d'où $$OG = \frac{\frac{1}{4}\pi (R^4 - r^4)}{\frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)} = \frac{3}{8} \times \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$$

Rép. $$OG = \frac{3}{8} \times \frac{(R + r)(R^2 + r^2)}{R^2 + Rr + r^2} .$$

Remarques. Si, dans cette formule, on fait

I. $r = 0$, on obtient $OG = \frac{3}{8} R$, centre de gravité d'un hémisphère.

II. $r = R$, on obtient $OG = \frac{1}{2} R$, centre de gravité de la surface d'un hémisphère.

III. $r = -R$, on obtient $OG = \frac{(R - R)(R^2 + R^2)}{R^2} = 0.$

On a alors une sphère de rayon R, et la distance du centre de figure au centre de gravité est nulle.

Problème 63

Une borne a la forme d'un paraboloïde de révolution, en trouver le centre de gravité; le rayon de la base est r, *et la*

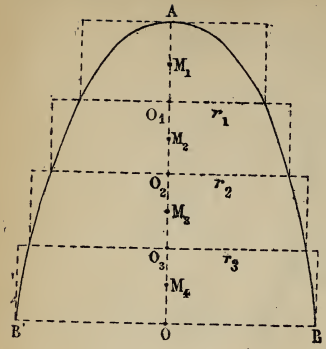


Fig. 93.

hauteur h. (Douai, Concours acad., Ens. sp.)

1re Solution. Divisons la hauteur AO en n parties égales ; par les points de division menons des plans perpendiculaires à l'axe ; ils déterminent des cercles servant de base à des cylindres dont la hauteur est la distance de deux plans ; le paraboloïde est la limite de la somme de ces cylindres, lorsque n croît indéfiniment.

Soient M_1, M_2, M_3... le milieu de la hauteur de chaque cylindre. Ces points sont les centres de gravité de ces cylindres ; désignons par les mêmes lettres les poids qui y sont appliqués.

En faisant la somme des moments par rapport au plan tangent au sommet A, on aura

$$M_1 \times AM_1 + M_2 \times AM_2 + M_3 \times AM_3 + \ldots\ldots$$

Or $\quad M_1 = \pi r_1^2 \times \dfrac{h}{n} \qquad\qquad M_3 = \pi r_3^2 \times \dfrac{h}{n}$

$\quad M_2 = \pi r_2^2 \times \dfrac{h}{n} \qquad\qquad \ldots\ldots$

Dans toute parabole, les carrés des ordonnées sont dans le même rapport que les abscisses (G., 701) ; par suite,

$$\frac{r_1^2}{r^2} = \frac{1}{n}$$

d'où $\quad r_1^2 = r^2 \times \dfrac{1}{n} \qquad$ et $\qquad M_1 = \dfrac{\pi r^2 h}{n^2}$

$\quad r_2^2 = r^2 \times \dfrac{2}{n} \qquad\qquad M_2 = \dfrac{\pi r^2 h \times 2}{n^2}$

$\quad r_3^2 = r^2 \times \dfrac{3}{n} \qquad\qquad M_3 = \dfrac{\pi r^2 h \times 3}{n^2}$

$\quad \ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots$

On a aussi par suite,

$$AM_1 = \frac{h}{2n} \qquad M_1 \times AM_1 = \frac{\pi r^2 h^2}{2n^3}$$

$$AM_2 = \frac{3h}{2n} \qquad M_2 \times AM_2 = \frac{\pi r^2 h^2 \times 2 \times 3}{2n^3}$$

$$AM_3 = \frac{5h}{2n} \qquad M_3 \times AM_3 = \frac{\pi r^2 h^2 \times 3 \times 5}{2n^3}$$

. . . . . .

En mettant $\frac{\pi r^2 h^2}{2n^3}$ en facteur commun, la somme des moments devient

$$\frac{\pi r^2 h^2}{2n^3} \left[1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + \ldots\ldots n(2n-1) \right] \qquad (1)$$

Cherchons à exprimer la valeur de la somme entre crochets ; elle peut s'écrire

$1(2\times1-1)+2(2\times2-1)+3(2\times3-1)+4(2\times4-1)+\ldots n(2n-1)$

ou $(2.1^2-1)+(2.2^2-2)+(2.3^2-3)+(2\times4^2-4)+\ldots(2.n^2-n)$

ou encore $2(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots n^2)-(1+2+3+4+\ldots n)$

La première parenthèse est la somme des carrés des n premiers nombres ; elle est exprimée par (Alg., n° 307)

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

La seconde parenthèse est la somme des n premiers nombres ; elle vaut (Alg., n° 344) $\frac{n(n+1)}{2}$

La somme entre crochets vaut donc

$$\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Ce qui donne pour la somme des moments (1)

$$\frac{\pi r^2 h^2}{2n^3} \times \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = \frac{\pi r^2 h^2}{12} \times \frac{(n+1)(4n-1)}{n^2}$$

La limite de cette somme, lorsque n augmente indéfiniment, est égale au moment du poids total du paraboloïde.

En désignant par G le centre de gravité du paraboloïde et par V son volume ou son poids, on a, pour le moment total :

$$V \times AG = \frac{\pi r^2 h}{2} \times AG \qquad (G., 853) ;$$

par suite, $\frac{\pi r^2 h}{2} \times AG = \frac{\pi r^2 h^2}{12} \times \lim. \frac{(n+1)(4n-1)}{n^2}$

d'où $$AG = \frac{h}{6} \times \lim. \frac{(n+1)(4n-1)}{n^2}$$

or $$\frac{(n+1)(4n-1)}{n^2} = \frac{4n^2+3n-1}{n^2} = 4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}$$

qui, pour $n = \infty$, se réduit à 4.

Donc $$AG = \frac{h}{6} \times 4 = \frac{2h}{3}$$

Le centre de gravité du paraboloïde de révolution est aux $^2/_3$ *de la hauteur, à partir du sommet.*

2e Méthode. Supposons un prisme triangulaire ayant pour section droite un triangle CEE_1, dont la hauteur CD soit égale à AO, hauteur du paraboloïde, et dont la base EE_1 égale BB_1, diamètre de la base du paraboloïde.

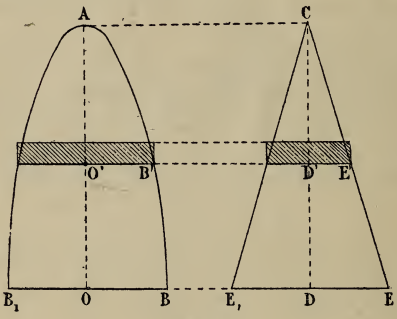


Fig. 94.

Prenons la longueur l de l'arête latérale du prisme, de manière que la surface S d'une face EE_1 du prisme soit égale à la base $\pi\overline{OB}^2$ du paraboloïde.

Posons sur un même plan le paraboloïde par sa base et le prisme par la face EE_1. Considérons deux plans très rapprochés, parallèles au plan sur lequel reposent les corps.

Ces deux plans parallèles déterminent deux tranches qui sont équivalentes. En effet, celle du paraboloïde peut être considérée comme un cylindre; celle du prisme, comme un prisme à base rectangulaire; ces deux tranches, ayant même hauteur, sont dans le même rapport que les surfaces de leurs bases. Ces surfaces sont équivalentes, car pour la première on a :

$$\frac{\text{surf. } O'B'}{\text{surf. } OB} = \frac{\pi\overline{O'B'}^2}{\pi\overline{OB}^2} = \frac{h'}{h} \quad \text{d'où} \quad \text{surf. } O'B' = S \times \frac{h'}{h}$$

Pour la seconde,

$$\frac{\text{surf. E'D'}}{\text{surf. ED}} = \frac{\text{E'D'}}{\text{ED}} = \frac{h'}{h} \qquad \text{d'où} \qquad \text{surf. E'D'} = \text{S} \times \frac{h'}{h}$$

d'où $$\text{surf. O'B'} = \text{surf. E'D'}$$

Les tranches correspondantes dans les deux corps sont donc équivalentes ; les volumes de ces deux corps sont égaux.

Si l'on prend les moments des différentes tranches qui composent le prisme, par rapport au point C, et ceux des tranches du paraboloïde, par rapport au point A, ces moments seront égaux chacun à chacun, la somme des uns sera égale à la somme des autres.

Mais la limite de la somme des moments des tranches du prisme est égale au produit du volume du prisme par la distance CG' de son centre de gravité G' au point C ; on sait que l'on a

$$\text{CG'} = \frac{2h}{3} \qquad \text{(M., n° 84).}$$

De même la limite de la somme des moments des tranches du paraboloïde est égale au produit du volume du paraboloïde par la distance AG de son centre de gravité G au sommet A ; cette distance est donc la même que dans le prisme, c'est-à-dire que l'on a

$$\text{AG} = \frac{2h}{3}$$

Problème 64

Soit une sphère homogène A *dans laquelle se trouve une cavité sphérique* B. *Trouver le centre de gravité du système, connaissant les rayons* a, b *des deux sphères et la distance* d *de leurs centres.*

Examiner ce qui se produit lorsque les deux sphères sont concentriques, puis lorsqu'elles sont tangentes.

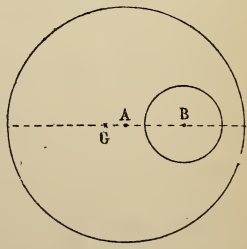


Fig. 95.

Soit G le centre de gravité.

La sphère A peut être regardée comme la somme de la sphère B et de la partie restante.

On doit donc avoir :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{B}{G} = \frac{\frac{4}{3}\pi b^3}{\frac{4}{3}\pi\,(a^3 - b^3)} = \frac{b^3}{a^3 - b^3}$$

Rép. $AG = \frac{db^3}{a^3 - b^3}$.

Remarque. Si les sphères sont concentriques, on a

$$d = 0 \quad \text{d'où} \quad AG = 0$$

Si les sphères sont tangentes,

$$d = a - b \quad \text{et} \quad AG = \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2}$$

Si la sphère B est nulle,

$$b = 0 \quad \text{et} \quad AG = 0$$

Problème 65

Prouver que le centre de gravité de la surface d'un tétraèdre est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre que l'on forme en joignant les centres de gravité des faces du tétraèdre donné.

Pour cette démonstration, on suit une marche analogue à celle qui a été employée pour le centre de gravité du périmètre d'un triangle. (M., n° 72.)

On a trouvé que *le centre de gravité du périmètre d'un triangle est au centre du cercle inscrit dans le triangle que l'on forme en joignant les centres de gravité des côtés du triangle donné.*

Soit le tétraèdre ABCD, et A′, B′, C′, D′ les centres de gravité de ses faces.

Pour trouver le centre de gravité de sa surface, il faut composer les forces A′, B′, C′, D′, proportionnelles aux faces correspondantes.

Les forces C′ et B′ ont une résultante appliquée en un point M tel que

$$\frac{C'M}{B'M} = \frac{B'}{C'} = \frac{ACD}{ABD}$$

Mais on a

$$\frac{ACD}{ABD} = \frac{A'C'D'}{A'B'D'}$$

Donc

$$\frac{C'M}{B'M} = \frac{A'C'D'}{A'B'D'}$$

par suite, le plan MD′A′ est bissecteur du dièdre A′D′ (G., probl. 715).

Or ce plan bissecteur, passant par les points M, D′, A′, contient la résultante des forces B′, C′, D′, A′; il contient donc le centre de gravité cherché.

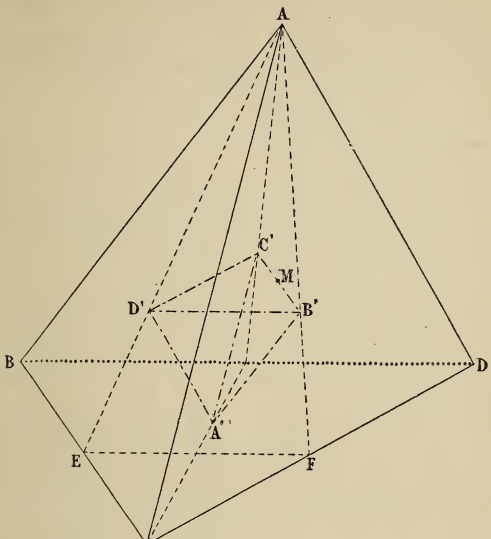


Fig. 96.

Il en serait de même pour les plans bissecteurs des autres dièdres du tétraèdre A′B′C′D′. Donc, etc...

Remarque. Il est facile de prouver l'égalité

$$\frac{ACD}{ABD} = \frac{A'C'D'}{A'B'D'}$$

En effet, $B'D' = \frac{2}{3} EF$

mais $EF = \frac{1}{2} BD$

Donc $B'D' = \frac{1}{3} BD$

Chaque arête du petit tétraèdre est $^1/_3$ de l'arête correspondante du grand ; les faces du petit sont donc semblables à celles du grand et en sont le $^1/_9$; par suite, les faces correspondantes des deux tétraèdres sont dans le même rapport.

Problème 66

En quels points de la surface d'un prisme triangulaire oblique peut-on par un fil suspendre ce corps, pour que, sous l'action de la pesanteur, les arêtes latérales prennent une direction d'équilibre parallèle ou perpendiculaire à celle du fil? (Lyon, Conc. acad., Ens. sp., 1877.)

1° *Les arêtes sont parallèles au fil.*

Elles sont donc verticales.

Si, par le centre de gravité du prisme, on mène une parallèle aux arêtes, elle perce les bases aux points cherchés ; ces points sont les centres de gravité des bases (M., n° 84). Il faudra donc suspendre le prisme par l'un de ces deux points.

2° *Les arêtes sont perpendiculaires au fil.*

Par le centre de gravité du prisme, menons un plan perpendiculaire aux arêtes ; ce plan détermine une section droite du prisme, et on peut le suspendre en un point quelconque de cette section droite.

Problème 67

On a un triangle isocèle ABC *de hauteur* AH. *Au point* O, *situé au tiers de* AH *à partir du sommet, passe un axe horizontal situé dans le plan du triangle. On demande quelle force il faudra appliquer au point* A, *pour que le triangle sollicité par cette force et son poids* P *reste horizontal.* (Saint-Cyr, Ex. oral, 1880.)

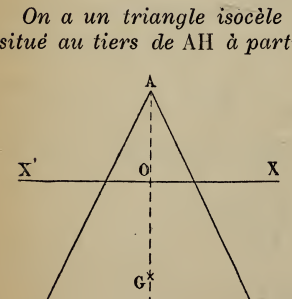


Fig. 97.

Puisque OA = OG, les forces parallèles appliquées en A et en G doivent être égales.

Donc, il faut appliquer en A un poids égal à celui du triangle.

Remarque. Si la force appliquée en A n'est pas dirigée suivant la pesanteur, cette force peut être décomposée en deux : l'une, dirigée suivant le plan du triangle, est détruite par la fixité de l'axe; l'autre, verticale, doit être égale au poids du triangle.

Problème 68

Un paquet de cartes est placé sur le bord d'une table; on avance la carte supérieure aussi loin que possible pour qu'elle soit encore horizontale, puis celle qui est au-dessous, qui entraîne avec elle la première, la troisième, et ainsi de suite. On propose de dire de quelle partie de sa longueur chaque carte dépasse la suivante.

Quand on n'avance que la première, on peut l'avancer jusqu'à son centre de gravité B, et l'on a, en représentant par $2l$ la longueur de la carte :

$$AB = l$$

Pour deux cartes, on pourra avancer la seconde jusqu'en D, centre de gravité de l'ensemble des deux cartes. Or en B et en C sont des poids égaux ; le point D est donc le milieu de BC.

On a $BD = \frac{l}{2}$

Pour trois cartes, il faut composer la force 2, appliquée en D, avec une force 1, appliquée en E, milieu de la troisième carte.

On a donc $\frac{FD}{FE} = \frac{1}{2}$

d'où $\frac{FD}{DE} = \frac{1}{3}$

par suite, $FD = \frac{l}{3}$

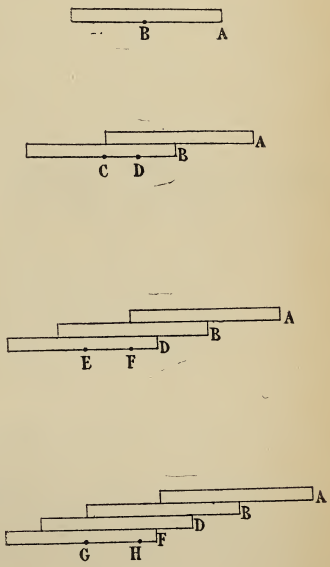


Fig. 98.

Pour quatre cartes, il faut composer une force 3, appliquée en F, avec une force 1, appliquée en G.

On a donc $$\frac{FH}{HG} = \frac{1}{3}$$

d'où $$\frac{FH}{FG} = \frac{1}{4}$$

Donc $$FH = \frac{l}{4}$$

Rép. La 1re carte avance de l;

» 2e » $\frac{l}{2}$;

» 3e » $\frac{l}{3}$;

» 4e » $\frac{l}{4}$;

. . . . . .

» ne » $\frac{l}{n}$.

Deuxième méthode. Désignons par $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, x_n$ la quantité dont chaque carte avance sur la suivante.

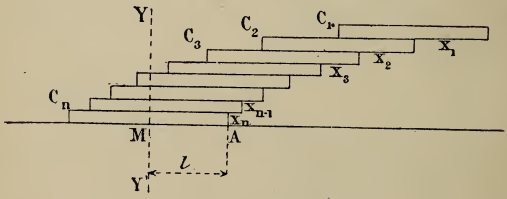


Fig. 99.

Considérons un plan YY′ perpendiculaire à la longueur des cartes et passant par le milieu M de la carte inférieure. Prenons les moments par rapport à ce plan et écrivons que le moment du poids total des n cartes, qui surmontent la carte inférieure, est égal à la somme des moments du poids de chacune de ces n cartes. En prenant le poids d'une carte pour unité, et désignant sa longueur par $2l$, la résultante sera n, et comme elle doit être sur la verticale passant par le point A, bord de la carte inférieure, le moment de la résultante sera nl.

Exprimons la distance du *milieu* de chaque carte à YY′.

Pour C_n, la distance est x_n;

» C_{n-1}, » $x_n + x_{n-1}$;

» C_{n-2}, » $x_n + x_{n-1} + x_{n-2}$;

. . . . . .

» C_2, » $x_n + x_{n-1} \ldots + x_3 + x_2$;

» C_1, » $x_n + x_{n-1} \ldots + x_3 + x_2 + x_1$.

Le poids de la carte étant 1, ces expressions représentent les moments; en en faisant la somme, on a, pour équation des moments,

$$nl = nx_n + (n-1)\,x_{n-1} + \ldots + 3x_3 + 2x_2 + x_1$$

Si, dans cette équation, l'on fait $n = 1$, elle devient

$$l = x_1 \qquad (1)$$

Si l'on fait $n = 2$, on obtient

$$2l = 2x_2 + x_1 \qquad (2)$$

En retranchant (1), on trouve

$$x_2 = \frac{l}{2}$$

De même, en faisant $n = 3$,

$$3l = 3x_3 + 2x_2 + x_1 \qquad (3)$$

En retranchant l'équation (2) de l'équation (3), on a

$$x_3 = \frac{l}{3}$$

Et ainsi de suite. Les valeurs cherchées sont donc

$$x_1 = l; \quad x_2 = \frac{l}{2}; \quad x_3 = \frac{l}{3}; \quad x^4 = \frac{l}{4}; \quad \ldots. \quad x_n = \frac{l}{n}$$

Problème 69

Sur une droite indéfinie, à partir du point A, *on porte des longueurs respectivement proportionnelles aux carrés des* n *premiers nombres entiers. Le premier point de division est le centre d'une circonférence passant par* A; *le deuxième point, le centre d'une autre conférence tangente à la première, etc. Trouver le centre de gravité de l'ensemble des* n *cercles ainsi construits.*

Le rayon du cercle O_1 est $AO_1 = 1$;

» O_2 » $AO_2 - 2AO_1 = 4 - 2 = 2$;

» O_3 » $AO_3 - 2(AO_1 + AO_2) = 9 - 6 = 3$;

... .

» O_n » » $= n$.

Prenons les moments par rapport au point A ; on a, en désignant par x la distance du centre de gravité au point A :

$$\pi(1^2+2^2+3^2+\ldots n^2)x=\pi+\pi\times2^2\times2^2+\pi\times3^2\times3^2+\ldots\pi\times n^2\times n^2$$

d'où
$$x=\frac{1+2^4+3^4\ldots+n^4}{1+2^2+3^2\ldots+n^2}$$

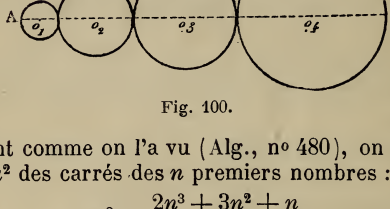


Fig. 100.

En agissant comme on l'a vu (Alg., nº 480), on trouve, pour la somme Σa^2 des carrés des n premiers nombres :

$$\Sigma a^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

et pour Σa^4, somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres :
$$\Sigma a^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

par suite,
$$x=\frac{\Sigma a^4}{\Sigma a^2}=\frac{3n^2+3n-1}{5}$$

Si l'on fait successivement n égale 1, 3, 6, 8, 11, etc., on obtient pour x les valeurs entières 1, 7, 25, 45, 79, etc.

Remarque. Les nombres 1 et 25 étant des carrés parfaits, si l'on ne prend qu'une circonférence, le centre de gravité est à son centre, ce qui est évident ; si l'on en prend six, le centre de gravité de leur ensemble est au centre de la cinquième circonférence.

Problème 70

Même question ; au lieu de cercles on a des sphères.

En apprenant les moments comme ci-dessus, on a l'équation

$$\pi(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)\times x=\pi+\pi\times2^3\times2^2+\pi\times3^3\times3^2+\ldots+\pi n^3\times n^2$$

d'où
$$x=\frac{1+2^5+3^5+4^5+\ldots+n^5}{1+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3}$$

Mais on sait que $\Sigma a^3=\dfrac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

et que
$$\Sigma a^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

Par suite, $x = \frac{\Sigma a^5}{\Sigma a^2} = \frac{2n^2 + 2n - 1}{3}$

Si l'on fait $n = 1, 4, 7, 10, 13, 16,$ etc.
on trouve $x = 1, 13, 37, 73, 121, 181,$ etc.

Remarque. Le nombre 121 étant un carré, si l'on prend treize sphères, le centre de gravité de l'ensemble est au centre de la onzième sphère.

Problème 71

Les centres de gravité du contour et de l'aire d'un polygone circonscrit à une circonférence sont toujours situés sur une droite qui passe par le centre de la circonférence ; leurs distances au centre sont entre elles dans le rapport de 3 à 2.

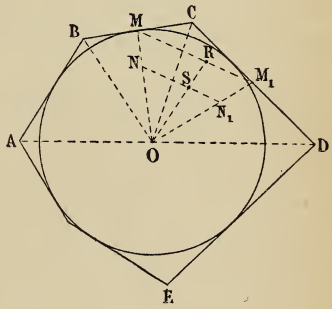


Fig. 101.

Soit le polygone circonscrit ABCD... Désignons par M, M_1, M_2... les milieux des côtés BC, CD, DE...

Pour trouver le centre de gravité du périmètre, il faut composer les forces M, M_1, M_2... La résultante de M et M_1 est en R, et l'on a

$$\frac{MR}{M_1R} = \frac{M_1}{M} = \frac{CD}{CB}$$

Pour trouver le centre de gravité de l'aire, il faut composer les forces N, N_1, N_2..., poids des triangles BOC, COD...

Soit S le point d'application de la résultante de N et N_1, on aura

$$\frac{NS}{N_1S} = \frac{N_1}{N}$$

Mais

$$N = \frac{BC \times r}{2}$$

et

$$N_1 = \frac{CD \times r}{2}$$

d'où

$$\frac{N_1}{N} = \frac{CD}{CB}$$

Donc

$$\frac{MR}{M_1R} = \frac{NS}{N_1S}$$

Par suite, le point S se trouve sur OR et aux $^2/_3$ de cette droite.

Il en sera de même dans chacune des opérations qu'il faudra faire pour trouver le centre de gravité du contour et celui de la surface du polygone circonscrit.

Donc, etc.

Remarque. En raisonnant de même, on verrait que *les centres de gravité de la surface et du volume d'un polyèdre circonscrit à une sphère sont sur une même droite qui passe par le centre, et que la distance du second au centre de la sphère est les* $^3/_4$ *de celle du premier.*

Problème 72

Trois forces appliquées en un même point libre O *se font équilibre et sont représentées en grandeur et en direction par les droites* OA, OB, OC. *Démontrer :*

1° *Que ces forces sont proportionnelles aux côtés d'un triangle qui seraient parallèles ou perpendiculaires aux lignes* OA, OB, OC ;

2° *Que le point* O *est le centre de gravité du triangle* ABC. (Clermont, Conc. acad., Ens. sp., 1876.)

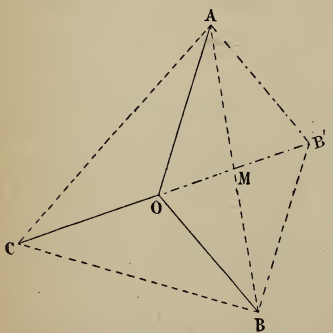


Fig. 102.

1° Les forces OA, OB, OC étant en équilibre, le polygone de ces forces se ferme ; c'est donc le triangle AB'O.

Tous les triangles qui auront leurs côtés parallèles ou perpendiculaires aux forces seront semblables à AB'O, et par suite auront leurs côtés proportionnels à OA, OB, OC.

2° La force OC étant directement opposée à la résultante de OA et de OB est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme AB'BO ; le point M est donc le milieu de AB, et CM est médiane du triangle ABC. Il en est de même pour les deux autres forces. Le point O, étant la rencontre des médianes, est le centre de gravité du triangle ABC.

Problème 73

Prouver qu'il y a équilibre entre trois forces appliquées au centre de gravité d'un triangle et représentées en grandeur et en direction par les droites qui vont de ce point aux sommets.

C'est la réciproque de la deuxième partie du problème précédent.

La droite OC est égale et de sens contraire à OB′, la force OC est donc égale et directement opposée à la résultante des forces OA et OB. Ces trois forces sont donc en équilibre.

Problème 74

Prouver qu'il y a équilibre entre les quatre forces représentées en grandeur et en direction par les droites qui joignent le centre de gravité d'un tétraèdre aux sommets. (Conc. gén., Ens. sp.)

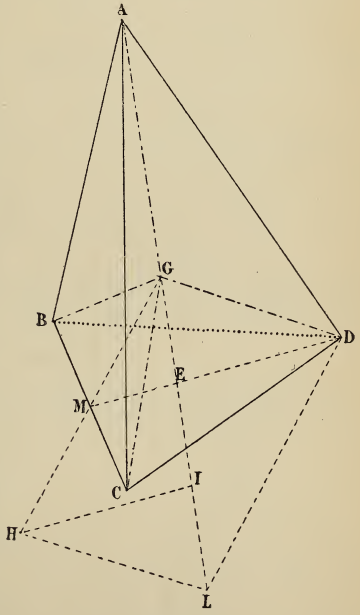


Fig. 103.

Soit G le centre de gravité du tétraèdre ABCD. Je dis que les forces GA, GB, GC, GD sont en équilibre ; pour le prouver, il suffit de faire voir que la force GA, par exemple, est égale et directement opposée à la résultante des trois autres.

Les forces GB et GC ont pour résultante

$$GH = 2GM.$$

Prolongeons AG jusqu'à sa rencontre avec HL, parallèle à GD, et menons HI, parallèle à MD. La figure GHLD est un parallélogramme, car les triangles HIL et GED sont égaux, puisque HI, double de ME, égale ED, et que les angles sont égaux à cause des parallèles GD et HL ; par suite, HL = GD. La diagonale GL est donc la résultante des forces GH et GD, c'est-à-dire des trois forces GB, GC, GD.

On a de plus IE=EG, puisque MH = MG ; les triangles égaux HIL et DEG donnent encore IL = EG ; donc GL = 3GE = GA. La force GA étant égale et directement opposée à la résultante

des trois autres, les quatre forces données sont en équilibre.

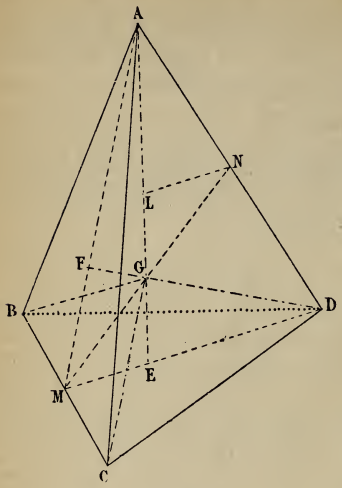


Fig. 104.

2e **Solution.** Il suffit de prouver que GM, moitié de la résultante des forces GB et GC, est égale et directement opposée à GN, demi-résultante de GA et GD.

Les droites GM et GN sont dans le plan AMD ; par le point N menons NL parallèle à ED. Les triangles NLG et GEM sont égaux, car

$$NL = \frac{ED}{2} = ME$$

et $\quad LE = LA$

Mais $\quad GE = \frac{LA}{2}$

Donc $\quad GE = GL$

De plus, les angles NLG et GEM sont égaux comme alternes internes, les triangles GEM et GLN sont égaux, GM et GN sont égales et directement opposées. Les quatre forces sont donc en équilibre.

Problème 75

On a trois forces parallèles et leur résultante. Prouver que si l'on divise chaque force par la surface du triangle obtenu en joignant les points d'application des autres, on trouve le même quotient.

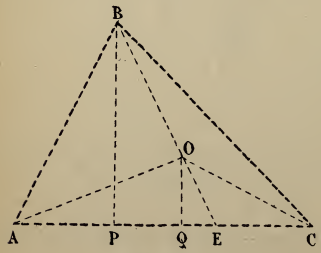


Fig. 105.

1er **Cas.** *Les forces sont de même sens.*

Soient A, B, C, les points d'application de trois forces parallèles de même sens, et O celui de leur résultante.

On a (M., nº 49), en désignant les forces par la lettre de leur point d'application,

$$\frac{O}{BE} = \frac{B}{OE} \quad \text{d'où} \quad \frac{O}{B} = \frac{BE}{OE} = \frac{BP}{OQ}$$

Or les triangles ABC et AOC ont même base AC ; ils sont dans le même rapport que leurs hauteurs ; on a donc

$$\frac{BP}{OQ} = \frac{ABC}{AOC}$$

par suite,

$$\frac{O}{B} = \frac{ABC}{AOC}$$

et

$$\frac{O}{ABC} = \frac{B}{AOC}$$

On prouverait de la même manière que

$$\frac{O}{ABC} = \frac{A}{BOC}$$

et que

$$\frac{O}{ABC} = \frac{C}{AOB}$$

Donc

$$\frac{O}{ABC} = \frac{A}{BOC} = \frac{B}{AOC} = \frac{C}{AOB}$$

Ce premier cas est un autre énoncé du *théorème d'Euler* (M., nº 107).

2e **Cas.** *Les forces ne sont pas de même sens.*

On a encore (M., nº 51)

$$\frac{O}{BE} = \frac{B}{OE}$$

d'où

$$\frac{O}{B} = \frac{BE}{OE} = \frac{BP}{OQ}$$

Et comme les triangles ABC et AOC ont même base AC, on a

$$\frac{BP}{OQ} = \frac{ABC}{AOC}$$

d'où

$$\frac{O}{B} = \frac{ABC}{AOC}$$

par suite,

$$\frac{O}{ABC} = \frac{B}{AOC}$$

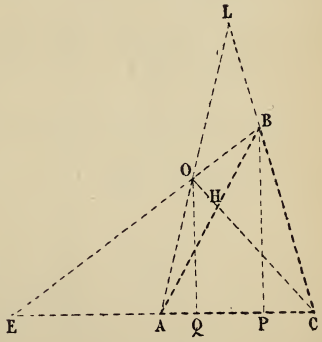


Fig. 106.

En considérant OC, on a de même

$$\frac{O}{HC} = \frac{C}{OH}$$

d'où

$$\frac{O}{C} = \frac{HC}{OH}$$

Les triangles OAB et ABC ont AB pour base commune ; leurs hauteurs sont dans le rapport des segments OH et HC ;

par suite, $$\frac{O}{C} = \frac{HC}{OH} = \frac{ABC}{OAB}$$

Donc $$\frac{O}{ABC} = \frac{C}{AOB}$$

En considérant la droite AOL, on a

$$\frac{O}{AL} = \frac{A}{OL}$$

d'où $$\frac{O}{A} = \frac{AL}{OL} = \frac{ABC}{OBC}$$

Donc $$\frac{O}{ABC} = \frac{A}{OBC} = \frac{B}{AOC} = \frac{C}{AOB}$$

Problème 76

Une barre, longue de 5^m *et appuyée par les deux bouts, porte un poids de* 60^k *à une distance de* 3^m *d'une extrémité et un poids de* 40^k *à* 1^m *de l'autre extrémité. La barre pèse* 50^k, *son centre de gravité est en son milieu. Indiquer la pression à chaque extrémité.*

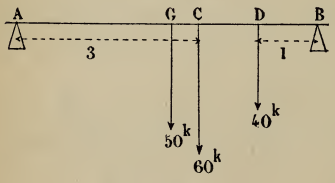


Fig. 107.

Le poids de 50^k, appliqué en G, peut se décomposer en deux poids égaux à 25^k appliqués en A et en B.

Le poids de 60^k peut se décomposer en deux autres, inversement proportionnels à leurs bras de levier. En appelant x le poids appliqué en A, on aura

$$\frac{x}{60 - x} = \frac{2}{3}$$

d'où $$x = 24 \quad \text{et} \quad 60 - x = 36$$

De même le poids de 40^k se décomposera en deux autres donnés par la relation $$\frac{x'}{40 - x'} = \frac{1}{4}$$

d'où $$x' = 8 \quad \text{et} \quad 40 - x' = 32$$

Rép. Pression en A $= 25 + 24 + 8 = 57^k$,
Pression en B $= 25 + 36 + 32 = 93^k$.

Problème 77

Un triangle du poids de 75k est soutenu par trois points. Trouver la charge de chacun des points d'appui :

1° *Les points d'appui sont aux sommets ;*

2° » » *sont aux milieux des côtés ;*

3° *Un point d'appui est à l'un des sommets, les autres sont sur les deux côtés adjacents, et aux $^3/_4$ à partir de ce sommet.*

1° Cette question a été résolue (M., n° 108), chaque sommet supporte le tiers de la charge.

Rép. 25k.

2° Joignons les milieux E, F, H. Le triangle ainsi formé a aussi pour médianes les droites AE, BF, CH ; le point G est donc encore le centre de gravité du triangle EFH ; par suite, chacun de ces trois points supporte la même charge.

Rép. 25k.

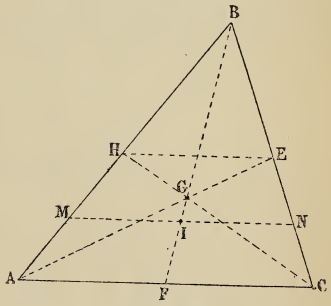


Fig. 108.

3° La droite MN, qui joint les points d'appui situés aux $^3/_4$ de BA et de BC, est parallèle à AC ; elle est donc divisée, par la droite BF, en deux parties égales.

Décomposons le poids G en deux forces appliquées en B et en I, on aura

$$\frac{B}{I} = \frac{GI}{GB}$$

mais

$$GI = \frac{BF}{3} - \frac{BF}{4} = \frac{BF}{12}$$

et

$$GB = \frac{2BF}{3}$$

par suite,

$$\frac{GI}{GB} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \frac{GI}{BI} = \frac{1}{9}$$

ce qui donne

$$B = 75^k \times \frac{1}{9} = 8^k \frac{1}{3}$$

et

$$I = 75^k \times \frac{8}{9} = 66^k \frac{2}{3}$$

Mais le poids I se partage en parties égales aux points M et N. Donc :

Rép. $8^k \frac{1}{3}$, $33^k \frac{1}{3}$ et $33^k \frac{1}{3}$.

Problème 78

Une table a la forme d'un triangle horizontal reposant par ses sommets sur des points fixes. Elle pèse 50^k *avec des corps inégalement répartis sur sa surface. Les côtés du triangle sont de* 0^m95, 1^m20 *et* 1^m50. *On sait que les pressions exercées sur les sommets opposés aux côtés de* 1^m50 *et* 1^m20 *sont* 20^k *et* 18^k. *Chercher le moyen de trouver, avec la règle et le compas, sur le triangle, le point où il sera percé par la résultante des trois pressions.* (Douai, Diplôme Ens. sp.)

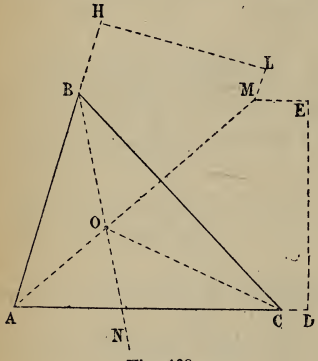


Fig. 109.

Soit ABC le triangle donné, et O le point cherché.

Puisque les pressions en A et en B sont de 20^k et 18^k, il reste 12^k pour la pression en C, et d'après le théorème d'Euler (M., n° 107) on doit avoir :

$$\frac{BOC}{20} = \frac{AOC}{18} = \frac{AOB}{12}$$

En désignant par h_1, h_2, h_3 les perpendiculaires abaissées du point O sur a, b, c, la relation ci-dessus devient

$$\frac{ah_1}{20} = \frac{bh_2}{18} = \frac{ch_3}{12}$$

d'où
$$\frac{ah_1}{bh_2} = \frac{20}{18}$$

Et en remplaçant a, b par leurs valeurs 150 et 120, on a

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{8}{9}$$

on trouve de même
$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{19}{16}$$

Le lieu des points dont les distances aux droites AB et AC sont dans un rapport donné, est une droite passant par le point A. En faisant DE = 19 et HL = 16 et en menant EM parallèle à AC et LM parallèle à AB, on détermine le point M qui

appartient au lieu; AM renferme donc le point cherché. On détermine BN d'une manière analogue, et leur intersection donne le point O demandé.

Problème supplémentaire.

Un corps M, *pesant* 18^k, *est posé sur une table triangulaire* ABC, *supportée par trois pieds verticaux fixés à ses trois sommets. Le point* M, *où la table est rencontrée par la direction du poids du corps, se trouve sur la hauteur* AI *du triangle* ABC.

On sait que $AM = 375^{mm}$, $AI = 855^{mm}$, $AB = 2^m502$, $AC = 1^m243$. *On demande les pressions supportées par chacun des pieds de la table.* (Conc. ac., Rennes, 1872.)

Il faut appliquer le théorème d'Euler (M., nº 107).

On a
$$IB = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AI}^2} = 2{,}351$$
$$IC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AI}^2} = 0{,}902$$

Il est facile de calculer les surfaces des trois triangles partiels; mais on peut se dispenser de calculer les surfaces des triangles AMB et ACM, qui, ayant même base AM, sont entre eux comme leurs hauteurs IB et IC.

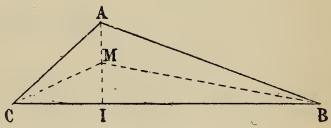


Fig. 110.

Rép. Pression en $A = 10^k105$
» $B = 2^k189$
» $C = 5^k705$.

Problème 79

Un carré est porté par trois points; deux sont aux extrémités d'un côté, l'autre est au milieu du côté opposé; pression en chacun de ces points. Quelles seraient les pressions, si l'un des points était à l'un des sommets et les deux autres au milieu des côtés non adjacents?

1º Les points d'appui sont A, B, C.

Le centre de gravité du carré est au point G, rencontre des diagonales. Le poids P, appliqué en G, peut se décomposer en

deux autres $\frac{P}{2}$ appliqués en C et en D, par suite au point C nous avons un poids égal à $\frac{P}{2}$.

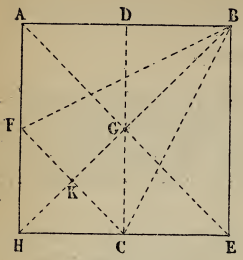


Fig. 111.

Le poids $\frac{P}{2}$ qui agit en D peut lui-même se décomposer en deux autres, $\frac{P}{4}$ appliqués en A et en B.

Donc : pressions en A et en B $= \frac{P}{4}$ et pression en C $= \frac{P}{2}$.

2° *Les points d'appui sont en* B, F, C.

La droite GK est la moitié de HG, et par suite le $^1/_3$ de BK.

Par suite, le poids P appliqué en G se répartira en deux autres agissant en B et en K.

En B nous aurons le $^1/_3$ du poids, et en K les $^2/_3$.

Le poids qui agit en K se décompose lui-même en deux autres égaux chacun à $^1/_3$ du poids et agissant en F et en C.

Donc les trois points B, C, F, supportent des poids égaux à $^1/_3$ de la charge totale.

Remarque. Ce dernier résultat est évident *à priori*, si l'on remarque que le point G est le centre de gravité du triangle FBC.

Problème 80

Un triangle est supporté par les sommets A *et* B. *En quels points des côtés* CB *et* CA *faut-il placer deux autres points d'appui pour que les pressions en chaque point soient égales?*

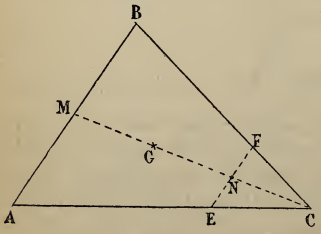


Fig. 112.

Le poids du triangle se décompose en deux forces égales, l'une en M, et l'autre en N, si l'on a GN = GM.

En menant par le point N une parallèle EF à AB, cette parallèle est divisée en deux parties égales EN = FN ; les forces E, F, moitié de N, seront donc égales aux forces A, B, moitié de M.

Problème supplémentaire.

Un triangle est appuyé par un point pris sur l'un de ses côtés. Touver un point sur chacun des deux autres, tel que les pressions en ces trois points d'appui soient égales.

Soit D le point donné. Pour que les pressions soient égales aux points D, E, F, il faut, d'après le théorème d'Euler, que G soit le centre de gravité du triangle DEF ; par suite, DG sera l'une des médianes, et en prenant $GN = \frac{GD}{2}$, le point N doit être le milieu du côté EF.

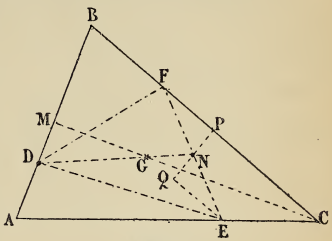


Fig. 113.

Abaissons NP perpendiculaire à BC, prenons NQ = NP, menons QE parallèle à BC, joignons EN et prolongeons-la jusqu'en F. Les deux points E, F sont les points cherchés.

Problème 81

Un parallélogramme est appuyé par le sommet A. *Trouver deux autres points d'appui tels que les trois pressions soient égales.*

Le poids du parallélogramme est proportionnel à sa surface B*h*; par suite, la pression aux points d'appui sera $^1/_3$ B*h*.

En prenant la moitié de CG, le poids G se répartira $^1/_3$ en A et $^2/_3$ en E.

En menant par le point E une parallèle à DB, nous aurons EH = EN; par suite, le poids E = $^2/_3$ B*h* se répartira par moitié en chacun des points H et N, chacun des points A, H et N supportera $^1/_3$ B*h*.

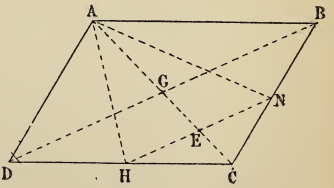


Fig. 114.

Donc les points d'appui sont A, H, N ; ces deux derniers points sont les milieux de DC et CB.

Remarque. Le point G est aussi, dans ce cas, le centre de gravité du triangle AHN.

Problème 82

Un cône est porté par deux points ; pression à chaque point d'appui.

1° *Les points sont aux extrémités de l'axe.*

Le centre de gravité du cône étant aux $^3/_4$ de l'axe à partir du sommet, le sommet supportera une charge trois fois moindre que l'autre point d'appui.

Donc, pression au sommet, $^1/_4$ du poids du cône.
» à la base, $^3/_4$ »

2° *Les points sont aux extrémités d'une génératrice horizontale.*

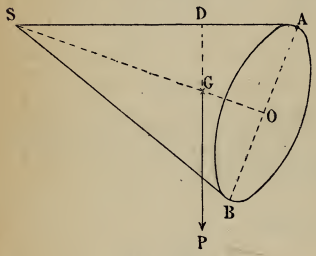


Fig. 115.

Le poids P peut être transporté en D, et il se partage entre les points S et A en parties inversement proportionnelles à SD et AD.

En désignant par S et A les pressions aux points S et A, on a

$$\frac{A}{SD} = \frac{P}{SA} \quad \text{(M., n° 49).}$$

Mais les triangles semblables SGD et SAO donnent

$$\frac{SD}{SO} = \frac{SG}{SA}$$

d'où $$SD = \frac{SO \times SG}{SA} = \frac{h \times \frac{3h}{4}}{l} = \frac{3h^2}{4l}$$

Donc $$A = P \times \frac{3h^2}{4l^2}$$

et $$S = P \times \frac{4l^2 - 3h^2}{4l^2}$$

Remarque. Si le cône est équilatéral, on a

$$h^2 = \frac{3}{4} l^2$$

En mettant cette valeur dans les formules ci-dessus, on trouve

$$A = \frac{9}{16} P$$

$$S = \frac{7}{16} P$$

Problème 83

Deux cônes ont pour base commune un cercle de rayon R, *leurs hauteurs sont* h *et* h'. *Le corps qu'ils forment appuie par les extrémités de l'axe. Pression en chacun des points d'appui.*

Soient M et M' les centres de gravité des cônes S et S', G le centre de gravité du double cône. En désignant par G, M, M', S, S' les forces appliquées en ces points, on a

$$\frac{MG}{M'G} = \frac{M'}{M}$$

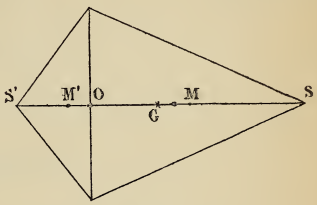


Fig. 116.

Les cônes ayant même base, leurs volumes, ou leurs poids, sont dans le même rapport que leurs hauteurs ; par suite,

$$\frac{MG}{M'G} = \frac{M'}{M} = \frac{h'}{h}$$

Mais on a aussi $$\frac{M'O}{MO} = \frac{h'}{h}$$

Donc $$MG = M'O = \frac{h'}{4}$$

$$M'G = MO = \frac{h}{4}$$

et $$OG = \frac{h - h'}{4}$$

Les pressions en S et S' donnent

$$\frac{S}{S'} = \frac{S'G}{SG} = \frac{h' + \frac{h - h'}{4}}{h - \frac{h - h'}{4}} = \frac{h + 3h'}{3h + h'}$$

On en tire $$\frac{S}{S + S'} = \frac{h + 3h'}{4(h + h')}$$

En remplaçant S + S' par G, on a

$$S = G \times \frac{h + 3h'}{4(h + h')}$$

$$S' = G \times \frac{3h + h'}{4(h + h')}$$

Remarque. Si l'on suppose $h = h'$, on obtient

$$S = S' = \frac{G}{2}$$

ce qui est une vérification des formules obtenues.

On obtient une nouvelle vérification en faisant $h' = 0$, alors

on trouve $$S = \frac{G}{4}$$

et $$S' = \frac{3G}{4}$$

ce qui est évident, puisque le point S' se confond alors avec le centre O.

Problème 84

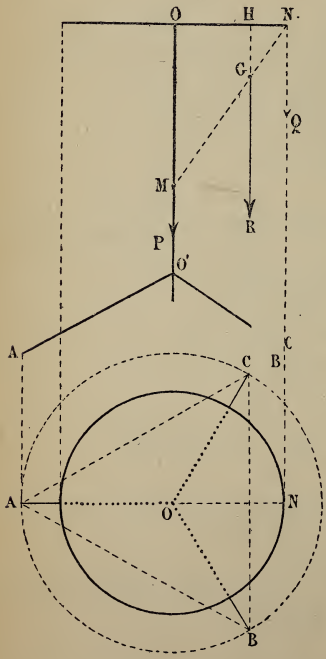


Fig. 117.

Un guéridon de poids P *est formé d'un cercle horizontal de rayon* r, *supporté en son centre par une tige verticale qui se termine inférieurement par trois pieds dont les extrémités forment un triangle équilatéral. Quelle est la longueur minimum du côté du triangle pour qu'un poids* Q *puisse être placé en un point quelconque de la table sans rompre l'équilibre? Cette longueur varie-t-elle avec la hauteur du guéridon?*

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la verticale du centre de gravité ne tombe pas en dehors de la base de sustentation ABC (M., n° 103).

Prenons le cas le plus défavorable, celui où le poids Q se trouve en N, extrémité du diamètre dirigé suivant AO.

Supposons le poids P du guéridon appliqué en M;

les poids P et Q ont une résultante R appliquée en G, de façon que l'on ait

$$\frac{GM}{GN} = \frac{Q}{P}$$

ou

$$\frac{OH}{HN} = \frac{Q}{P}$$

d'où

$$\frac{OH}{OH + HN} = \frac{Q}{P + Q}$$

Donc

$$OH = r \times \frac{Q}{P + Q}$$

mais

$$BC = OH \times 2\sqrt{3}$$

Le côté x du triangle est donc

$$x = r \times \frac{Q}{P + Q} \times 2\sqrt{3}$$

On voit que x est indépendant de la position de M sur la verticale OO', pourvu toutefois que le poids du guéridon ne varie pas. Cependant, lorsque la verticale du point G tombe à l'intérieur de ABC, la stabilité est d'autant plus grande que le point M est plus bas (M., n° 104).

Il y a donc intérêt pour la stabilité à ce que la partie inférieure soit lourde, par rapport à la partie supérieure, et que le guéridon ait peu de hauteur.

Remarque. Si l'on fait $Q = P$, on trouve

$$x = r\sqrt{3} = r \times 1{,}732$$

Problème 85

Une plaque triangulaire homogène et d'égale épaisseur est suspendue à un point fixe, par trois fils attachés aux sommets du triangle. Démontrer que si la plaque est horizontale, on a, entre les longueurs α, β, γ, *des fils, et les côtés* a, b, c, *respectivement opposés aux points d'attache, les relations :*

$$a^2 + 3\alpha^2 = b^2 + 3\beta^2 = c^2 + 3\gamma^2$$

Dans le triangle SGA, on a

$$\alpha^2 = h^2 + \overline{AG}^2$$

Or

$$AG = \frac{2}{3} AL$$

et

$$\overline{AL}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad \text{(G., 254).}$$

par suite,

$$\overline{AG}^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$$

d'où

$$\alpha^2 = h^2 + \frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$$

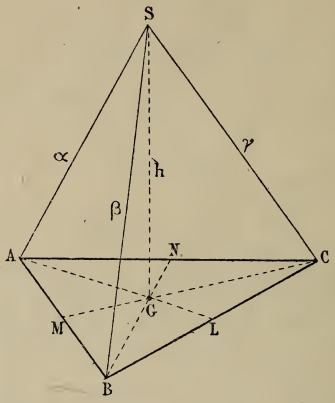


Fig. 118.

Donc

$$a^2 + 3\alpha^2 = a^2 + 3h^2 + \frac{2b^2+2c^2-a^2}{3}$$

ou

$$a^2 + 3\alpha^2 = 3h^2 + \frac{2b^2+2c^2+2a^2}{3}$$

Le second membre de cette égalité est évidemment le même, quel que soit le côté considéré ; on a donc

$$a^2 + 3\alpha^2 = b^2 + 3\beta^2 = c^2 + 3\gamma^2$$

Remarque. La relation subsiste, quelle que soit la position du point S sur SG ; le point G doit donc satisfaire à cette relation, ce qu'il est facile de vérifier.

Problème 86

Un cube plein d'eau est placé de manière que l'une de ses diagonales soit verticale. Déterminer le rapport des pressions exercées sur les faces supérieures et les faces inférieures. (Agrégation, Ens. sp., 1879.)

On a vu en physique que la pression exercée sur une face CD′, par exemple, est égale au poids d'une colonne de liquide qui

aurait pour base la face et pour hauteur la distance du centre de gravité de cette face au niveau supérieur du liquide.

En désignant par a l'arête, par d la densité du liquide, on a, pour la pression P sur la face CD′,

$$P = a^2 \times AM' \times d$$

Mais $AM' = \frac{2AC'}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

d'où $$P = \frac{2a^3 d\sqrt{3}}{3}$$

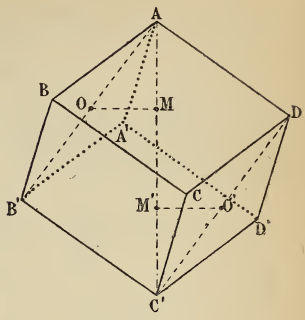


Fig. 119.

Les pressions sur les trois faces inférieures sont normales à ces faces, ce sont donc trois forces rectangulaires qui se rencontrent sur l'axe AC′ par raison de symétrie ; en désignant leur résultante par R, on a

$$R^2 = 3P^2 = 4a^6 d^2$$

d'où $$R = 2a^3 d$$

Pour chacune des faces supérieures, la pression P′ est

$$P' = da^2 \times AM = \frac{a^3 d\sqrt{3}}{3}$$

La résultante R′ de ces trois pressions est

$$R' = a^3 d$$

Le rapport des pressions est donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{2}$$

Ces deux résultantes R et R′ sont dirigées suivant la diagonale AC′, mais de sens contraire ; la résultante de toutes les pressions est donc verticale dirigée de haut en bas, égale à $a^3 d$; *c'est le poids du liquide.*

Remarque. Nous n'avons pas besoin de faire remarquer que, dans le concours d'agrégation, les candidats ont dû démontrer les principes d'hydrostatique que nous avons supposé admis.

Machines simples.

Problème 87

Une barre droite est divisée par le point d'appui en deux parties dont l'une est double de l'autre, le petit bras supporte un poids de $30^k = Q$:

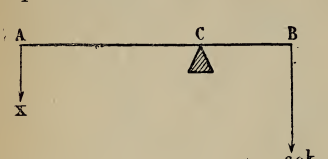


Fig. 120.

1° *Quel poids mettre à l'autre extrémité pour qu'il y ait équilibre ?*

On doit avoir

$$x \times AC = 30 \times CB$$

d'où $\quad 2x = 30$

Donc $\quad x = 15^k$

2° *Quelle force y appliquer si elle doit faire avec la force* Q *un angle de* 60°?

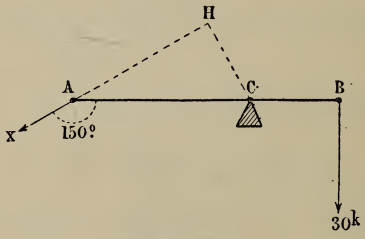


Fig. 121.

On doit avoir $\quad x \times CH = 30 \times CB$

Or $\quad CH = 2CB \sin 30° = 2CB \times \frac{1}{2} = CB$

Rép. $\quad x = 30^k$.

Problème supplémentaire.

Une tige rigide ABC, *ayant le point* O *fixe, est sollicitée par les deux forces* P *et* P′ *de sens contraire qui lui sont perpendiculaires. Quelle doit être l'intensité d'une force* x *appliquée au point* A, *sous un angle de* 135°, *pour qu'elle fasse équilibre aux deux forces données ?*

On supposera $AO = 0^m1$, $OB = 0^m2$, $BC = 0^m1$, $P = 1^k$, $P' = 2^k$.

On évaluera la pression supportée par le point O (Bordeaux, dipl. Ens. sp.)

1° Cherchons la résultante R de P et de P'.

On doit avoir :

$$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{1}$$

d'où $\dfrac{DC + 0^m1}{DC} = 2$

et $DC = 0^m1$

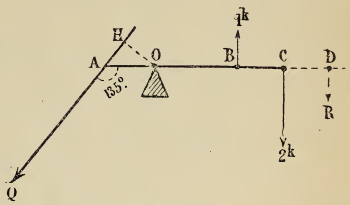


Fig. 122.

Il reste à considérer les forces R et Q.

On aura (M., n° 113) $Q \times OH = R \times OD$

Or $OH = OA \sin 45° = 0^m1 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

par suite, $Q \times 0^m1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 \times 0^m4$

ou $Q\sqrt{2} = 8$ et $Q = 4\sqrt{2}$

Rép. $Q = 5^k656$.

Remarque. Il est plus simple, en prenant les moments par rapport au point O, d'écrire

$$Q \times OH + P \times OB - P' \times OC = 0$$

d'où $Q = \dfrac{0,6 - 0,2}{0,1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2} = 5^k656$

2° La charge R_1 du point O est donnée par la relation

$$R_1^2 = R^2 + Q^2 + 2RQ \cos (R,Q)$$

Or $\cos (R,Q) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

par suite, $R_1^2 = 1 + 32 + 2 \times 4\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 41$

Rép. $R_1 = 6^k4$.

Problème 88

Un levier, formé d'une barre droite dont on néglige le poids, est sollicité à ses deux extrémités par deux forces parallèles ; il y a équilibre lorsqu'on fixe la barre au point qui la partage dans le rapport de 1 à 3. Si on augmente ces deux forces de 1^k, *il faut que le point fixe partage la barre dans le rapport de 2 à 3 pour qu'il y ait équilibre. Quelles sont ces deux forces ?* (Nantes, diplôme Ens. sp., 1879.)

On a, en désignant par P et Q les deux forces parallèles,

$$3P = Q \qquad (1)$$

et

$$(P + 1)\,3 = (Q + 1)\,2 \qquad (2)$$

Rép. $P = \frac{1^k}{3}$ et $Q = 1^k$.

Problème 89

Un levier droit est horizontal et repose sur un point d'appui. A ses deux extrémités sont suspendus deux poids, l'un de 500g, *l'autre de* 1225g. *Le levier lui-même pèse* 450g. *Il a la forme d'un prisme droit de* 0^m60 *de longueur ; la substance dont il est formé est homogène. On demande où doit être placé le point d'appui pour qu'il y ait équilibre.* (Paris, Conc. acad., Ens. sp.)

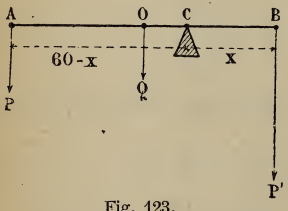


Fig. 123.

Soit AB le levier, C son point d'appui situé à une distance $CB = x$ de l'extrémité B.

En prenant les moments par rapport au point C, on aura

$$P \times AC + Q \times OC = P' \times CB$$

ou

$$500\,(60 - x) + 450\,(30 - x) = 1225x$$

d'où

$$2175x = 43500$$

$$x = 0^m20$$

Rép. Le point d'appui doit être placé à 0^m20 du point B.

Problème 90

Un levier d'égale section en tous ses points, ayant 1^m *de long, pèse* 4^k ; *le point fixe est à* 0^m33 *d'une extrémité. Quelle*

force faudra-t-il appliquer à l'extrémité du petit bras, pour équilibrer 100^k *placés à l'extrémité du grand bras?*

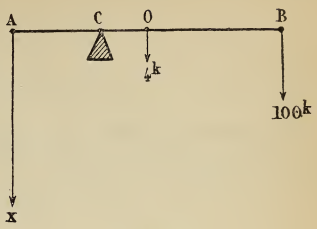


Fig. 124.

En prenant les moments par rapport au point C, on a

$$x \times AC = O \times OC + B \times BC$$

$$0{,}33x = 4 \times 0{,}17 + 100 \times 0{,}67$$

ou $$0{,}33x = 67{,}68$$

Rép. $x = 205^k \frac{1}{11}$.

Problème 91

Une poutre homogène AB *porte en* A *un poids de* 30^k *et en* B *un poids de* 80^k; *elle repose en un point* C, *tel que* $AC = 2^m$, $BC = 1^m40$. *On demande le poids de la poutre.*

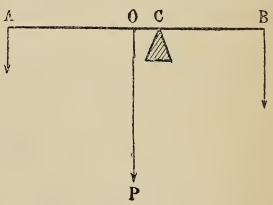


Fig. 125.

Le poids de la poutre est appliqué en O, milieu de AB.

En prenant les moments par rapport au point C, on obtient :

$$A \times AC + O \times OC = B \times BC$$

ou $$30 \times 2 + P \times 0{,}3 = 80 \times 1{,}4$$

qui donne $$0{,}3\,P = 52$$

Rép. $P = 173^k \frac{1}{3}$.

Problème 92

Une barre AB *homogène est mobile autour d'un point fixe situé à* 3^m *de* B *et à* 7^m *de* A. *Quel est le poids de la barre, sachant qu'un poids de* 10^k *en* A *fait équilibre à un poids trois fois plus grand en* B ?

Soit x le poids de la barre appliqué en son milieu O ; le point d'appui est en C ; faisons $CA = l$, $CB = l'$; désignons par P le poids appliqué en A et par nP celui qui est appliqué en B.

En prenant les moments par rapport au point fixe C, on a :

$$P \times CA + x \times CO = nP \times CB \qquad (1)$$

Or $$CO = CA - \tfrac{1}{2}O = l - \frac{(l + l')}{2} = \frac{l - l'}{2}$$

L'équation (1) devient :

$$Pl + x\left(\frac{l - l'}{2}\right) = nPl'$$

d'où
$$x = \frac{2P(nl' - l)}{l - l'}$$

Remarque. Le poids x ne peut changer de direction ; x doit donc être positif si l est le grand bras du levier ; il faut, pour que le problème soit possible, que l'on ait

$$nl' \geqq l \geqq l'$$

ou
$$n \geqq \frac{l}{l'} \geqq 1$$

Dans le cas de $l = l'$, on a $n = 1$; le point d'appui est au milieu O de la barre, et les poids appliqués aux extrémités sont égaux.

Application. Les valeurs numériques de l'énoncé donnent

Rép. $x = 10^k$.

Problème 93

Un levier AB *est formé par une barre rectiligne, homogène, de longueur* l *et de poids* p ; *le point d'appui* C *divise la barre de façon que* AC = 2CB. *Quel est, en tenant compte du poids de la barre, l'équilibre du levier sollicité à ses extrémités* A *et* B *par deux forces* F *et* F', *parallèles à la direction de la pesanteur ?* (Paris, bacc., 1879.)

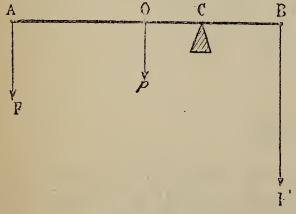


Fig. 126.

Le point d'appui est aux $^2/_3$ de AB à partir du point A. Le point O est au milieu de AB ; donc OC = $^1/_6$ de AB.

En prenant les moments par rapport au point C, on a l'équation

$$F \times AC + p \times OC = F' \times BC$$

qui donne
$$F \times \frac{2}{3}l + p \times \frac{l}{6} = F' \times \frac{1}{3}l$$

ou
$$4F + p = 2F'$$

Rép. $p = 2(F' - 2F)$.

On voit que si $F' > 2F$ on a $p > 0$
$F' = 2F$ » $p = 0$
$F' < 2F$ » $p < 0$

Dans ce dernier cas, il ne peut y avoir équilibre que si la force p est de sens contraire aux deux autres.

Remarque. L'énoncé, un peu vague, semble indiquer d'établir simplement une relation entre les forces.

Problème 94

Une tige homogène AB, *pesant* 335g *par mètre courant, est mobile dans un plan vertical, autour de son extrémité fixe* A ; *elle a* 1m782 *de longueur et supporte en* B *un poids de* 10k. *Elle est soutenue horizontalement par un support* C, *situé à* 1m20 *de* A. *On propose de déterminer la pression exercée sur ce support :*

1° *En négligeant le poids de la tige ;*

2° *En tenant compte de ce poids.* (Lille, dipl. Ens. sp.)

1° En désignant par x la pression en C, on a, pour l'équation d'équilibre du levier (M., n° 113),

$$x \times AC = P \times AB$$

$$x = \frac{P \times AB}{AC} = \frac{10 \times 1,782}{1,2}$$

Rép. $x = 14^k85$.

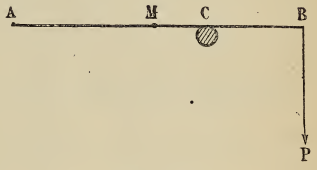


Fig. 127.

2° Le poids Q de la tige est de

$$335^g \times 1,782 = 596^g97.$$

Ce poids est appliqué en M, milieu de AB.

En prenant les moments par rapport au point A, on a

$$x \times AC = P \times AB + Q \times AM$$

Ce qui donne :

Rép. $x = 15^k293$.

Problème 95

Étant donné un levier rectiligne AOB, *mobile autour du point* O, *ayant son centre de gravité en* G, *maintenu horizontalement sous l'influence des poids* P *et* P', *suspendus à ses extrémités; on demande de trouver l'angle dont s'inclinera*

le levier, si l'on ajoute en A *un poids* p. *On suppose que* OA = 0^m30 ; OB = 0^m24 ; OG = 0^m05 ; p = 0^g4 ; *et que le poids du levier est de* 300^g. (Lille, bacc.)

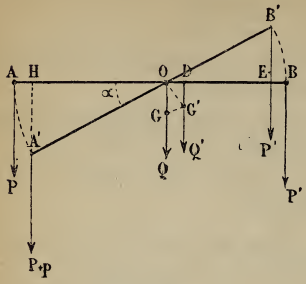


Fig. 128.

Faisons OA = l, OB = l', OG = d, et désignons par Q le poids du levier.

Le premier équilibre fournit l'équation

$$Pl = P'l'$$

Le deuxième, lorsqu'on a ajouté le poids p, donne

$$(P + p) \times OH = Q \times OD + P' \times OE$$

En désignant par α l'angle cherché, on a

$$(P + p)\, l \cos \alpha = Qd \sin \alpha + P'l' \cos \alpha$$

ou $$Pl \cos \alpha + pl \cos \alpha = Qd \sin \alpha + P'l' \cos \alpha$$

En simplifiant, puisque $Pl \cos \alpha = P'l' \cos \alpha$, on obtient

$$pl \cos \alpha = Qd \sin \alpha$$

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{Qd}$$

Remplaçant les lettres par les valeurs données, on trouve

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0{,}4 \times 0{,}30}{300 \times 0{,}05} = \frac{1}{125}$$

d'où $$\alpha = 27'30''$$

Remarque. Le centre de gravité du levier étant en dehors de AB, cette droite est une ligne idéale qui indique seulement que les points A, O, B sont en ligne droite ; le levier a une certaine largeur dont on ne s'occupe pas dans cette question.

Problème 96

Une barre AB *homogène droite, mobile autour du point* A, *fait avec l'horizontale un angle de* 30°. *Quelle est la force* F, *perpendiculaire à la barre, appliquée à l'extrémité* B, *qui la tient en équilibre dans cette position, sachant qu'à* 0^m50 *du point* A *est suspendu un poids de* 20^k ? *La barre pèse* 2^k, *et sa longueur est de* 1^m10.

Le poids P = 20^k est suspendu au point C, le point O est le milieu de la barre.

En prenant les moments par rapport au point A, on a

$$P \times AD + Q \times AE = F \times AB \quad (1)$$

Or $AD = AC \cos 30^\circ = AC \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$AE = AO \cos 30^\circ = AO \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En mettant les valeurs numériques dans l'équation (1), on obtient : $5{,}55\sqrt{3} = F \times 1{,}10$

d'où $F = \frac{5{,}55\sqrt{3}}{1{,}10} = 8^k738$

Rép. 8^k738.

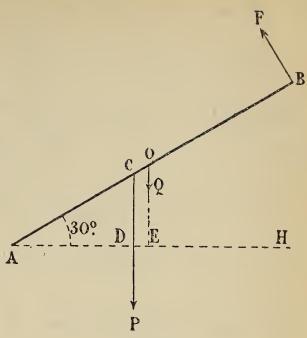


Fig. 129.

Problème 97

Une barre homogène AB, *mobile autour du point* A, *pèse* A^k *par mètre courant. Quelle doit être sa longueur pour qu'une force* F, *appliquée perpendiculairement à l'extrémité* B, *maintienne la barre en équilibre en faisant un angle de* 30° *avec l'horizontale? A la barre est suspendu un poids* P *en un point distant de* A *d'une longueur* l.

Conditions de possibilité du problème. (Montpellier, Conc. académique.)

Soit x la longueur cherchée.

Prenant les moments par rapport au point A, on a

$$P \times AD + Q \times AE = F \times AB \quad (1)$$

Mais $AD = l \cos 30^\circ = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

$$AE = \frac{x}{2} \cos 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Le poids $Q = Ax$. En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on a

$$\frac{Pl\sqrt{3}}{2} + \frac{Ax^2\sqrt{3}}{4} = Fx$$

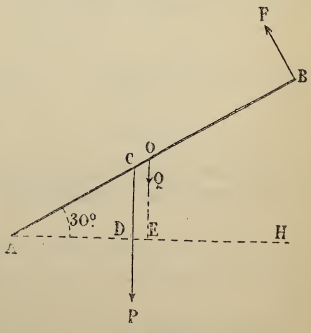


Fig. 130.

qui donne $$A\sqrt{3}\,x^2 - 4Fx + 2Pl\sqrt{3} = 0$$

Rép. $$x = \frac{2F \pm \sqrt{2\,(2F^2 - 3APl)}}{A\sqrt{3}}.$$

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait $$2F^2 - 3APl \geqq 0$$
d'où $$2F^2 \geqq 3APl$$

F peut prendre toutes les valeurs de $\sqrt{\frac{3APl}{2}}$ à $+\infty$.

Elle a pour minimum $F = \sqrt{\frac{3APl}{2}}$.

La valeur minimante est $x = \sqrt{\frac{2Pl}{A}}$.

Pour toute valeur de F plus grande que le minimum, on trouve, pour x, deux valeurs positives qui sont toutes les deux acceptables.

Les valeurs négatives de F correspondent à des valeurs négatives de x; elles ne peuvent être acceptées. On en donne la raison dans la discussion du problème 98, peu différent de celui-ci.

Problème 98

Une barre pesante AB, *dont la grosseur va en diminuant de* A *en* B, *est longue de* 1^m; *elle est en équilibre lorsqu'on prend pour point d'appui le point situé au* $^1/_3$ *de la longueur à partir de* A; *mais si on suspend un poids de* 2^k *à l'autre extrémité* B, *il faut déplacer le point d'appui de* 0^m05. *Quel est le poids de la barre?* (Lille, bacc.)

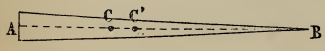


Fig. 131.

Soit x le poids de la barre, ce poids est appliqué au centre de gravité C du corps.

D'après l'énoncé,

$AC = {}^1/_3$ et $CB = {}^2/_3$

Lorsqu'on a ajouté le poids de 2^k, la barre doit être appuyée en C'; on a alors, en prenant les moments par rapport au point C',

$$x \times 0{,}05 = 2\left(\frac{2}{3} - 0{,}05\right)$$

d'où $$x = \frac{2 \times 185}{3 \times 5} = 24^k\,\frac{2}{3}$$

Rép. $24^k\ {}^2/_3$.

Problème 99

Une barre homogène ABC, *dont l'unité de longueur pèse* a^k *et dont l'extrémité* A *est fixe, supporte en un point de sa longueur un poids* P, *tandis qu'une force verticale* Q, *appliquée à l'extrémité* C, *est destinée à tenir la barre en équilibre. Étant donné* a, P, Q *et la distance* AB = 1, *on propose de déterminer* AC. *Trouver le minimum de* B *et la position correspondante de* C.

Résoudre la même question, quand on suppose le point A *placé entre* B *et* C.

Soit $AC = x$; le poids de la tige est $R = ax$.

En prenant les moments par rapport au point A, on trouve

$$P \times AB + R \times AO = Q \times AC \quad (1)$$

ou $$Pl + ax \times \frac{x}{2} = Qx$$

ou $$ax^2 - 2Qx + 2Pl = 0 \quad (2)$$

$$x = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 2aPl}}{a} \quad (3)$$

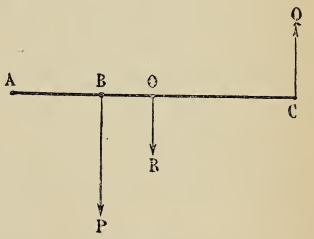


Fig. 132.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait $$Q^2 - 2aPl \geqq 0$$
ou, en décomposant en facteurs,
$$(Q - \sqrt{2aPl})(Q + \sqrt{2aPl}) \geqq 0$$

Pour que ce produit soit positif, il faut que ses deux facteurs aient même signe; ils seront tous deux positifs pour $Q > \sqrt{2aPl}$ et tous deux négatifs pour $Q < -\sqrt{2aPl}$.

La force Q peut donc prendre toutes les valeurs, excepté celles qui sont comprises entre les racines $+\sqrt{2aPl}$ et $-\sqrt{2aPl}$.

Son minimum est $Q = \sqrt{2aPl}$; il a lieu pour $x = \sqrt{\frac{2Pl}{a}}$.

Toute valeur de Q plus grande que son minimum donne pour x deux valeurs positives qui répondent toutes deux à la question.

A mesure que la force Q grandit, l'une des valeurs de x diminue de plus en plus, tandis que l'autre augmente indéfiniment.

Plus loin, nous faisons une application numérique qui rend plus sensibles ces résultats.

Remarques. 1° La fonction algébrique admet encore pour Q toutes les valeurs de $-\sqrt{2aPl}$ à $-\infty$; mais ces valeurs ne peuvent convenir à la question de mécanique.

On s'en rend compte en remarquant que le point C est alors à gauche du point A, tandis que le point B reste à droite ; or l'équation (1) ne tient pas compte du poids de la partie AB de la barre.

De plus, le terme ax^2 de l'équation (2) reste positif lorsqu'on change x en $-x$, tandis que, dans la question de mécanique, il devient négatif ; car ax, poids de la partie AC de la barre, reste positif, tandis que son bras de levier $\frac{x}{2}$ devient négatif.

Ce cas demande donc à être étudié séparément ; nous le ferons dans la deuxième partie du problème.

2° Si l'on supposait la barre sans poids, on ferait $a = 0$.

La formule (3), $x = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 2aPl}}{a}$

donnerait alors $x' = \infty$

et $x'' = \frac{0}{0}$

Ces symboles proviennent de ce que, pour résoudre l'équation (2), on a divisé les deux membres par a.

Mais si, dans cette équation (2), on fait $a = 0$, elle devient

$$Pl = Qx$$

qui est, en effet, l'équation d'équilibre du levier sans pesanteur.

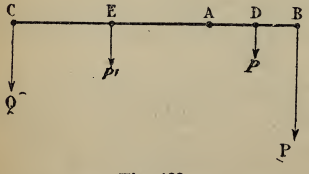


Fig. 133.

2e Cas. *Résoudre la même question quand on suppose le point* A *placé entre les deux forces* P *et* Q.

Soit

$p = al$ poids de la tige AB,

$p' = ax$ » AC.

En prenant les moments par rapport au point A, on a l'équation

$$Pl + al \times \frac{l}{2} = Qx + ax \times \frac{x}{2} \qquad (4)$$

qui devient

$$ax^2 + 2Qx - l(2P + al) = 0 \qquad (5)$$

d'où

$$x = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 + al(2P + al)}}{a} \qquad (6)$$

Discussion. Les racines sont réelles, quelle que soit la valeur de Q ; il n'y a donc ni maximum ni minimum.

On s'en rend facilement compte *à priori ;* car, à mesure que le point C se rapproche de A, la force Q doit grandir et tendre vers l'infini lorsque AC tend vers zéro.

Si, au contraire, le point C s'éloigne, Q diminue, il est égal à P pour AC = AB. La barre s'allongeant encore, Q diminue de plus en plus, il viendra un moment où le poids de la barre fera seul équilibre aux poids P et p ; Q vaut alors zéro. Si la barre continue à s'allonger, Q changera de sens et décroîtra jusqu'à $-\infty$.

Pour une valeur donnée de Q, la formule (6) fournit pour x deux valeurs de signe contraire ; la valeur positive convient seule, car la valeur négative porterait le point C à droite du point A, et nous avons vu qu'alors il faut modifier l'équation d'équilibre.

En résumé, lorsque le point A est entre les points B et C, Q peut prendre toutes les valeurs de $+\infty$ à $-\infty$, et à chaque valeur de Q correspond une seule position pour le point C.

Application. Il ne sera peut-être pas inutile de faire une application numérique de cette question.

1° *Les points* B *et* C *sont du même côté de* A.

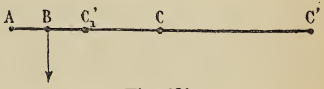


Fig. 134.

Faisons $a = 1^k$, $l = 1^m$, $P = 8^k$.

La formule (3) donne

$$x = Q \pm \sqrt{Q^2 - 17}$$

Si l'on donne à Q sa valeur minimum $Q = 4$, on trouve $x = 4$. La force $Q = 4$ devra être appliquée en C, c'est la seule position où elle puisse établir l'équilibre.

Si l'on fait $Q = 5$, on trouve $x' = 8$ et $x'' = 2$. Cette force peut être appliquée en C' ou en C'_1 et il y a équilibre, ainsi qu'il est facile de s'en assurer ; en effet,

Dans le 1er cas, on a $8 + 8 \times 4 = 5 \times 8$

» 2e » $8 + 2 \times 1 = 5 \times 2$

Si l'on fait $Q = 8\,{}^1/_2$, on trouve $x' = 16$ et $x'' = 1$; la force Q peut donc agir dans ce cas, ou en B, ou à une distance de A double de AC', etc.

2° *Le point* A *est entre les points* B *et* C.

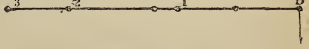


Fig. 135.

Faisons $a = 1^k$, $l = 1^m$, $P = 4^k$.

La formule (6) donne, en ne conservant que les valeurs positives de x,

$$x = -Q + \sqrt{Q^2 + (2P + 1)}$$

Si l'on fait $Q = P = 4$, on trouve $x = 1$, c'est-à-dire que AC = AB.

Si Q augmente, x diminue.

Si, par exemple, $Q = 5$, on trouve $x = 0{,}830$, la force sera appliquée en C_1.

Si, au contraire, Q diminue, x augmente. Ainsi pour $Q = 1$, $x = 2{,}162$, la force sera appliquée en C_2.

Pour $Q = 0$, on trouve $x = 3$, alors le poids de la barre AC_3 fait équilibre tout seul.

Pour $Q = -1$, on a $x = 4{,}162$.

Et ainsi de suite.

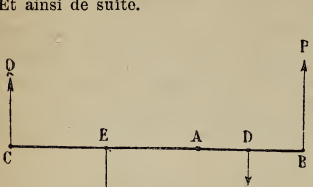


Fig. 136.

3e Cas. *On peut encore étudier le cas où la force P est en sens inverse du poids de la barre.*

L'équation d'équilibre est alors

$$Qx - \frac{ax^2}{2} = Pl - \frac{al^2}{2}$$

qui donne

$$ax^2 + 2Qx - l(2P - al) = 0$$

d'où

$$x = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - al(2P - al)}}{a} \quad (7)$$

Il y a trois cas à considérer, suivant que 2P est plus grand et plus petit que al, ou égal à al.

1° $\qquad P > \frac{al}{2}$, faisons $2P - al = k$

Le radical devient $\sqrt{Q^2 - alk}$, il n'est réel que si l'on a $Q \geqq \sqrt{alk}$.

Q a donc un minimum et peut grandir indéfiniment.

Pour toutes les valeurs de Q, supérieures au minimum, on a pour x deux valeurs positives, qui sont toutes les deux acceptables.

Ce cas est analogue à celui de la formule (3); on conçoit, en effet, que les forces P et p pourraient être remplacées par une force de sens contraire à P et placée à gauche de A. On retombe ainsi dans le premier cas étudié.

2° $\qquad P = \frac{al}{2}$

La formule (7) devient alors $x = \frac{Q \pm Q}{a}$

d'où $\qquad x' = \frac{2Q}{a} \qquad$ et $\qquad x'' = 0$

Ces valeurs sont toutes les deux acceptables.

En effet, puisque $P = \frac{al}{2}$, on a $Pl = al \times \frac{l}{2}$; ce qui exprime que la force P fait juste équilibre au poids de la partie AB de la barre; il faut donc que la force Q fasse équilibre au poids de AC, ce qui arrive lorsque

$$Q \times AC = al \times \frac{AC}{2}$$

Or cette équation est vérifiée pour $AC = \frac{2Q}{a}$ et pour $AC = 0$, c'est-à-dire pour les valeurs x' et x'' données par la formule.

3° $\qquad P < \frac{al}{2}$, faisons $2P - al = -k$

Le radical est de la forme $\sqrt{Q^2 + alk}$

Il est toujours réel, Q n'a ni minimum ni maximum.
Les valeurs négatives de x sont à rejeter.
Ce cas est analogue à celui de la formule (6).

4° *Si l'on suppose la force* P *en sens inverse du poids de la barre, et du même côté du point* A *que la force* Q,

L'équation d'équilibre est alors

$$Pl + Qx - ax \times \frac{x}{2} = 0$$

qui donne $$ax^2 - 2Qx - 2Pl = 0$$

d'où $$x = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + 2aPl}}{a}$$

Les valeurs négatives de x sont à rejeter.

Q peut prendre toutes les valeurs positives et négatives, et l'on retombe ainsi dans le 2e cas qui a fourni la formule (6). Il est facile de s'en rendre compte, car la force P peut être remplacée par une force de sens contraire qui agirait à droite du point A, et ce point A est alors placé entre les forces P et Q.

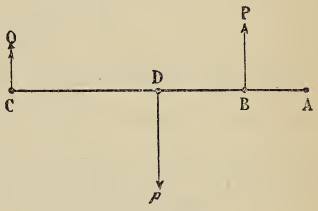


Fig. 137.

Problème 100

On pèse un corps dans l'un des plateaux d'une balance, et l'on constate que, pour lui faire équilibre, il faut placer dans l'autre un poids de 1^k ; *on met ensuite le corps dans le deuxième plateau, et on trouve qu'il faut placer* 1^k10 *dans le premier, pour établir l'équilibre. Quel est le rapport des deux bras de levier et quel est le poids réel du corps ?*

Appelons x le poids du corps, l et l' les longueurs des bras de levier.

1° Pour la 1re pesée, le corps étant à l'extrémité du levier l,

on a (M., n° 113) $$\frac{l'}{l} = \frac{x}{1} \qquad (1)$$

Dans la 2e pesée, le corps agit sur le levier l',

$$\frac{l}{l'} = \frac{x}{1,1} \qquad (2)$$

Divisant les égalités (1) et (2) membre à membre, on obtient

$$\frac{l'^2}{l^2} = 1,1 ; \text{ d'où } \frac{l'}{l} = \sqrt{1,1}$$

Rép. $\frac{l'}{l} = 1,048.$

2° En chassant les dénominateurs des équations (1) et (2), on obtient

$$l' = lx$$

et

$$l \times 1{,}1 = l'x$$

Multipliant ces égalités membre à membre, on trouve

$$x^2 = 1{,}1$$

d'où

$$x = \sqrt{1{,}1}$$

Rép. $x = 1^{k}048$.

Problème 101

Dans une balance fausse, le grand bras surpasse le petit de $\frac{1}{n}$ *de la longueur du petit. Le marchand a pesé* 100^{k} *avec cette balance, en mettant aussi souvent le corps à peser dans l'un des plateaux que dans l'autre, de manière qu'il ait pesé* 50^{k} *dans chaque plateau. A-t-il perdu ou gagné?*

En désignant par l le petit bras du levier, le grand bras est

$$l + \frac{l}{n} = l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

1° Supposons que, dans une première pesée, le marchand mette un poids de 1^{k} dans le plateau du petit bras, la marchandise sera dans le plateau du grand bras. En désignant par x le poids de la marchandise, on aura l'équation d'équilibre

$$1^{k} \times l = x \times l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

La différence avec le poids exact est

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Pour chaque kilogramme pesé de cette façon, le marchand donnera $\frac{1^{k}}{n+1}$ en moins.

2° Le poids 1^{k} est sur le plateau du grand bras, la marchandise est sur celui du petit ; y étant le poids réel de la marchandise, l'équation d'équilibre est

$$1^{k} \times l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = y \times l$$

d'où $$y = 1 + \frac{1}{n}$$

Le marchand donne alors $\frac{1^k}{n}$ en plus.

En faisant la différence

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

on trouve que pour 1^k pesé dans chaque plateau le marchand a donné $$\frac{1^k}{n(n+1)} \text{ de trop}$$

Si, comme l'indique le problème, on a pesé 50^k dans chaque plateau, la perte pour le marchand sera de

$$\frac{50^k}{n(n+1)}$$

Si l'on suppose que le grand bras soit de $^1/_{100}$ plus long que le petit, on fait $n = 100$, et la formule donne

$$\frac{50^k}{100 \times 101} = 4^g950$$

Le marchand perd alors près de 5^g sur la vente de 100^k.

Problème 102

Quelle longueur faut-il donner au grand bras CB *d'une romaine pour qu'avec un poids curseur* Q *elle puisse peser un corps de poids* P ?

On demande aussi quel est le rapport entre les deux graduations que porte la romaine ci-dessus.

1° Désignons par E le point où il faut placer le curseur pour que le levier soit horizontal, lorsqu'aucun corps n'est suspendu au crochet.

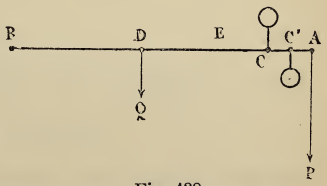


Fig. 138.

L'équation de la romaine est (M., n° 129), en faisant CA = r.

$$Q \times ED = Pr$$

d'où $$ED = \frac{Pr}{Q} = r \times \frac{P}{Q}$$

La longueur du bras BC sera donc

$$BC = CE + r \times \frac{P}{Q}$$

2° Supposons $P = 1^k$, on a

$$ED = \frac{r}{Q} = \frac{CA}{Q}$$

En suspendant par l'autre anneau, E′ étant alors le point analogue à E, on a

$$E'D' = \frac{C'A}{Q}$$

d'où

$$\frac{ED}{E'D'} = \frac{CA}{C'A}$$

Les longueurs des divisions doivent être proportionnelles aux distances respectives du crochet, aux anneaux de suspension.

Problème 103

Un fil très flexible qui pèse 0^g4 *par mètre courant a* 12^m *de long et porte un poids à chaque extrémité, l'un de* 7^g, *l'autre de* 9^g. *On propose de placer ce fil en équilibre sur la gorge d'une petite poulie très mobile et de calculer les longueurs de chacune des parties.* (Alger, brevet complet.)

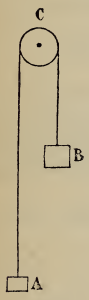


Fig. 139.

Appelons x la longueur CB, la longueur CA sera donc $12 - x$.

La traction qui s'exerce suivant CB égale le poids 9^g plus celui du brin, c'est-à-dire $x \times 0{,}4$.

La traction suivant CA égale le poids 7^g plus le poids du fil $(12 - x)\,0{,}4$

Les deux tractions étant égales, on a

$$9 + x \times 0{,}4 = 7 + (12 - x)\,0{,}4$$

$$x = \frac{28}{8} = 3^m50$$

Rép. Les longueurs sont donc 3^m50 et 8^m50.

Problème 104

On soulève un poids de 50^k *au moyen d'une corde passant sur la gorge d'une poulie fixe. Quelle sera la pression sur l'axe?*

1° *Les cordons sont parallèles ;*
2° *Ils font un angle de* 60°, *de* 20° ;
3° *Ils embrassent* $^1/_4$ *de circonférence ;*
$^3/_4$ *de circonférence.*

La charge R de l'axe est donnée par la formule (M., nº 138)

$$R = \frac{P \times AB}{r}$$

AB étant la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.

1º *Les cordons sont parallèles.*

$$\text{La corde } AB = 2r$$

d'où $$R = 2P = 2 \times 50$$

Rép. 100^k.

2º *Les cordons font un angle de* 60º.

Alors la corde AB sous-tend un angle de 120º ; elle égale $r\sqrt{3}$,

d'où $$R = \frac{P \times r\sqrt{3}}{r} = P\sqrt{3}.$$

Rép. 86^k60.

Les cordons font un angle de 20º.

$$\text{La corde } AB = 2r \sin 80^\circ$$

d'où $$R = P \times 2 \sin 80^\circ = 100 \sin 80^\circ$$

Rép. 98^k48.

3º *Les cordons embrassent* $^1/_4$ *de circonférence.*

La corde AB est le côté du carré inscrit;

d'où $$AB = r\sqrt{2}$$

et $$R = P\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$$

Rép. 70^k70.

Les cordons embrassent les $^3/_4$ *de la circonférence.*

La corde AB est encore le côté du carré inscrit.

Rép. 70^k70.

Problème 105

Quelle force faut-il employer pour soutenir un poids de 100^k *à l'aide d'une simple poulie mobile dont les cordons forment un angle droit?*

La relation $P = \dfrac{Q}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ (M., nº 141) donnera la force à employer pour soutenir ce poids ; on aura donc

$$P = \frac{100}{2 \cos 45^\circ} = \frac{100\sqrt{2}}{2}$$

Rép. $P = 70^k7$.

Problème 106

Dans une poulie mobile, quel angle doivent faire les cordons pour que

1° $P = \frac{Q}{2}$ 3° $P = 2Q$

2° $P = Q$ 4° $P = nQ$ (Discuter).

On a trouvé, pour l'équilibre de la poulie mobile (M., n° 141), la formule

$$P = \frac{Q}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

qui donne : $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2P}$, formule que nous allons appliquer aux cas indiqués dans l'énoncé.

1°

$$P = \frac{Q}{2}$$

La formule donne $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$; par suite, $\frac{\alpha}{2} = 0°$

Rép. Les cordons sont parallèles.

2°

$$P = Q$$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $\frac{\alpha}{2} = 60°$

Rép. Les cordons font un angle de 120°.

3°

$$P = 2Q$$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ d'où $\frac{\alpha}{2} = 75°31'10''$

Rép. $\alpha = 151°2'20''$.

4°

$$P = nQ$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2n}$$

Discussion. Il faut que l'on ait

$$\cos\frac{\alpha}{2} \leqq 1$$

d'où

$$\frac{1}{2n} \leqq 1$$

par suite,

$$n \geqq \frac{1}{2}$$

Lorsque $n = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = 1$, d'où $\alpha = 0^o$; les cordons sont parallèles.

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{2n}$ tend vers zéro, l'angle $\frac{\alpha}{2}$ tend vers 90° et α vers 180°. Aucune force ne peut maintenir en ligne droite la corde qui supporte la poulie.

Cos $\frac{\alpha}{2}$ peut encore prendre les valeurs négatives comprises entre — 1 et 0; mais on aurait des valeurs négatives pour n, il n'y a pas lieu de s'en occuper.

En résumé, n peut prendre toutes les valeurs plus grandes que $^1/_2$.

Problème 107

Dans le système ci-dessous, la poulie E *est mobile, la poulie* D *est fixe; quel angle feront les cordons* AB *et* BC *quand les poids* P *et* Q *se feront équilibre? — Entre quelles limites peut varier* Q ?

1° *Angle des cordons.* La formule d'équilibre de la poulie mobile est $P = \frac{Q}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

Mais, dans la question proposée, P représente le poids du corps suspendu à la poulie mobile et Q la force qui équilibre; la formule ci-dessus doit donc être écrite

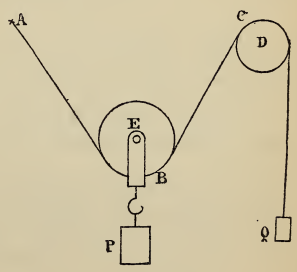


Fig. 140.

$$Q = \frac{P}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

d'où

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{P}{2Q}.$$

2° *Entre quelles limites peut varier* Q ?

En raisonnant comme au problème précédent, on trouve que Q varie de $\frac{P}{2}$ à l'infini.

Problème 108

Si les cordons AB *et* BC *font un angle de* 90° *et que* BC *et* CF *fassent un angle de* 60° :

1° *Quelle sera la traction en* A ?
2° *Quelle sera la force* F ?
3° *Quelle sera la pression sur l'axe* E ?

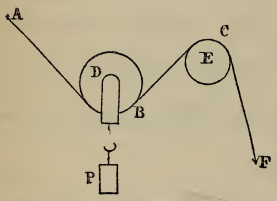


Fig. 141.

1° *Traction en* A.

La formule de l'équilibre

$$P = \frac{Q}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

exprime la tension du cordon AB, comme celle du cordon BC.

En faisant $\frac{\alpha}{2} = 45°$

on a $$P = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{Q\sqrt{2}}{2} = Q + 0{,}7071...$$

Rép. $Q \times 0{,}7071...$

2° *Quelle sera la force* F ?

Cette force, étant la traction du cordon, est égale à celle que nous venons de trouver.

3° *Quelle sera la pression sur l'axe* E ?

La formule de la pression R est

$$R = \frac{P \times AB}{r}$$

Nous venons de trouver $P = \frac{Q\sqrt{2}}{2}$

La corde $AB = r\sqrt{3}$; donc $R = P\sqrt{3} = \frac{Q\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$.

La pression en E est $Q \times 1{,}225$.

Donc $$R = P$$

$$R = \frac{Q\sqrt{2}}{2}$$

Rép. La pression en E est $Q \times 0{,}7071$.

Problème 109

Dans un treuil, le rayon de la roue sur laquelle agit tangentiellement la force est de 0^m66; *celui du cylindre,* 0^m10; *la corde a* 0^m03 *de diamètre. Quelle force fera équilibre à un poids de* 120^k? *On suppose que cette dernière force agit suivant l'axe de la corde.*

On a, pour équation du treuil (M., n° 146), $\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$.

On aura donc $$P = Q \times \frac{r}{R}$$

Or r égale 0,10, augmenté du rayon de la corde, ou

$$0{,}10 + 0{,}015 = 0{,}115$$

d'où $$P = 120 \times \frac{0{,}115}{0{,}66} = 20^k909$$

Rép. 20^k909.

Problème 110

Un poids de 2580^k *est suspendu à la chape d'une poulie mobile* D; *les cordons parallèles de cette poulie sont attachés aux cylindres de deux treuils* A *et* B; *deux forces agissent sur les manivelles de ces treuils et font équilibre au poids.*

Le rapport du rayon à la manivelle est $^3/_{35}$ *pour le treuil* A, *et* $^5/_{36}$ *pour le treuil* B.

Trouver la valeur de ces forces. (Rennes, Dipl. Ens. sp., 1879.)

Les cordons de la poulie étant parallèles, les treuils ne supportent que la moitié de la charge, c'est-à-dire 1290^k.

On a, pour le treuil A: $P = Q \times \frac{r}{R} = 1290 \times \frac{3}{35} = 110^k571$.

» » B: $P' = Q \times \frac{r'}{R'} = 1290 \times \frac{5}{36} = 179^k167$.

Rép. 110^k571
179^k167.

Problème 111

Au moyen d'un cric composé, on veut soutenir un corps pesant 400^k. *Longueur de la manivelle,* 0^m40; *rayon du premier pignon,* 0^m03; *rayon de la roue dentée,* 0^m1; *rayon du pignon qui engrène avec la crémaillère,* 0^m04. *Quelle force faut-il employer?*

On a, pour équation du cric (Ex. 76), $P = Q \frac{r \times r'}{R \times l}$.

La force à employer sera donc

$$P = 400 \times \frac{0,03 \times 0,04}{0,1 \times 0,40} = 12^k$$

Rép. 12^k.

Problème 112

Quelle force doit agir normalement à chacun des deux leviers d'une chèvre, pour faire équilibre à un corps pesant 600^k?

L'axe de la chèvre a 8^m *de longueur et fait un angle de* 60° *avec l'horizon. Le rayon du treuil est* 0^m15; *chaque barre a* 1^m40 *en dehors du cylindre; on emploie une poulie mobile.*

Cette chèvre est supposée retenue par un seul hauban, qui est dans le plan vertical de l'axe de la chèvre et qui fait un angle de 30° *avec l'horizon. Quelle est la tension de ce hauban et la pression de la chèvre sur le sol?*

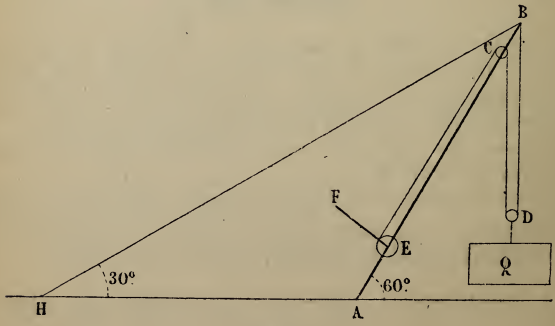


Fig. 142.

A cause de la poulie mobile D, le brin qui s'enroule sur le cylindre E n'a qu'une tension de $\frac{600^k}{2} = 300^k$.

En appliquant la formule du treuil (M., n° 146), on obtient pour la force $F = \frac{300 \times 0,15}{1,40 + 0,15} = 29,032$.

Sur chaque barre il faut exercer une force de 29k032.

Rép. 29k032.

2° *Tension du hauban.*

Le poids Q se décompose en une force M, qui appuie la chèvre AB sur le sol, et une force N, normale à la chèvre, qui tend à la faire tourner autour du point A.

Cette force $N = Q \sin \alpha$ (1)

Elle est nulle lorsque $\alpha = 0$, car alors la chèvre est verticale ; elle augmente jusqu'à Q lorsque α augmente jusqu'à 90°.

Le hauban BH doit équilibrer la force N ; s'il était dirigé suivant BN, sa tension serait N ; mais ordinairement il fait avec cette direction un angle β ; on a, dans le triangle BTN,

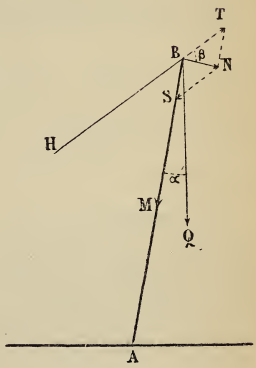


Fig. 143.

$$BN = BT \cos \beta$$

ou

$$N = T \cos \beta$$

par suite,

$$T = \frac{N}{\cos \beta} \qquad (2)$$

On voit que cette tension égale N, pour $\alpha = 0$; qu'elle prend la même valeur, que l'angle β soit au-dessus ou au-dessous de BN ; qu'elle grandit indéfiniment lorsque la direction du hauban se rapproche de celle de la chèvre.

Dans l'équation (2), remplaçons N par sa valeur (1) ; on a

$$T = \frac{Q \sin \alpha}{\cos \beta} \qquad (3)$$

valeur de la tension en fonction des données.

3° *Pression de la chèvre sur le sol.*

Cette pression P est la somme des forces BM et BS.

On a donc $P = M + S$

Or $M = Q \cos \alpha$

On voit que M peut varier de Q à 0, lorsque α varie de 0° à 90°.

On a aussi $$\frac{S}{\sin NBT} = \frac{N}{\sin SBT}$$

ou $$\frac{S}{\sin \beta} = \frac{N}{\cos \beta}$$

d'où $$S = N \operatorname{tg} \beta$$

Cette seconde partie S de la pression sur le sol peut donc croître au delà de toute limite, lorsque β croît jusqu'à 90°.

En remplaçant N par sa valeur (1), on obtient :

$$S = Q \sin \alpha \operatorname{tg} \beta$$

d'où la pression $$P = Q (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \beta) \qquad (4)$$

qui se transforme en $$P = Q \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta}$$

et devient $$P = Q \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \beta} \qquad (5)$$

Les formules (4) et (5) montrent que pour un angle α donné, la valeur de P augmente avec l'angle β ; mais lorsque l'angle β devient négatif, la composante S est aussi négative, et la pression totale P diminue. Cette pression P devient nulle pour $\beta = -(90° - \alpha)$, le hauban est alors vertical. Si β continue à croître en valeur absolue, P devient négative et tend à soulever AB.

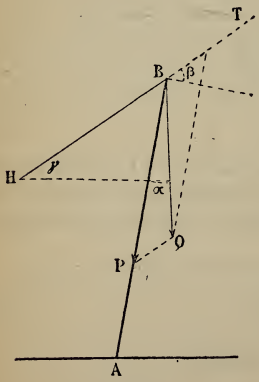


Fig. 144.

Remarques. I. On serait arrivé plus rapidement aux formules (3) et (5), en décomposant le poids Q en deux forces dirigées suivant BT et BP. Ce qui donne

$$T = Q \frac{\sin PBQ}{\sin PBT} = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

$$P = Q \frac{\sin QBT}{\sin PBT} = Q \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

Nous avons préféré la marche précédente, comme mettant mieux en relief l'action des forces.

II. On peut encore exprimer T et P en fonction de l'angle γ que le hauban fait avec l'horizontale.

On trouve $$T = Q \frac{\sin PBQ}{\sin PBT}$$

$$P = Q \frac{\sin QBT}{\sin PBT}$$

Mais $PBQ = \alpha$, $PBT = 90^o + (\alpha + \gamma)$, $QBT = 90^o + \gamma$,

ce qui donne $$T = Q \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha + \gamma)} \quad (6)$$

$$P = Q \frac{\cos \gamma}{\cos (\alpha + \gamma)} \quad (7)$$

formules qu'il serait facile de discuter.

Application. En mettant dans les formules (6) et (7) les données du problème, on obtient

$$T = 600^k \frac{\sin 30^o}{\cos 60^o} = 600^k$$

$$P = 600^k \frac{\cos 30^o}{\cos 60^o} = 600^k \times \sqrt{3} = 1\,039^k$$

Rép. Tension du hauban, 600^k.
Pression sur le sol, $1\,039^k$.

Remarque. On voit que, dans les conditions de l'énoncé, la chèvre serait fort mal installée, les pressions et les tensions étant trop fortes ; cela tient, comme nous venons de l'étudier, à la trop grande inclinaison de la chèvre et du hauban. Dans la pratique, on incline peu la chèvre et on attache les haubans assez loin pour diminuer l'angle β, et par suite leur tension.

Problème 113

Sur un plan incliné dont la base est double de la hauteur, on place un corps du poids de 40^k. Quelle force lui fera équilibre ?

1° *Si elle est parallèle au plan ;*
2° *Si elle est horizontale ;*
3° *Si elle est verticale ;*
4° *Si elle fait un angle de 20° avec le plan.*

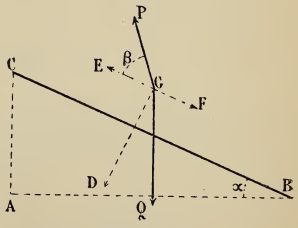


Fig. 145.

1° *La force est parallèle au plan.*

En appliquant la formule (M., 159) $P = Q \frac{h}{l}$,

on a $$P = 40 \times \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4h^2}} = 40 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 17{,}888$$

Rép. 17^k888.

2° *La force est horizontale.*

On a (M., n° 160) $$P = Q\frac{h}{b}$$

qui devient $$P = 40 \times \frac{1}{2} = 20$$

Rép. 20^k.

3° *La force est verticale.*

La formule générale (M., n° 161) est $P = Q\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$.

Dans ce cas, $$\beta = 90° - \alpha$$

d'où $$\cos\beta = \sin\alpha$$

par suite, $$P = Q = 40$$

Rép. 40^k.

4° *La force fait un angle de* 20° *avec le plan.*

On a $$P = Q\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

Il faut trouver la valeur de l'angle α ; or, dans le triangle rectangle CAB, on a $AB = 2AC$

mais $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

ce qui donne $$\alpha = 26°34'$$

$$P = 40\frac{\sin 26°34'}{\cos 20°} = 19{,}03$$

Rép. 19^k03.

Problème 114

Pressions sur le plan dans chacune des questions du n° 113

1° *La force est parallèle au plan.*

On a (M., 159) $$N = Q\frac{b}{l}$$

Or $$l = \sqrt{b^2 + h^2} = h\sqrt{5}$$

et $$b = 2h$$

Donc $$N = Q \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 40 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 35{,}776$$

Rép. 35^k776.

2° *La force est horizontale.*

On a (M., n° 160) $$N = Q\frac{l}{b}$$

qui donne $$N = Q\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$N = 20\sqrt{5} = 44{,}720$$

Rép. 44^k720.

3° *La force est verticale.*

La pression N sur le plan incliné est donnée par la formule

(M., n° 161) $$N = Q\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$

Dans ce cas, $$\beta = 90^\circ - \alpha$$

par suite, $$\alpha + \beta = 90^\circ$$

la formule devient $$N = Q\frac{\cos 90^\circ}{\sin\alpha} = 0$$

Rép. La pression est nulle, ce qui est évident *à priori*.

4° *La force fait un angle de* 20° *avec le plan.*

On a (M., 161) $$N = Q\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$

Dans le problème précédent on a trouvé

$$\alpha = 26^\circ 34'$$

la formule ci-dessus devient

$$N = 40\frac{\cos 46^\circ 34'}{\cos 20^\circ} = 29{,}265$$

Rép. 29^k26.

Problème 115

Une force de 50^k *parallèle à la longueur d'un plan incliné tient en équilibre un poids de* 80^k ; *la hauteur du plan est de* 20^m. *On demande sa base et sa longueur.*

1° La formule (M., n° 159) $P = Q\frac{h}{l}$ donnera la longueur du plan incliné ; nous aurons donc

$$l = \frac{Qh}{P} = \frac{80 \times 20}{50} = 32^m$$

2° On a $$b^2 = l^2 - h^2 = (32)^2 - (20)^2 = 624$$

Rép. base $= 24^m979$.

longueur $= 32^m$.

Problème 116

Quel est l'angle d'un plan incliné, si une force de 10^k *équilibre un poids de* 20^k?

1° *La force est parallèle au plan ;*

2° » *est horizontale ;*

3° » *fait avec le plan un angle double de l'angle du plan.*

1° *La force est parallèle au plan.*

La formule $$P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

devient $$P = Q \sin \alpha$$

par suite, $$\sin \alpha = \frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$$

Rép. $\alpha = 30°$.

2° *La force est horizontale.*

La même formule devient

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha$$

par suite, $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{Q} = \frac{1}{2}$$

Rép. $\alpha = 26°33'$.

3° *La force fait avec le plan un angle double de l'angle du plan.*

La formule $$P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

devient $$1 = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha} = 2 \frac{\sin \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$$

d'où $$2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0$$

ce qui donne $$\sin \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$$

La valeur négative du radical, donnant pour $\sin \alpha$ une valeur plus grande que 1 en valeur absolue, est à rejeter ;

il reste $$\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Donc $$\alpha = 21°28'$$

Rép. $\alpha = 21°28'$.

Problème 117

Un navire du poids de 600 *tonnes doit être hélé sur une cale de construction dont la pente est* $^1/_{12}$. *Quelle puissance motrice faudrait-il employer s'il n'y avait pas de frottement ?*

En employant la formule (M., 159) $P = Q\frac{h}{l}$,

dans laquelle $l = \sqrt{h^2 + 144h^2} = h\sqrt{145}$

on a $P = Q\frac{1}{\sqrt{145}} = Q\frac{\sqrt{145}}{145}$

$$P = 600^t \times \frac{\sqrt{145}}{145} = 49^t827$$

Rép. $P = 49827^k$.

Problème 118

1° *Valeur de l'angle* α (fig. 146), *pour que les poids* P *et* Q *se fassent équilibre ;*

2° *Pour quelle valeur de* α, Q *sera-t-il moitié de* P ?

3° *Valeur de* α, *pour que la différence de* P *et de* Q *soit* p ;

4° ..... *pour que* $\frac{P}{Q} = K$.

1° En appliquant aux données la formule trouvée (M., n° 162, 2°), on a

$$Q = P \sin \alpha \qquad (1)$$

Rép. $\sin \alpha = \frac{Q}{P}$ (2)

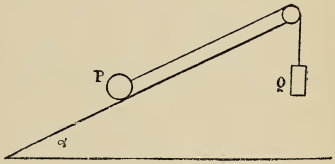


Fig. 146.

On trouvera, pour α, une valeur acceptable, tant que P sera plus grand que Q.

2° Si dans la formule (2) on fait $P = 2Q$,

on obtient $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

Rép. $\alpha = 30°$.

3° Puisque l'on a $P - Q = p$

en remplaçant Q par la valeur (1),

on a $P - P \sin \alpha = p$

d'où $\sin \alpha = \frac{P - p}{P}$

Pour $p = 0$, on trouve $\sin \alpha = 1$; d'où $\alpha = 90^\circ$
» $p = P$, » $\sin \alpha = 0$; » $\alpha = 0$
» $p = \frac{P}{2}$, » $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; » $\alpha = 30^\circ$

c'est le cas précédent.

4° De la formule $Q = P \sin \alpha$

on tire $\sin \alpha = \frac{Q}{P} = \frac{1}{K}$

ce qui permet de déterminer l'angle α, tant que l'on aura $K \geqq 1$.

Problème 119

Un chemin de fer à câble central, incliné de $^1/_4$, porte un wagon de 10 tonnes :

1° *Tension du câble qui tient le wagon en équilibre ;*
2° *Pression sur les rails.*

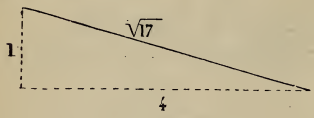


Fig. 147.

1° *Tension du câble.*

La relation $P = Q \times \frac{h}{l}$

donne $P = Q \frac{h}{\sqrt{h^2 + 164^2}} = Q \times \frac{1}{\sqrt{17}}$

d'où $P = 10\,000 \times \frac{\sqrt{17}}{17} = 2\,425^k$

2° *Pression sur les rails.*

La relation $N = Q \times \frac{b}{l}$

donne $N = 10\,000 \times 4 \times \frac{\sqrt{17}}{17} = 9\,701^k$

Rép. $9\,701^k$.

Problème 120

Un individu pesant 50^k monte une échelle inclinée de 70°.

1° *Quelle est la force totale qui tend à faire fléchir les montants ?*

2° *Pression contre le mur et le sol, l'individu étant au milieu de l'échelle ?*

3° *Variation de ces pressions lorsque l'individu se déplace le long de l'échelle ?*

4° *Quelle force horizontale, appliquée au pied de l'échelle, l'empêche de glisser, et comment varie cette force lorsque l'individu monte le long de l'échelle?*

1° *Pression sur les montants.*

Le poids de l'individu se décompose en deux forces : l'une qui le ferait glisser le long de l'échelle et qui est détruite par la résistance des barreaux, l'autre qui appuie sur les montants.

On a (M., n° 162, 2°) $N = Q \cos \alpha$

qui donne $N = 50 \times \cos 70° = 17{,}101$

Rép. 17^k101.

2° *Pression contre le mur et sur le sol ; le poids est au milieu de l'échelle.*

Le poids P se décompose en deux forces verticales, égales à $\frac{P}{2}$, appliquées en A et en B.

La force $D = \frac{P}{2}$ se décompose en deux autres : l'une N, normale au mur ; l'autre F, dirigée suivant AB.

On a $N = D \operatorname{cotg} \alpha$

par suite,

$$N = \frac{P}{2} \operatorname{cotg} \alpha \qquad (1)$$

La composante F se transporte en B, où elle devient BF′ et se décompose suivant BH et BE, et l'on a

$$E = F' \sin \alpha$$

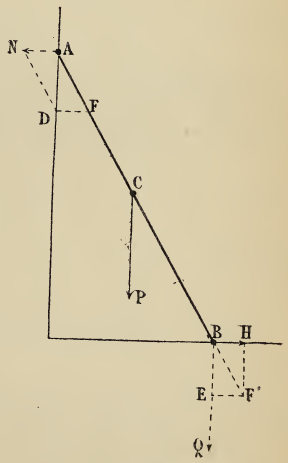


Fig. 148.

mais $$F' = F = \frac{D}{\sin \alpha}$$

Donc $$E = \frac{D}{\sin \alpha} \times \sin \alpha = D = \frac{P}{2}$$

Cette force $E = \frac{P}{2}$ s'ajoute à $\frac{P}{2}$, déjà appliquée en B ; la pression Q, sur le sol, est donc égale à P.

En faisant $P = 50^k$ et $\alpha = 70^o$

on obtient $N = 25 \times \text{cotg } 70^o = 9^k099$

Rép. Pression contre le mur $N = 9^k099$.

» le sol $Q = 50^k$.

3° *Variations de* N *et de* Q *quand le point* C *se déplace.*

Désignons par l la longueur de l'échelle et faisons $BC = kl$, k étant une fraction.

Le poids P se décompose en deux forces, p en A et p' en B, de manière que l'on ait

$$\frac{p}{BC} = \frac{P}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{p'}{AC} = \frac{P}{AB}$$

d'où
$$p = P\frac{kl}{l} = Pk$$

et
$$p' = P\frac{(1-k)\,l}{l} = P\,(1-k)$$

Mais on a
$$N = p \text{ cotg } \alpha$$
$$N = Pk \text{ cotg } \alpha$$

La pression en B contre le sol est une force verticale Q, qui se compose de p' et de la composante verticale de F, transportée de A en B, où elle est devenue F' ; calculons cette composante E :

$$E = F' \sin \alpha$$

Mais
$$F' = F = \frac{p}{\sin \alpha}$$

d'où
$$E = p$$

par suite,
$$Q = p' + p$$

ou
$$Q = P$$

La pression sur le sol est donc toujours égale à P.

Il reste à étudier les variations de N, suivant les différentes valeurs de k.

Si $k = 0$, $N = 0$, la pression contre le mur est nulle, lorsque C est au bas de l'échelle.

Si k grandit, N grandit dans le même rapport.

Si $k = {}^1/_2$, $N = \frac{P}{2} \text{ cotg } \alpha$, valeur obtenue plus haut.

Si $k = 1$, $N = P \text{ cotg } \alpha$.

On voit donc que la pression contre le mur augmente à mesure qu'on s'élève le long d'une échelle.

4° *Force qui empêche l'échelle de glisser contre le sol parfaitement poli.*

La force qui tend à faire glisser l'échelle est BH. On a

$$H = F' \cos \alpha$$

Mais $$F' = \frac{p}{\sin \alpha}$$

Donc $$H = p \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = p \operatorname{cotg} \alpha$$

Rép. $H = p \operatorname{cotg} \alpha$.

Variations de H. En remplaçant p par la valeur Pk, on a

$$H = Pk \operatorname{cotg} \alpha$$

Cette force est égale, mais de sens contraire à N, pression contre le mur.

Elle est donc nulle lorsque le point C est au bas de l'échelle ; à mesure qu'il s'élève, H grandit, ce qui exige que le pied soit mieux appuyé, pour éviter le glissement.

Remarque. On pourrait demander les variations de Q, N, H, lorsqu'on fait varier l'angle α.

La pression Q ne change pas, elle est constamment égale au poids P du corps.

La pression N contre le mur égale la force H à employer pour éviter le glissement.

Ces forces N et H diminuent lorsque α augmente, et deviennent nulles pour $\alpha = 90°$.

Problème 121

Le poids d'un corps, la force qu'il faut pour le maintenir en équilibre sur un plan incliné, la pression sur ce plan sont des forces qui sont entre elles comme 4, 3, 2 : quel est l'angle du plan et l'angle de la force avec la direction du plan ?

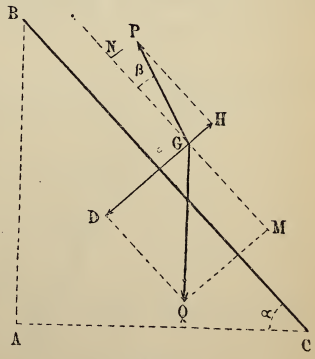


Fig. 149.

Désignons par a, b, c les nombres auxquels les forces Q, P, N sont proportionnelles ; on peut écrire

$$Q = ak, \quad P = bk, \quad N = ck$$

Les formules du plan incliné (M., nº 161) donnent

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha, \quad N = Q \cos \alpha - P \sin \beta$$

qui deviennent $$b \cos \beta = a \sin \alpha \qquad (1)$$
et $$c = a \cos \alpha - b \sin \beta \qquad (2)$$

En les élevant au carré, on a

$$b^2 \cos^2 \beta = a^2 \sin^2 \alpha$$
$$b^2 \sin^2 \beta = a^2 \cos^2 \alpha - 2ac \cos \alpha + c^2$$

Additionnant ces équations, on trouve

$$b^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2ac \cos \alpha + c^2$$

qui devient $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

d'où $$\cos \alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad (3)$$

On tire de (2) $$\sin \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc} \qquad (4)$$

Pour rendre la formule (4) calculable par logarithmes, on fait $a + b + c = 2p$ et l'on obtient (Trig., n° 79)

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - b)}{ac}}$$

Remarques. 1° On aurait écrit immédiatement cette formule, en remarquant que les forces P, Q et la réaction du plan sont en équilibre. L'intensité de la réaction est N, les forces P et Q ont une résultante d'intensité N ; P, Q, N sont donc les trois côtés d'un triangle semblable à celui qui a pour côtés b, a, c. On est ramené à trouver les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés.

2° Pour que le problème soit possible, il faut que a, b, c, puissent mesurer les trois côtés d'un triangle.

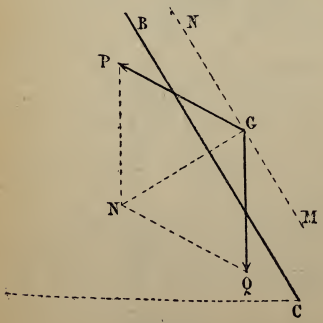


Fig. 150.

Application. I. En faisant $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$, on trouve les réponses à la question posée.

Rép. $\alpha = 46°34'$
$\beta = 14°28'$.

II. Si l'on voulait que les trois forces fussent égales, on ferait $a = b = c$, ce qui donnerait

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ ; d'où } \alpha = 60°$$

par suite,

$$\sin \beta = -\frac{1}{2} \text{ et } \beta = -30°$$

On voit en effet, sur la figure, que, dans ce cas, les forces P, Q, N, sont égales.

Problème 122

Deux forces P *et* Q, *l'une parallèle à la base d'un plan incliné, l'autre à sa longueur, peuvent séparément maintenir le même corps en équilibre sur le plan. Quel est le poids de ce corps, le rapport des forces* P *et* Q, *et leur résultante?*

1° *Poids du corps.*

Désignons par x le poids du corps, on a (M., 162, 3°)

$$P = x \operatorname{tg} \alpha \qquad (1)$$

et (M., 162, 2°)

$$Q = x \sin \alpha \qquad (2)$$

En divisant (2) par (1), on obtient

$$\frac{Q}{P} = \cos \alpha \qquad (3)$$

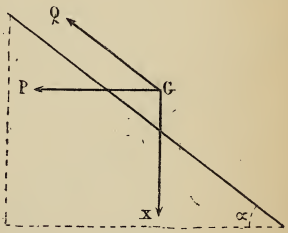


Fig. 151.

Les formules (2) et (3) donnent

$$\frac{Q^2}{x^2} + \frac{Q^2}{P^2} = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

d'où

$$x = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}} \qquad (4)$$

Le poids ne pouvant être négatif, on a rejeté le signe — du radical.

On trouve une valeur pour x tant que P est plus grand que Q. On a vu (M., n° 162, 2°) qu'il doit toujours en être ainsi.

2° *Rapport des forces.*

Il est donné par l'équation (3)

$$\frac{Q}{P} = \cos \alpha$$

3° *Résultante des deux forces.*

Les forces P et Q font un angle α ; leur résultante R est donc donnée par la relation (M., n° 28)

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$$

Mais l'équation (3) donne

$$\text{Cos}\ \alpha = \frac{Q}{P}$$

d'où

$$R^2 = P^2 + 3Q^2 \qquad (5)$$

Problème 123

Trois forces, égales chacune au tiers du poids d'un corps, le maintiennent en équilibre ; l'une est verticale, l'autre est parallèle au plan, la troisième est horizontale : quelle est l'inclinaison du plan?

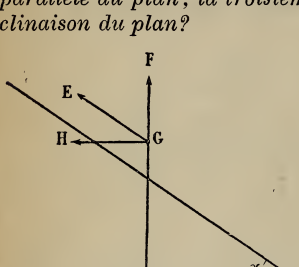


Fig. 152.

Il y a équilibre, si les composantes, parallèles au plan incliné de trois forces F, E, H, ont une somme égale à la composante du poids Q.

On doit donc avoir

$$F \sin\alpha + E + H \cos\alpha = Q \sin\alpha \quad (1)$$

En remplaçant F, E, H par $\frac{Q}{2}$, l'équation (1) devient

$$\frac{Q}{3}(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha) = Q \sin\alpha$$

qui donne

$$1 + \cos\alpha = 2 \sin\alpha^{\star} \qquad (2)$$

On en tire

$$\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 2 \sin\alpha - 1$$

$$1 - \sin^2\alpha = 4 \sin^2\alpha - 4 \sin\alpha + 1$$

$$5 \sin^2\alpha - 4 \sin\alpha = 0$$

$$\sin\alpha\,(5 \sin\alpha - 4) = 0$$

qui est satisfaite pour $\sin\alpha = 0$

et $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

La première valeur de sin α correspond à un plan horizontal ; le corps est en effet en équilibre sous l'action des forces données.

La seconde valeur de sin α donne

Rép. $\alpha = 53°8'$.

---

* Cette équation (2) peut encore se résoudre ainsi :

$$2 \cos^2\frac{\alpha}{2} = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$$

d'où

$$\text{cotg}\ \frac{\alpha}{2} = 2$$

On peut encore dire : Le corps étant en équilibre sous l'action des forces, D, E, F, Q et de la réaction N du plan, les projections de ces forces sur un axe quelconque ont une somme nulle.

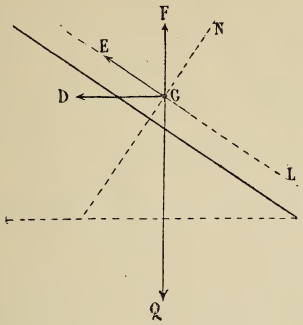


Fig 153.

Projetons sur l'axe GL parallèle au plan, nous aurons

$$D \cos \alpha + E + F \sin \alpha - Q \sin \alpha = 0$$

ou $$\frac{Q}{3} \cos \alpha + \frac{Q}{3} + \frac{Q}{3} \sin \alpha - Q \sin \alpha = 0$$

qui devient $$1 + \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

C'est l'équation (2) obtenue précédemment.

Problème 124

Une force P, *faisant avec un plan incliné un angle* β, *met un corps de poids* Q *en équilibre. Une force horizontale* P′ *met ce même corps en équilibre. Quel est le poids du corps?*

Désignons par α l'inclinaison du plan, on a les relations :

$$P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \qquad (1)$$

$$P' = Q \operatorname{tg} \alpha = Q \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$$

$$P'^2 = Q^2 \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \qquad (2)$$

De (1) on tire $\sin \alpha = \dfrac{P \cos \beta}{Q}$

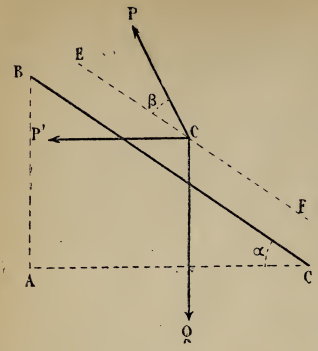


Fig. 154.

Remplaçant dans (2), il vient

$$P'^2 = \frac{Q^2 \times P^2 \cos^2 \beta}{Q^2 - P^2 \cos^2 \beta}$$

ou

$$P'^2 Q^2 - P^2 P'^2 \cos^2 \beta = Q^2 P^2 \cos^2 \beta$$

d'où $Q^2 = \dfrac{P^2 P'^2 \cos^2 \beta}{P'^2 - P^2 \cos^2 \beta}$

$$Q = \frac{P.P' \cos \beta}{\sqrt{P'^2 - P^2 \cos^2 \beta}}$$

Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$P' > P \cos \beta$$

C'est qu'en effet P cos β est la force parallèle au plan incliné, qui produit le même effet que P ; on sait que, dans cette direction (M., nº 162), la force est minimum, elle doit donc être plus petite que toute force agissant dans une autre direction et par conséquent que P'.

Problème 125

Sur un plan incliné d'un angle α, un corps est équilibré par une force F, *faisant avec la longueur du plan un angle* β ; *si l'angle α diminue de* a°, *la force diminue d'une quantité* f, *tout en conservant la même direction. Quel est le poids du corps et de la force* F ?

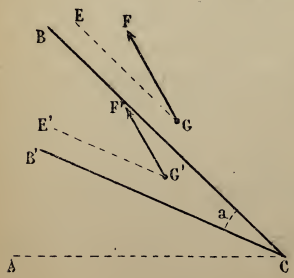


Fig. 155.

La force F faisant avec le premier plan un angle β, la force F' qui lui est parallèle fera un angle $(\beta + a)$ avec le 2e plan ; on aura donc les équations

$$F = \frac{Q \sin \alpha}{\cos \beta}$$

et $F' = \dfrac{Q \sin (\alpha - a)}{\cos (\beta + a)}$

d'où

$$\frac{Q \sin \alpha}{\cos \beta} - \frac{Q \sin (\alpha - a)}{\cos (\beta + a)} = f$$

qui donne

$$Q = \frac{f}{\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - \frac{\sin(\alpha - a)}{\cos\beta + a)}} = f\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \times \frac{\cos(\beta + a)}{\cos(\alpha + a)}$$

d'où $$F = f\frac{\cos(\beta + a)}{\cos(\alpha + a)}$$

Ayant le poids Q, on trouve F sans difficulté.

Problème 126

Deux plans inclinés sont rapprochés par leur arête culminante: ils font entre eux un angle de 110°. Leurs charges sont retenues l'une à l'autre par une corde passant par une poulie de renvoi et qui reste parallèle à chacun des plans. Les charges sont de 342k et 567k. Elles restent en équilibre. On propose de calculer les angles des plans inclinés avec l'horizon. (Douai, Diplôme.)

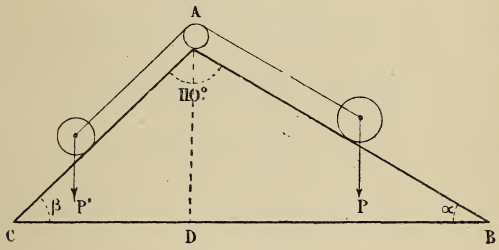


Fig. 156.

1re Méthode. On doit avoir :

$$P' \sin\beta = P \sin\alpha \qquad (1)$$

$$\alpha + \beta = 180 - 110 = 70^\circ \qquad (2)$$

De (2) on tire $\alpha = 70 - \beta$

donc $P' \sin\beta = P \sin(70 - \beta)$

ou $P' \sin\beta = P(\sin 70 \cos\beta - \sin\beta \cos 70)$

Divisant par $\sin\beta$, il vient

$$P' = P \sin 70 \operatorname{cotg}\beta - P \cos 70$$

par suite, $$\operatorname{cotg}\beta = \frac{P' + P\cos 70}{P \sin 70}$$

on aurait de même $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{P + P' \cos 70}{P' \sin 70}$

On en tire, en remplaçant P et P′ par leur valeur,

Rép. $\alpha = 25^\circ 10'$.

$\beta = 44^\circ 50'$.

2e Méthode. On a pour équation d'équilibre

$$P \sin \alpha = P' \sin \beta \qquad (1)$$

par suite,

$$\frac{P}{P'} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

ou

$$\frac{P + P'}{P - P'} = \frac{\sin \beta + \sin \alpha}{\sin \beta - \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \alpha)} \qquad (2)$$

par suite,

$$\frac{P + P'}{P - P'} = \frac{\operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \alpha)}$$

d'où

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \alpha) = \frac{P - P'}{P + P'} \operatorname{tg} 35^\circ$$

On en tire $\beta - \alpha = 19^\circ 39' 55''$

On a donc $\alpha = 25^\circ 10' 2'' 2$

et $\beta = 44^\circ 49' 57'' 8$

3e Méthode. Les cordons étant parallèles aux plans inclinés, leurs tensions sont exprimées par $\frac{Ph}{l}$ et $\frac{P'h}{l'}$; comme elles sont égales, on a $\frac{Ph}{l} = \frac{P'h}{l'}$

d'où

$$\frac{P}{P'} = \frac{l}{l'}$$

Le triangle construit avec P, P′ comme côtés comprenant l'angle A, sera semblable au triangle CAB.

On est donc ramené à résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris; ce qui permet de poser immédiatement les formules (1) et (2) ci-dessus.

Problème 127

En agissant sur la manivelle d'un cabestan établi au sommet d'un plan incliné AB, *on maintient en équilibre sur ce plan un poids* M *de* 2 580k. *Quel est l'effort que l'on exerce sur la manivelle du cabestan, sachant que la longueur* AB *du plan incliné vaut deux fois et demie sa hauteur* AC, *et que le rayon du treuil est les* $^2/_9$ *de la longueur de la manivelle ? On admet que, grâce à la poulie de renvoi* D, *la corde* DM *se maintient parallèle à* AB. (Nantes, Diplôme, 1877 et 1879.)

On a, par le plan incliné,

$$F = M \times \frac{h}{l} \qquad (1)$$

Par le cabestan, on a

$$F' = F \times \frac{r}{R} \qquad (2)$$

Remplaçons dans (2) F par sa valeur, il vient

$$F' = M \times \frac{rh}{Rl}$$

d'où

$$F' = \frac{2 \times 2 \times 2580}{5 \times 9} = 229\frac{1}{3}$$

Rép. $229^k \frac{1}{3}$.

Problèmes divers.

Problème 128

Une boîte cubique n'a que cinq faces, elle est suspendue par un des sommets de la face ouverte. Quelle est la position d'équilibre ?

Soit ABC la face ouverte, la position d'équilibre sera déterminée par la connaissance de l'angle α que fait l'arête latérale AA' d'attache, avec la verticale AK.

La boîte sera en équilibre, quand le centre de gravité G des cinq faces sera sur la verticale du point A (M., nº 99).

Or l'ensemble des quatre faces latérales a son centre de gravité en O, centre du cube, et celui de la base est en D', centre

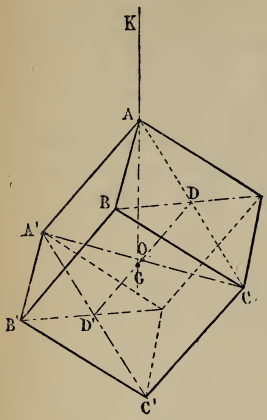


Fig. 157.

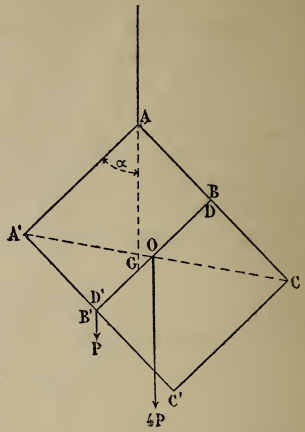


Fig. 158.

de cette base. En ces points sont respectivement des forces 4P et P, P désignant le poids d'une des faces. Le point d'application G, de leur résultante, est tel que l'on a $GO = {}^1/_4\, D'G$

d'où $$GO = \frac{1}{5} D'O$$

et $$DG = DO + \frac{1}{5} D'O = \frac{a}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{5} a$$

a représentant l'arête du cube.

Le triangle AGD fournit

$$AD = DG \times \operatorname{tg} AGD = DG \operatorname{tg} \alpha$$

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{DG} = \frac{a \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{5} a} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

d'où l'on tire

Rép. $\alpha = 49^\circ\ 41'\ 4''$.

Problème 129

Une barre AB *est appuyée sur un plan vertical et sur un plan horizontal parfaitement polis. Quelle force faut-il appliquer en* B *pour l'empêcher de glisser? Le poids de la barre est* P.

1re Méthode. Soit α l'angle de cette barre avec l'horizon.

Le poids P de la barre peut se décomposer en deux forces égales à $\frac{P}{2}$ appliquées en A et en B; la dernière est détruite par la réaction du plan. La force $\frac{P}{2}$, appliquée en A, se décompose en deux : l'une N normale au plan vertical, et qui est détruite par ce plan ; l'autre T, que l'on peut transporter en B.

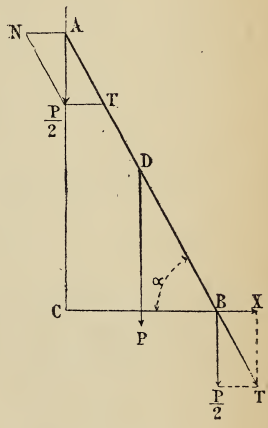


Fig. 159.

Cette force T peut à son tour se décomposer en deux: l'une verticale, qui sera détruite par la réaction du plan horizontal; l'autre X horizontale, qui ferait glisser le point B, et qui est juste égale et contraire à la force F qu'il s'agit de trouver.

La valeur de cette force est $X = T \cos \alpha$.

Or $$T = \frac{P}{2} \times \frac{1}{\sin \alpha}$$

d'où $$X = \frac{P}{2} \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{P}{2} \times \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Rép. *La force qu'il faudra appliquer en* B *est*

$$F = \frac{P}{2} \times \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Remarque. 1° Si la barre est verticale, F doit être nulle; c'est en effet ce que montre la formule, car alors

$$\alpha = 90, \quad \operatorname{tg} \alpha = \infty$$

2° A mesure que la barre s'incline, α diminue, sa tangente également, donc la force F augmente, et elle devient très grande

pour α très petit ; on sait, en effet, que plus une échelle est inclinée, plus il convient d'appuyer le pied de l'échelle pour qu'on puisse s'en servir avec sécurité.

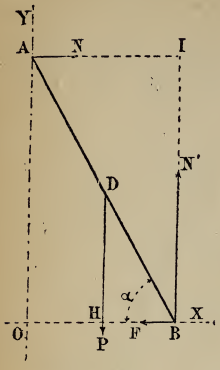


Fig. 160.

2e Méthode. On peut arriver à la détermination de F par un procédé plus rapide et plus rationnel, en faisant usage du théorème établi à l'exercice n° 43.

Si l'on supprime les deux plans, il faut les remplacer par les réactions N, N′ qu'ils exercent sur la barre.

Celle-ci sera en équilibre sous l'action de son poids P, des deux réactions N, N′ et de la force F qu'il s'agit de trouver.

Puisque ces forces se font équilibre, projetées sur les axes OX et OY, elles doivent fournir pour chacun de ces axes une somme nulle ; et leurs moments par rapport à un point *quelconque*, B par exemple, doivent avoir une somme également nulle. De là les trois équations

Projections sur l'axe des X, $\quad N - F = 0 \quad$ (1) *

» » Y, $\quad P - N' = 0 \quad$ (2)

moments (point B), $\quad P \times HB - N \times IB = 0 \quad$ (3) **

La relation (3) peut s'écrire

$$P \times \frac{AB}{2} \cos \alpha = N \times AB \sin \alpha$$

d'où

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2N}$$

De (1) on tire $\quad N = F ; \quad$ donc $\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{2F}$

d'où

$$F = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

ce qui est bien le résultat obtenu précédemment.

Remarque. On a choisi le point B pour centre des moments, parce que, de cette manière, les moments de F et de N′ sont nuls tous les deux. On eût pu prendre tout autre point.

Problème supplémentaire.

Nous allons généraliser la question précédente, en supposant *la barre appliquée contre un mur en talus.*

---

* Sur l'axe des X, la projection de la force N est égale à cette force ; celle de F est égale à F, et de sens contraire à celle de la projection N ; les projections des deux autres forces sur cet axe sont nulles.

** Les moments de F et de N′ sont nuls, puisque ces forces passent par le centre B des moments.

La barre est en équilibre sous l'action de son poids P, des réactions N du mur, N′ du sol et de la force F qui l'empêche de glisser.

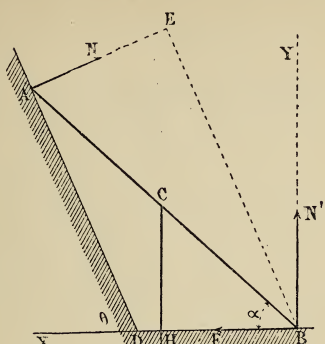


Fig. 161.

Nous allons écrire que la somme des projections de ces forces sur BX et sur BY sont nulles séparément, et que la somme des moments par rapport au point B est également nulle.

Désignons par θ l'inclinaison du talus, par α celle de la barre, et par $2l$ la longueur AB.

Proj. sur BX : $N \cos(90° - \theta) - F = 0$ ou $N \sin\theta - F = 0$ (1)

» BY : » $N' + N\cos\theta - P = 0$ (2)

moments (B) : $P \times BH - N \times BE = 0$ » $P\cos\alpha - 2N\cos(\theta - \alpha) = 0$ (3)

De l'équation (3) on tire $$N = \frac{P\cos\alpha}{2\cos(\theta - \alpha)} \qquad (4)$$

Mettant cette valeur dans les équations (1) et (2), on obtient

$$F = N\sin\theta = \frac{P\cos\alpha\sin\theta}{2\cos(\theta - \alpha)} \qquad (5)$$

$$N' = P - N\cos\theta = P\left[1 - \frac{\cos\alpha\cos\theta}{2\cos(\theta - \alpha)}\right] \qquad (6)$$

Remarques. 1° Ces formules montrent que la force F de glissement est la projection horizontale de la réaction N du mur.

La réaction N′ du sol est égale au poids de la barre, diminué de la composante verticale de N.

2° Pour un angle α donné, à mesure que le mur se redresse, c'est-à-dire que θ augmente, la réaction N augmente, puisque $\cos(\theta - \alpha)$ diminue.

La force de glissement augmente plus rapidement encore avec θ.

La pression N′ sur le sol augmente; car sa variation dépend de celle de

$$\frac{\cos\theta}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha + \operatorname{tg}\theta\sin\alpha}$$

Cette fraction diminue jusqu'à 0 lorsque θ grandit de 0° à 90°; par suite, N′ augmente jusqu'à P.

On se rend facilement compte de cette variation de N′, car lorsque le mur est en talus, le poids de la barre porte en partie sur ce talus, ce qui diminue la pression sur le sol, et cela d'autant plus que le talus est plus fortement incliné, c'est-à-dire que θ est plus petit.

Discussion. Pour rendre la discussion plus complète, nous remarquerons que le mur agit seulement par sa réaction N; ce problème est renfermé dans la question plus générale :

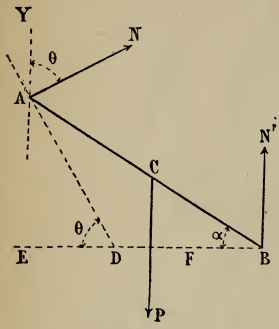


Fig. 162.

Une barre de poids P *appuie, par une de ses extrémités, sur un sol parfaitement poli; à son autre extrémité est appliquée une force* N.

Étudier les variations de l'intensité de la force N, *de la réaction* N′ *du sol, et de la force* F *qui empêche le glissement, lorsque la barre est en équilibre et qu'on fait varier la direction de la force* N.

Nous supposons α constant. Désignons par θ l'angle de la force N, avec la verticale AY; cet angle YAN est le même que l'angle ADE; les formules de N, F, N′ sont donc celles que nous avons trouvées précédemment.

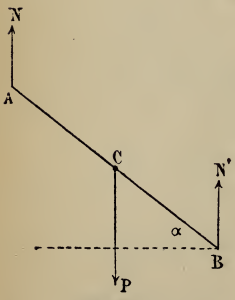


Fig. 163.

1er Cas. $\theta = 0$

les formules (4), (5), (6) donnent

$$N = \frac{P}{2}$$

$$F = 0$$

$$N' = \frac{P}{2}$$

Dans ce cas, en effet, le poids P est équilibré par deux forces N et N′ parallèles à P et égales chacune à sa moitié.

La projection horizontale de N étant nulle, la force de glissement est donc nulle.

Les résultats sont indépendants de l'angle α, ce qui est évident *à priori*.

2e Cas. $\theta = \alpha$

on a

$$N = \frac{P}{2} \cos \alpha$$

$$F = \frac{P}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{P}{4} \sin 2\alpha$$

$$N' = P - \frac{P}{2} \cos^2 \alpha = \frac{P}{2} (1 + \sin^2 \alpha)$$

La force N est perpendiculaire à la barre, elle prend alors sa valeur *minimum.*

Pour les valeurs de θ comprises entre α et 90°, on se trouve dans le cas du *mur incliné.*

3e Cas. $\theta = 90°$

on obtient $N = \dfrac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

$$F = \frac{P}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$N' = P$$

On est alors dans le cas du *mur vertical*, et les formules sont celles du problème 129.

La force de glissement est égale à N, qui, étant horizontale, se projette en vraie grandeur.

N′ est égale à P, car N n'a pas de composante verticale.

4e Cas. Si θ devient plus grand que 90°, l'angle $(\theta - \alpha)$ augmente et tend vers 90°; par conséquent, $\cos(\theta - \alpha)$ diminue et tend vers zéro.

La force N augmente et tend vers l'infini; il en est de même de sa projection horizontale, force de glissement.

La pression N′ devient plus grande que P et tend aussi vers l'infini, car la composante verticale de la force N change de signe et s'ajoute à P pour donner la pression N′.

Pour $\theta = 90° + \alpha$

on a $N = \infty$, $F = \infty$, $N' = \infty$

La forme N, étant dirigée suivant AB, ne peut équilibrer le poids P.

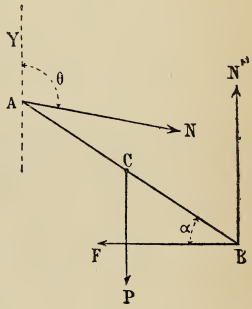


Fig. 164.

5e Cas. Lorsque θ devient plus grand que $(90° + \alpha)$, l'angle $(\theta - \alpha)$ devient plus grand que 90°; par suite, $\cos(\theta - \alpha)$ est négatif et N est aussi négatif. Ce qui indique que l'équilibre est impossible tant que la direction de N est au-dessous de BAL.

Quand la force N est dirigée suivant AL,

on a $\theta = 270° + \alpha$

d'où $(\theta - \alpha) = 270°$

par suite, $\cos(\theta - \alpha) = \cos 270° = 0$

Ce qui donne pour N une valeur infinie; l'équilibre est donc encore impossible pour cette direction de N.

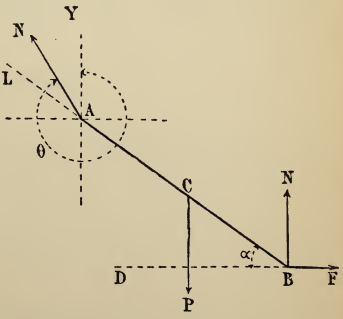


Fig. 165.

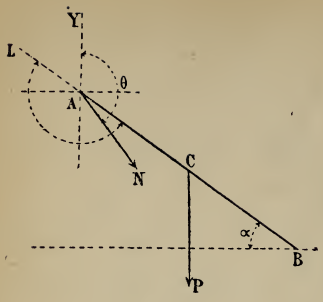


Fig. 166.

6e Cas. Enfin, si θ est plus grand que $270° + \alpha$, l'angle $(\theta - \alpha)$ est plus grand que 270°, son cosinus est positif.

La force N est positive; il peut donc y avoir équilibre.

A mesure que θ augmente, la force N diminue jusqu'à $\frac{P}{2}$, valeur qu'elle prend lorsque $\theta = 360°$.

La force F de glissement est devenue négative, car la projection horizontale de N a changé de signe; la barre tend à glisser dans le sens BD; cette force F décroît de l'infini à 0.

La pression N′ part de l'infini négatif, devient nulle lorsque $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\alpha$ (formule 6); N′ devient ensuite positive et vaut $\frac{P}{2}$ lorsque $\theta = 0$.

En résumé, on voit que N peut prendre toutes les directions au-dessus de la barre AB; qu'elle est infinie lorsqu'elle est sur le prolongement de BA; qu'elle diminue jusqu'à ce qu'elle soit perpendiculaire à la barre où elle prend sa valeur minimum; qu'elle augmente ensuite pour devenir de nouveau infinie lorsqu'elle est dirigée suivant AB, et qu'elle ne peut prendre aucune position au-dessous de la barre AB.

La force de glissement F part de l'infini négatif lorsque N est sur le prolongement de BA, augmente jusqu'à zéro lorsque N devient verticale; elle devient ensuite positive et augmente constamment jusqu'à l'infini positif, lorsque N est dirigée suivant la barre AB.

La pression N′ sur le sol part aussi de l'infini négatif, devient nulle, puis positive, et grandit indéfiniment.

On pourrait encore étudier les variations de ces forces pour les différentes valeurs de α, c'est ce qui a été fait dans le problème 129, lorsque $\theta = 90°$.

Problème 130

La tige homogène AO, *de longueur* l *et de poids* P, *est fixée normalement au centre du disque homogène* BB′ *de rayon* R *et de poids* P. *Quelles sont les pressions en* A *et en* B?

La force P appliquée en D, milieu de AO, se décompose en deux forces égales, $\frac{P}{2}$, en A et en O. En O, il y a donc une force $\frac{3P}{2}$, que l'on remplace par ses deux composantes T et S.

La force T transportée en A, et la force S en B, donnent lieu respectivement à des composantes verticales M, N.

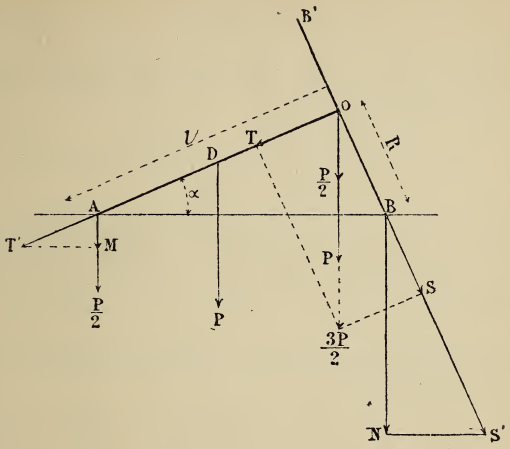


Fig. 167.

La pression en A sera $N' = M + \frac{P}{2}$, et la pression en B sera N.

Or $$M = T \sin \alpha \quad \text{et} \quad T = \frac{3P}{2} \sin \alpha$$

donc $$M = \frac{3P}{2} \sin^2 \alpha$$

et $$N = S \cos \alpha = \frac{3P}{2} \cos \alpha \,.\, \cos \alpha = \frac{3P}{2} \cos^2 \alpha$$

Donc $$N' = \frac{P}{2} + \frac{3P}{2} \sin^2 \alpha \quad \text{et} \quad N = \frac{3P}{2} \cos^2 \alpha$$

Rép. 1° *Pression en* A $N' = \frac{P}{2}(1 + 3 \sin^2 \alpha)$.

2° » B $N = \frac{3P}{2} \cos^2 \alpha$

Ou, en fonction de l et de R, en remarquant que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{l}$

$$N' = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{3R^2}{R^2 + l^2}\right) \quad \text{(Trig., n° 27)}$$

$$N = \frac{3P}{2} \cdot \frac{l^2}{R^2 + l^2}$$

Remarques. 1° La somme des deux réactions $N + N'$ doit évidemment égaler le poids total de l'appareil $2P$; c'est, en effet, ce que l'on peut vérifier

$$N + N' = \frac{P}{2}(1 + 3\sin^2\alpha) + \frac{3P}{2}\cos^2\alpha = 2P$$

2° Les forces T' et S', étant obliques par rapport au plan horizontal, donnent des composantes horizontales qui tendraient à faire glisser le corps ; mais il est facile de voir que ces composantes sont égales et de signe contraire ; par suite, elles se détruisent.

2e Méthode. Supprimons le plan, à la condition d'appliquer au corps les deux réactions normales N et N'.

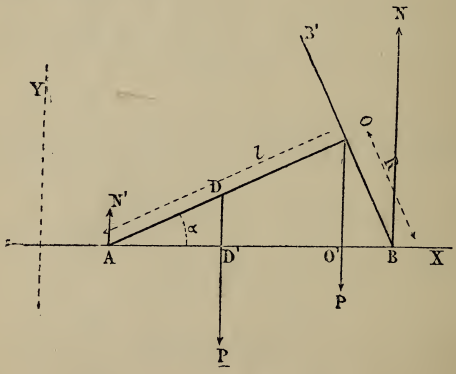


Fig. 168.

Nous aurons les trois équations

Projections sur X $\qquad 0 = 0 \qquad (1)$

» » Y $\qquad N' + N = 2P \qquad (2)$

Moments (A) $\qquad P \times AO' + P \times AD' - N \times AB = 0 \qquad (3)$

La relation (3) peut s'écrire

$$Pl\cos\alpha + \frac{Pl}{2}\cos\alpha = N\,(l\cos\alpha + R\sin\alpha)$$

d'où $$N = \frac{3P}{2} \cdot \frac{l \cos \alpha}{l \cos \alpha + R \sin \alpha}$$

Or l'expression $$\frac{l \cos \alpha}{l \cos \alpha + R \sin \alpha}$$

peut se transformer ainsi, en remarquant que $\frac{R}{l} = \text{tg } \alpha$,

$$\frac{l \cos \alpha}{l \cos \alpha + R \sin \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{R \sin \alpha}{l \cos \alpha}} = \frac{1}{1 + \text{tg } \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{séc}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

d'où $$N = \frac{3P}{2} \cdot \cos^2 \alpha$$

Ce qui est le résultat trouvé précédemment.

On obtiendrait de même

$$N' = 2P - N = 2P - \frac{3P}{2} \cos^2 \alpha = \frac{P}{2} (1 + 3 \sin^2 \alpha)$$

Remarque. La relation (2) nous fournit immédiatement

$$N + N' = 2P$$

Problème 131

Un triangle matériel, pesant et homogène ABC, *est posé par le point* A *sur le plan horizontal. On donne l'angle* A *et les côtés* b *et* c. *On demande en quelles parties* x *et* y *l'angle* A *sera divisé par la verticale* AV, *si le triangle se soutient en équilibre.* (Lille, Bacc.)

Le triangle sera en équilibre, lorsque le centre de gravité G sera sur la verticale du point A, c'est-à-dire lorsque la médiane AM sera verticale.

La trigonométrie fournit les relations (Trig., nº 76)

Surface ABC $= {}^1/_2\, bc \sin A$

» BMA $= {}^1/_2\, c \times \text{AM} \sin x$

» CMA $\quad {}^1/_2\, b \times \text{AM} \sin y$

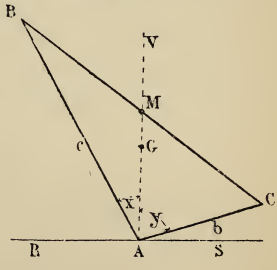


Fig. 169.

Or Surf. BMA = surf. CMA

donc ${}^1/_2\, c \times \text{AM}. \sin x = {}^1/_2\, b \times \text{AM} \sin y$

d'où $$c \sin x = b \sin y \qquad (1)$$

D'ailleurs $x + y = A$, ou $x = A - y$

La relation (1) devient dès lors

$$c \sin (A - y) = b \sin y$$

En résolvant cette équation, en trouve *

Rép. $\operatorname{tg} y = \dfrac{c \sin A}{b + c \cos A}$

d'où $$\sin y = \frac{c \sin A}{\sqrt{b^2 + 2bc \cos A + c^2}}$$

On aurait de même

$$\operatorname{tg} x = \frac{b \sin A}{c + b \cos A}$$

ou $$\sin x = \frac{b \sin A}{\sqrt{b^2 + 2bc \cos A + c^2}}$$

Remarque. Si le triangle est isocèle, on a $b = c$, les formules donnent l'angle x égale l'angle y, la verticale est alors bissectrice de l'angle A.

Si l'on a de plus $A = 90°$, on trouve $\operatorname{tg} x = 1$; en effet, l'angle x vaut alors 45°.

Si l'on fait $A = 0$, on trouve $\operatorname{tg} x = 0$; par suite, $x = 0$, le triangle se réduit à une droite qui appuie en A par une extrémité ; elle doit être verticale pour qu'il y ait équilibre.

Si $A = 180°$, on trouve $\operatorname{tg} x = 0$; le triangle, en effet, est alors une barre mobile autour du point A, elle doit être verticale pour qu'il y ait équilibre. Mais si, en même temps, on a $a = b$, on trouve $\operatorname{tg} x = \dfrac{0}{0}$, l'indétermination est réelle, car la barre est alors en équilibre dans toutes les positions.

Problème 132

Position d'équilibre du levier coudé ACB *sous l'action des poids* P *et* Q.

Cette position sera déterminée, si l'on connaît l'angle

$$ACm = \alpha$$

---

* $\dfrac{\sin (A - y)}{\sin y} = \dfrac{b}{c}$; d'où $\dfrac{\sin A \cos y - \cos A \sin y}{\sin y} = \dfrac{\sin A}{\operatorname{tg} y} - \cos A = \dfrac{b}{c}$

qui donne $$\operatorname{tg} y = \frac{c \sin A}{b + c \cos A}$$

Puisque le levier est en équilibre, on doit avoir, en prenant les moments par rapport au point C,

$$P \times CA' = Q \times CB'$$

ou $$P \times a \cos \alpha = Q \times b. \cos [180 - (\alpha + \theta)]$$

ou $$Pa \cos \alpha = - Qb. \cos (\alpha + \theta)$$

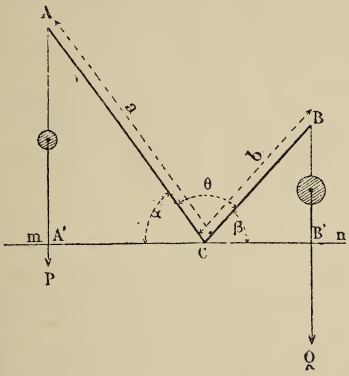


Fig. 170.

De là on tire $$\frac{\cos (\alpha + \theta)}{\cos \alpha} = - \frac{P \,.\, a}{Q \,.\, b}$$

En faisant $$\frac{P \,.\, a}{Q \,.\, b} = K$$

on a $$\frac{\cos (\alpha + \theta)}{\cos \alpha} = - K$$

En résolvant par rapport à α *, on obtient

Rép. $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K + \cos \theta}{\sin \theta} . \qquad (1)$$

par suite, $$\cos \alpha = \frac{\sin \theta}{\pm \sqrt{K^2 + 2K \cos \theta + 1}}$$

Discussion. Les données sont l'angle θ, les forces P et Q, et les parties a et b du levier.

L'angle θ peut varier de 0° à 360°. Relativement aux forces

---

* $\frac{\cos (\alpha + \theta)}{\cos \alpha} = - K$; $\frac{\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta}{\cos \alpha} = \cos \theta - \operatorname{tg} \alpha \sin \theta = - K$

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{K + \cos \theta}{\sin \theta}$$

P et Q, aux longueurs a, b, ce qu'il importe de savoir, c'est la grandeur du produit Pa par rapport au produit Qb;

soit $$\frac{Pa}{Qb} = K$$

D'une manière générale, quelle que soit la valeur de K et de θ, il y a toujours une solution pour l'angle α, c'est ce que montre la relation (1), où tg α peut avoir une valeur quelconque.

Cas particuliers. 1° $\theta = 0$, dans ce cas, $\text{tg}\,\alpha = \frac{1+K}{0} = \infty$, d'où $\alpha = 90°$. Cette valeur de 90° pour α se justifie aisément; les deux parties AC et CB, se confondant, doivent être verticales pour être en équilibre sous l'action des poids.

Si $\theta = 360°$, on a le même résultat.

2° $\theta = 90°$, alors $\text{tg}\,\alpha = K$

Et si K ou $\frac{P}{Q} \cdot \frac{a}{b} = 1$, on a $\alpha = 45°$; l'angle β sera pareillement égal à 45°, et les deux parties du levier seront placées symétriquement par rapport à la verticale du point C.

3° $\theta = 180°$. La tangente α devient $\text{tg}\,\alpha = \frac{-1+K}{0}$.

Il y a deux cas à considérer :

$$K < 1 \quad \text{ou} \quad K > 1$$

Si K est plus petit que 1, $\text{tg}\,\alpha = -\infty$, $\alpha = -90°$.
Si K est plus grand que 1, $\text{tg}\,\alpha = \infty$, $\alpha = +90°$.

Justifions ces valeurs :

Si $\theta = 180°$, le levier est une barre droite; évidemment il ne saurait y avoir équilibre, si l'on n'a pas Pa = Qb, c'est-à-dire K = 1; dans ce cas seulement, l'équilibre subsiste dans n'importe quelle position, la formule elle-même l'indique, car $\frac{-1+K}{0}$ pour K = 1, devient $\frac{0}{0}$; ce symbole de l'indétermination montre bien que le levier est en équilibre pour toutes les valeurs de l'angle α.

Si l'on a K < 1, soit Pa < Qb, le levier s'inclinera du côté du poids Q jusqu'à ce qu'il soit vertical, c'est-à-dire qu'il s'inclinera d'un angle de 90°.

Si, au contraire, on a K > 1, c'est-à-dire Pa > Qb, le levier se placera verticalement du côté de P, et décrira un angle de 90° en sens inverse du premier cas.

4° Si θ est supérieur à 180°, il n'y a rien de particulier.

Problème 133

Un triangle ABC *est suspendu librement par un de ses sommets* A. *A ses deux autres sommets sont suspendus des poids* P *et* Q. *On demande de calculer l'inclinaison* α *du côté* BC *sur l'horizontale.*

Application au cas où le triangle est équilatéral, les poids P *et* Q *étant* 30^k *et* 5^k255. (Besançon, Bacc., juillet 1874.)

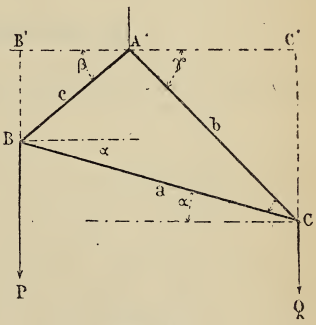


Fig. 171.

Ce problème a la plus grande analogie avec le précédent.

On doit avoir, en prenant les moments par rapport au point A,

$$P \times AB' = Q \times AC'$$

ou $P \times c \cos\beta = Q \times b \cos\gamma$

Or

$$\beta = (B - \alpha), \quad \gamma = (C + \alpha)$$

donc $$Pc \cos(B - \alpha) = Qb \cos(C + \alpha)$$

ou $$\frac{\cos(C + \alpha)}{\cos(B - \alpha)} = \frac{Pc}{Qb} = K, \quad \text{en posant } \frac{Pc}{Qb} = K$$

En résolvant par rappport à α, on trouve

Rép. $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos C - K \cos B}{\sin C + K \sin B}.$$

Application. Si le triangle est équilatéral,

$$B = C = 60^\circ, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

alors $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{2} - \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{P}{Q} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{Q - P}{P + Q} \qquad (1)$$

Pour les valeurs données de P et de Q, P étant supérieur à Q, l'inclinaison se fait du côté B, ce qui justifie la valeur

négative de α, que fournit la relation (1) ; quand on remplace les lettres par leur valeur, la valeur absolue de α sera

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{30 - 5{,}255}{30 + 5{,}255}$$

d'où $$\alpha = 22^\circ 3' 34''$$

Remarque. Une discussion analogue à celle du problème précédent pourrait être faite sur celui-ci.

Problème supplémentaire.

Un triangle pesant, homogène ABC, *dont on suppose connus les côtés* a, b, c, *les angles* A, B, C *et la densité* D, *est suspendu par son sommet* A *à un point autour duquel il peut tourner librement. Quel est le poids* X *qu'il faut appliquer au sommet* B, *pour que la base* BC *soit horizontale?* (École navale, concours de 1881.)

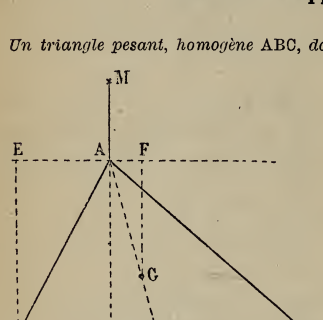


Fig. 172.

En désignant par P le poids du triangle, on doit avoir, pour qu'il y ait équilibre,

$$x \times AE = P \times AF \qquad (1)$$

Or $$P = \frac{BC \times AH}{2} \times D$$

d'où, en remarquant que $AF = \frac{2}{3} HM$,

$$x \times AE = D \times \frac{BC = AH}{2} \times \frac{2HM}{3}$$

ou $$x \times BH = \frac{D \times AH}{6} \times BC \times 2HM \qquad (2)$$

Mais on a $$BC = BH - CH$$

et $$2HM = 2BM - 2BH = BC - 2BH = BH + CH - 2BH = CH - BH$$

Mettant ces valeurs de BC et de 2HM dans l'équation (2), on a

$$x \times BH = \frac{D \times AH}{6} (CH + BH)(CH - BH)$$

d'où $$x = \frac{D}{6} \times \frac{AH}{BH} (\overline{CH}^2 - \overline{BH}^2)$$

Or $$\overline{CH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AH}^2 \quad \text{et} \quad \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AH}^2$$

Donc $$x = \frac{D}{6} (b^2 - c^2) \operatorname{tg} B$$

Tant que $b > c$, il faut suspendre en B un poids x;

$$\text{si} \quad b = c, \quad \text{on a} \quad x = 0$$

$$\text{si} \quad b < c, \quad x \text{ devient négatif}$$

cela indique qu'il faut agir de bas en haut pour établir l'équilibre demandé.

Remarque. Cette question est un cas particulier du problème précédent, on peut donc lui appliquer la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos C - K \cos B}{\sin C + K \sin B}$$

Mais alors $$\alpha = 0$$

ce qui donne $$\frac{\cos C - K \cos B}{\sin C + K \sin B} = 0$$

Le dénominateur ne pouvant devenir infini, il faut que l'on ait

$$\cos C = K \cos B \tag{1}$$

dans laquelle $$K = \frac{P \cdot c}{Q \cdot b}$$

Le poids p du triangle se répartit par tiers à chacun des sommets (M., n° 108),

de sorte que l'on a $$P = x + \frac{p}{3} \quad \text{et} \quad Q = \frac{p}{3}$$

d'où $$K = \frac{(3x + p)\, c}{bp}$$

En mettant cette valeur dans l'équation (1), on obtient

$$bp \cos C = (3x + p)\, c \cos B$$

d'où $$3cx \cos B = p\,(b \cos C - c \cos B)$$

On a aussi $$p = \frac{ac \sin B \times D}{2}$$

d'où $$x = \frac{D}{6} \times \frac{ac\,(b \cos C - c \cos B) \sin B}{c \cos B}$$

et $$x = \frac{D}{6}\, a\,(b \cos C - c \cos B) \operatorname{tg} B$$

Mais on sait que (Trig., n° 70) l'on a

$$b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

ce qui donne $$x = \frac{D}{6}\,(b^2 - c^2) \operatorname{tg} B$$

formule trouvée précédemment.

Problème 134

On donne une plaque métallique de forme triangulaire que l'on suppose homogène dans toutes ses parties. Cette plaque est

suspendue; le point de suspension est placé sur la médiane qui part du sommet A *et au sixième de cette médiane, à partir de la base* BC.

La plaque métallique pèse 520^k. *Au sommet* B, *on suspend un poids de* 690^k. *On demande quels sont les poids que l'on doit suspendre en* C *et en* A *pour que la plaque soit horizontale.* (Bordeaux, Dipl. Ens. sp., 1879.)

1re Méthode. Soient S le point de suspension, P le poids du triangle, Q la charge placée en B.

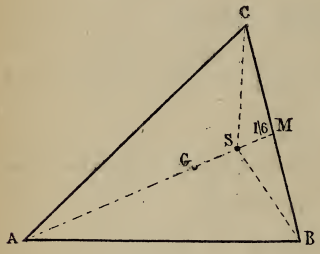


Fig. 173.

Le poids du triangle se répartit de manière qu'en chaque sommet il y ait un tiers du poids (M., n° 108).

En B, il s'exerce donc un effort $Q + {}^1/_3\,P$.

1° Pour que le triangle reste en équilibre sur un couteau posé sur la médiane AM, il faut que la charge totale en C soit de $Q + {}^1/_3\,P$, à cause de l'égalité de CM et de MB. Donc il faut ajouter en C un poids Q.

2° Les deux charges égales $Q + {}^1/_3\,P$, appliquées en C et en B, se composent en une résultante $2\,(Q + {}^1/_3\,P)$, dont le point d'application est en M. Cette force demande à être équilibrée par une charge en A, qui soit avec cette force dans le rapport inverse des distances SM et AS.

Or $$SM = \frac{1}{6}\,AM = \frac{1}{5}\,AS$$

Donc

la charge totale en $A = 2\left(Q + \frac{1}{3}\,P\right) \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\left(Q + \frac{1}{3}\,P\right)$

dès lors le poids à ajouter en A sera

$$\frac{2}{5}\left(Q + \frac{1}{3}\,P\right) - \frac{1}{3}\,P = \frac{1}{5}\,(2Q - P)$$

Rép. Poids à ajouter $\begin{cases} \text{en C,} & Q = 690^k. \\ \text{en A,} & \frac{1}{5}\,(2Q - P) = 172^k. \end{cases}$

2° **Méthode.** On peut arriver au résultat d'une autre manière :

Soient X, Y, Z les charges totales qui doivent être appliquées aux sommets A, C, B pour qu'il y ait équilibre.

On a d'abord $Z = Q + {}^1/_3\, P$, à cause de la répartition uniforme du poids du triangle aux trois sommets A, B, C.

Le point S devant, pour qu'il y ait équilibre, être le point d'application de la résultante des forces X, Y, Z, le théorème d'Euler (M., n° 107) fournira les relations

$$\frac{X}{\text{surf. CSB}} = \frac{Y}{\text{surf. ASB}} = \frac{Z}{\text{surf. ASC}}$$

Or surf. CSB $= {}^1/_6$ surf. ACB et surf. ASB $=$ surf. ASC $= {}^5/_{12}$ surf. ABC;

dès lors on a $$Y = Z = Q + \frac{P}{3}$$

et la force à ajouter en C sera Q.

On a encore $$X = Z \cdot \frac{\text{surf. CSB}}{\text{surf. ASC}} = \frac{2}{5}\left(Q + \frac{P}{3}\right)$$

et la force à ajouter en A sera

$$\frac{2}{5}\left(Q + \frac{P}{3}\right) - \frac{P}{3} = \frac{1}{5}\,(2Q - P) \qquad \textit{C. Q. F. D.}$$

Problème 135

Un triangle rectangle pesant, ABC, *est suspendu par une anse semi-circulaire sans poids. Trouver la position d'équilibre stable du système; l'anse peut glisser sans frottement sur le point de suspension.*

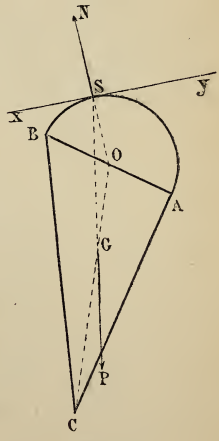


Fig. 174.

Supposons que la figure ci-contre représente le système dans sa position d'équilibre, S étant le point de suspension. Le point S réagit sur l'anse normalement à la petite surface d'appui, or l'élément de surface en S a la direction de la tangente *xy;* par suite, la réaction normale N est dirigée suivant le rayon OS.

Mais, pour que cette réaction N du point de suspension fasse équilibre au poids, il faut qu'elle soit verticale et sur le prolongement de GP; donc, dans la position d'équilibre, la médiane CO doit être verticale. (Voir fig. 175.)

Il reste à trouver l'angle BOS $= \alpha$, qui peut servir à déterminer la position d'équilibre.

Dans le triangle rectangle OAC, on a

$$\text{tg AOC} \quad \text{ou} \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{b}{\frac{c}{2}} = \frac{2b}{c}$$

Rép. $\text{tg}\,\alpha = \frac{2b}{c}$.

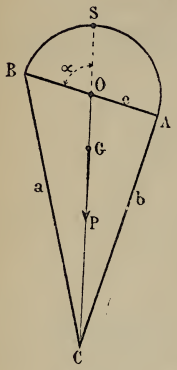


Fig. 175.

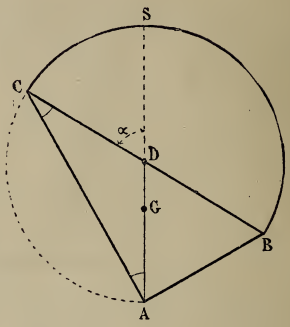


Fig. 176.

Remarque. Si le triangle est suspendu par l'hypoténuse (voir fig. 176), le triangle ADC est isocèle, parce que AD est médiane ; par suite, l'angle α est le double de l'angle C.

Problème 136

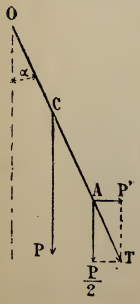


Fig. 177.

Une barre OA *droite et homogène d'une longueur* l *et pesant* P *kilogr. est mobile autour de son extrémité* O. *On attache à son autre extrémité un fil que l'on maintient horizontal et que l'on tend avec une force de* P' *kilogr. On demande quel angle* α *la barre fait avec la verticale lors de l'équilibre.* (Lille, Bacc.)

1re Méthode. Le poids P de la barre se décompose en deux forces égales à $\frac{P}{2}$, appliquées l'une en O et qui est détruite par la fixité de ce point, l'autre en A. Si cette

dernière donne avec la force P′ une résultante T dirigée suivant la barre, celle-ci sera en équilibre.

On aura alors $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{P'}{\dfrac{P}{2}} = \dfrac{2P'}{P}$

Rép. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2P'}{P}$.

Discussion. L'angle α étant trouvé par sa tangente, on voit qu'il y aura toujours une solution quelles que soient les valeurs de P et de P′. Cela se conçoit aisément.

Cas particuliers. 1° Si $P' = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, $\alpha = 0$, la barre se maintient verticale. C'est évident.

2° Si P′ grandit, α grandit ; et pour P infini, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, $\alpha = 90°$. La barre, lorsque la traction P′ augmente indéfiniment, tend vers la position horizontale, sans cependant jamais l'atteindre.

2e Méthode. Si l'on supprimait le point fixe O, il faudrait appliquer à la barre une force F capable de produire le même effet que le point O.

Soit N cette force dont la grandeur et la direction nous sont inconnues. La barre peut être considérée comme un solide en équilibre sous l'action des trois forces P′, P et N.

En appliquant les 3 équations d'équilibre, on a :

Proj. sur X : $P' - N \cos \beta = 0$ (1)

» » Y : $P - N \sin \beta = 0$ (2)

Moments (point O)

$$P \times OD - P' \times OE = 0$$

ou $P \dfrac{l}{2} \sin \alpha - P' l \cos \alpha = 0$

De cette dernière relation on tire

$$\frac{P}{2} \sin \alpha = P' \cos \alpha ;$$

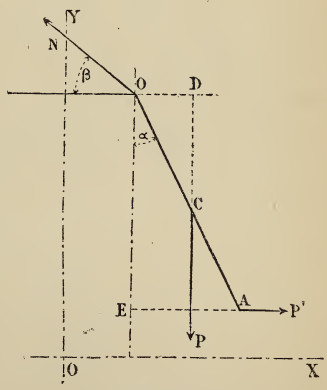


Fig. 178.

d'où $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2P'}{P}$

résultat déjà trouvé.

Remarque importante. Les deux équations de projection (1) et (2) serviraient à donner la valeur et la direction β de la réaction N du point O, si ces résultats étaient demandés.

Problème 137

Un corps de poids P, *suspendu au point* A, *est dérangé de sa position d'équilibre par une force horizontale* F.

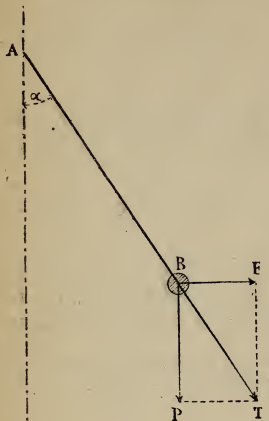


Fig. 179.

1° *Intensité de* F *pour que l'angle d'écart soit* α, *et tension de la corde.*

Ce problème est analogue au précédent et se traite de même.

Le corps sera en équilibre lorsque la résultante de la force F et du poids P sera dirigée suivant AB ; cette résultante est la tension de la corde.

Alors on aura

Rép. $F = P \operatorname{tg} \alpha$.

$$T = P \times \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Remarques. 1° On voit que, quelle que soit la valeur du poids, il existe toujours une force F capable de donner un écart déterminé, sauf pour l'écart de 90° où F serait infinie.

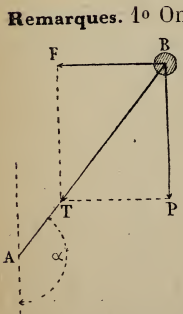


Fig. 180.

2° Si cependant l'angle d'écart donné était supérieur à 90°, les formules fourniraient pour F et pour T des valeurs négatives.

Une tension négative d'une *corde* ne saurait s'interpréter ; mais si on suppose le corps relié au point A par une *barre rigide*, toutes ces solutions négatives conviennent parfaitement : la force F est dirigée en sens inverse de celle de la figure 179, et la force T est une *compression* de la barre, ainsi que l'indique la fig. 180.

2° *Tension de la corde et intensité de* F, *si l'angle d'écart est* α *et que* F *fasse un angle* β *avec l'horizontale.*

En raisonnant comme dans le premier cas, on obtient les relations suivantes dans le triangle BFT :

$$\frac{F}{P} = \frac{\sin a}{\sin (90 - \alpha - \beta)} = \frac{\sin a}{\cos (\alpha + \beta)}$$

et

$$\frac{T}{P} = \frac{\sin BFT}{\cos (\alpha + \beta} = \frac{\sin (90 + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)}$$

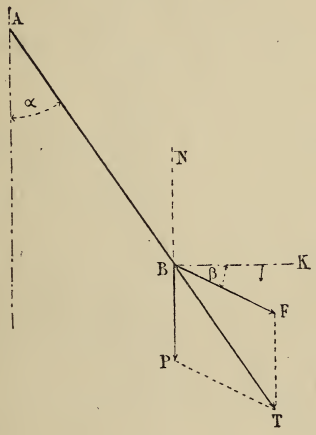


Fig. 181.

Rép. $F = P \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$. (1)

$T = P \cdot \frac{\cos \beta}{\cos (\alpha + \beta)}$. (2)

Discussion. Le lien AB étant une corde, la tension T ne saurait être négative.

Cas général. Examinons comment varient F et T avec les variations possibles de β et de α.

D'abord α peut varier de 0 à 180°.

Pour chercher les variations de β, remarquons que la valeur de T peut s'écrire

$$T = \frac{P \cos \beta}{\cos (\alpha + \beta)} = P \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = P \frac{1}{\cos \alpha - \operatorname{tg} \beta \sin \alpha}$$

Pour que T soit positif, il faut que l'on ait

$$\cos\alpha - \operatorname{tg}\beta \sin\alpha > 0 \quad \text{ou} \quad \cos\alpha > \operatorname{tg}\beta \sin\alpha$$

et comme α varie seulement de 0° à 180, son sinus est positif, et l'on pourra écrire

$$\operatorname{tg}\beta < \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\beta < \operatorname{cotg}\alpha$$

d'où $$\operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) \qquad (3)$$

(**a**) Si α varie de 0 à 90°, la *relation de possibilité* (3) fournira $$\beta < 90^\circ - \alpha$$

c'est-à-dire $$\beta < \text{KBT} \qquad (4)$$

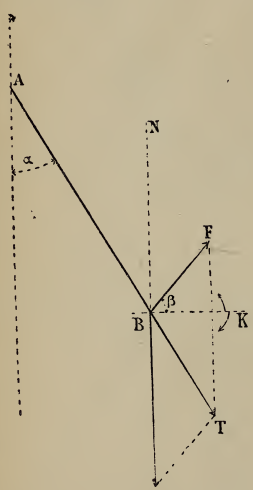


Fig. 182.

C'est la première conclusion ; la force F, en effet, ne peut agir à gauche de BT, dans la région TPA ; car alors, en la composant avec P, elle ne fournirait jamais une résultante dirigée suivant AB.

Les formules montrent que les valeurs de la force F et de la tension T croissent indéfiniment à mesure que l'angle β s'approche de sa limite $90^\circ - \alpha$, en restant dans l'espace KBT.

Les relations (3) et (4) sont également satisfaites pour des valeurs négatives de β, comprises entre 0 et 90° ; la direction de la force sera alors comprise dans l'angle droit KBN, puisqu'on a pris comme positives les valeurs de B au-dessous de l'horizontale BK.

La construction géométrique montre en effet que la question est encore possible, puisque P et F peuvent avoir une résultante dirigée suivant AB (fig. 182).

Les formules indiquent que T diminue jusqu'à être nul, et que F augmente pour atteindre P.

(**b**) Si α varie de 90° à 180° (fig. 183).

Dans la relation (3) $\operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$, l'angle $90^\circ - \alpha$ est

négatif, il varie de 0 à -90° ; sa tangente est négative, donc il faut que β soit négatif, inférieur à -90° et, en valeur absolue, plus grand que la valeur absolue de $90^o - \alpha$; donc, en valeur absolue, on a

$$\beta > \alpha - 90^o \quad \text{et} \quad \beta < 90^o$$

Or l'angle $TBK = \alpha - 90^o$

donc la force F doit être au-dessus de AB (ce que la figure ci-contre montre être nécessaire), et elle ne peut varier de direction que dans l'angle TBN. Les formules donnent facilement les variations de grandeur de T et de F.

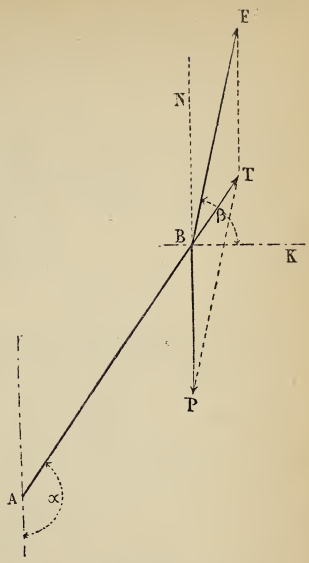


Fig. 183.

Problème 138

Une barre homogène forme un levier coudé, position d'équilibre.

1° *On la suspend par le point* A ; *l'angle* A *est droit ;*

2° *On la suspend par le point* A ; *l'angle* $A = \alpha$;

3° *On la suspend par le point* C ; *l'angle* A *est droit.*

1° *L'angle* A *est droit.*

Si le poids de la barre est 1^k par unité de longueur, en M et N, milieux des deux bras, seront appliquées deux forces *a* et *b*, dont le point d'application D de la résultante devra être sur la verticale du point A.

La position d'équilibre de la barre sera déterminée, si l'on connaît l'angle $KAB = \beta$, du côté AB avec l'horizontale.

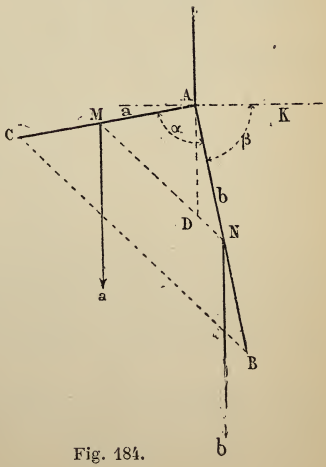


Fig. 184.

Les triangles ADN et ADM fournissent

$$DN = DA \times \frac{\sin DAN}{\sin AND} \qquad (1)$$

$$DM = DA \times \frac{\sin DAM}{\sin AMD} \qquad (2)$$

En divisant membre à membre

$$\frac{DN}{DM} = \frac{a}{b} = \frac{\sin(90-\beta) \,.\, \sin C}{\sin\beta \,.\, \sin B} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \cdot \frac{b}{a}$$

Donc

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \cdot \frac{b}{a}$$

Rép. $\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$.

2° *On la suspend par le point* A ; *l'angle* $A = \alpha$.

En divisant (1) et (2), membre à membre, on aura, en remarquant que $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{b}{a}$,

$$\frac{DN}{DM} = \frac{a}{b} = \frac{\sin DAN \,.\, \sin C}{\sin DAM \,.\, \sin B} = \frac{\cos\beta}{\sin[\alpha-(90-\beta)]} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\cos\beta}{-\cos(\alpha+\beta)} \cdot \frac{b}{a}$$

d'où

$$-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \frac{b^2}{a^2}$$

Résolvant par rapport à β, il vient *

Rép. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\frac{b^2}{a^2} + \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Remarques. 1° Si on fait $\alpha = 90°$, on retrouve le résultat du premier cas.

2° La discussion se fait d'une manière analogue à celle du problème 132.

3° *On la suspend par le point* C ; *l'angle* A *est droit.*

Il y a équilibre, lorsque le point D est sur la verticale du point de suspension C.

En désignant par δ l'angle de AC avec l'horizontale, on a, dans le triangle MCD,

$MC = \frac{a}{2}$, l'angle $MCD = 90 - \delta$

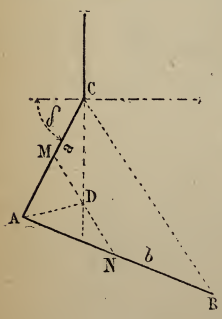


Fig. 185.

* Voir problème 132 (renvoi).

et l'angle CMD $= 180 - ACB$; ou $180 - C$

d'autre part, $$\frac{MD}{ND} = \frac{b}{a}$$

ou $$\frac{MD}{MD + ND} = \frac{b}{a+b}$$

par suite, $$MD = \frac{CB}{2} \times \frac{b}{a+b} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$$

Dès lors la relation $$\frac{MD}{MC} = \frac{\sin MCD}{\sin MDC}$$

que fournit le triangle MCD, devient

$$\frac{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \cdot \frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sin(90-\delta)}{\sin(C+\delta-90)} = \frac{\cos\delta}{-\cos(C+\delta)}$$

$$\frac{\cos(C+\delta)}{\cos\delta} = -\frac{a.(a+b)}{b.\sqrt{a^2+b^2}}$$

En résolvant par rapport à δ, il vient

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\cos C + \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sin C}$$

Or on a $$\cos C = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

et $$\sin C = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dès lors, en remplaçant, il vient

Rép. $$\operatorname{tg}\delta = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{a+b}{b}\right) = \frac{a(a+2b)}{b^2}.$$

Remarque. Pour $a = b$, on a $\operatorname{tg}\alpha = 3$; résultat qui peut aisément être justifié sur la figure.

Problème 139

Dans le problème précédent l'angle CAB $= \alpha$, *le levier étant suspendu en* A, *le bras* AC *est horizontal ; si ce bras* AC *était deux fois plus long, ce serait le bras* AB *qui serait horizontal ; quel est le rapport des longueurs des deux bras, quel est l'angle* α?

1° Lorsque le bras AC est horizontal, les moments des poids des deux barres par rapport à A étant égaux, on a, M étant le milieu de AC, et N celui de AB,

$$AC \times MA = AB \times AD$$

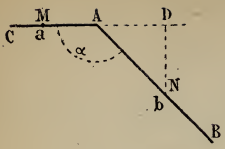


Fig. 186.

ou $a \times \frac{a}{2} = b \times \frac{b}{2} \cos(180 - \alpha)$

ou $a^2 = -b^2 \cos \alpha$

d'où $\cos \alpha = -\frac{a^2}{b^2}$ (1)

2° Si le bras AB reste horizontal, alors que l'on double AC, on a comme précédemment

$$AA' \times AE = AB \times AN$$

ou $2a \times a \cos(180 - \alpha) = b \times \frac{b}{2}$

d'où $\cos \alpha = -\frac{b^2}{4a^2}$ (2)

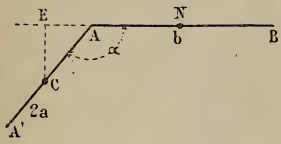


Fig. 187.

En égalant (1) et (2), il vient

$$-\frac{a^2}{b^2} = -\frac{b^2}{4a^2}$$

d'où $\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{2}$

et $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$

Alors, de (1), on a

$$\cos \alpha = -\frac{a^2}{b^2} = -\frac{1}{2}$$

ce qui correspond à $\alpha = 120°$

Rép. Le rapport $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ et $\alpha = 120°$.

Problème 140

On accroche à un clou une barre pesante AOB *homogène composée de deux parties droites* AO, OB, *dont les longueurs* a, b *et l'angle* AOB $= \gamma$ *sont donnés. On demande de calculer les angles* α *et* β, *que la verticale* OY, *du point de suspension, fera avec les deux parties* OA *et* OB *de la barre, une fois l'équilibre établi.* (Amiens, Bacc.)

Prenant les moments par rapport à O, on aura

$$AO \times CO = BO \times OD$$

ou $a \times \frac{a}{2} \cos(90 - \alpha) = b \times \frac{b}{2} \cos(90 - \beta)$

et $$a^2 \cdot \sin \alpha = b^2 \sin \beta$$

d'où $$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{b^2}{a^2} \qquad (1)$$

D'autre part, $$\alpha + \beta = \gamma$$

La relation (1) fournit

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

d'où

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \qquad (2)$$

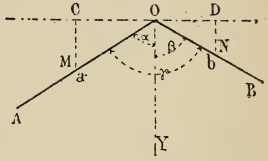


Fig. 188.

On tire de là $\alpha - \beta$; dès lors, connaissant $\alpha + \beta = \gamma$, on a les deux angles.

On peut aussi donner les valeurs directes de α et de β, en fonction des données.

L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\sin (\gamma - \beta)}{\sin \beta} = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta}{\sin \beta} = \frac{b^2}{a^2}$$

d'où $$\frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta} - \cos \gamma = \frac{b^2}{a^2}$$

Rép. $$\operatorname{tg} \beta = \frac{a^2 \sin \gamma}{b^2 + a^2 \cos \gamma}. \qquad (3)$$

On trouverait de même

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 \sin \gamma}{a^2 + b^2 \cos \gamma}. \qquad (4)$$

Remarque. Si $b = a$, la formule (2) fournit $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$, d'où $\alpha = \beta$; les formules (3) et (4) donnent la même relation.

Il doit en être ainsi, car pour $a = b$, la barre prend une position symétrique par rapport à la verticale.

La discussion de ce problème est analogue à celle du problème 132.

Problème 141

On a un levier AFB *coudé à bras inégaux, rigide, homogène, pesant, infiniment mince. On le suppose en équilibre, et on demande :*

1° *La direction* FA.

2° *Comment varie cette direction, quand on fait passer l'angle* F *par tous les états de grandeur de* 0° *à* 180° ?

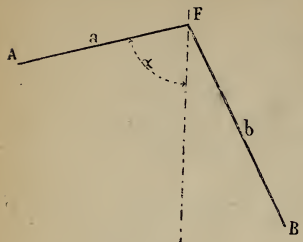


Fig. 189.

3° *Les résultats numériques auxquels on est conduit en faisant* AF = 2FB. (Besançon, Bacc., juillet 1875.)

1° *Direction de* FA.

La direction FA peut être déterminée par l'angle α, et le problème précédent fournit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 \sin F}{a^2 + b^2 \cos F}$$

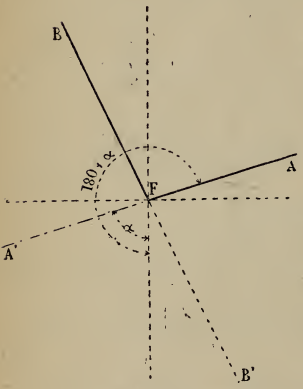


Fig. 190.

2° **Discussion.** Il existe toujours pour α deux valeurs ; la plus petite α correspond à la figure 189 ; la seconde 180 + α, donne la position d'équilibre que représente la figure 190 ; dans le premier cas, l'équilibre est stable ; dans l'autre, il est instable.

Il suffit de considérer les valeurs de α correspondant à l'équilibre stable ; α ne varie alors que de 0° à 180°.

Cette discussion est absolument *identique* à celle du n° 132. Les poids P et Q ne sont autres que ceux des tiges appliquées en leur milieu.

3° *Résultats numériques pour* AF = 2FB.

Si AF = 2FB, on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a^2}{4} \sin F}{a^2 + \frac{a^2}{4} \cos F} = \frac{\sin F}{4 + \cos F}$$

Problème 142

Une sphère de poids P *repose sur deux plans inclinés, l'un d'un angle* α, *l'autre d'un angle* β ; *conditions d'équilibre et pression sur chacun des plans.*

Les réactions des points de contact devant détruire le poids, la direction du poids doit être dans le plan des réactions ; ce plan sera donc vertical ; or il est perpendiculaire à l'intersection des deux plans ; cette arête sera par suite horizontale.

Le poids P, en se décomposant en deux forces suivant les rayons de contact, fournit directement

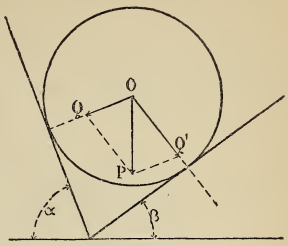


Fig. 191.

Rép. $Q = \frac{P \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$.

$Q' = \frac{P \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$.

Discussion. Il est généralement une valeur pour chacune des pressions, alors même que l'un des angles serait supérieur à 90°.

Cas particuliers. 1° *Les angles α et β sont égaux.* Les deux pressions deviennent égales, chacune a

$$\frac{P \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

Si α et β = 60° $\qquad Q = Q' = P$

Si α et β tendent vers 0°, Q = Q' tendent vers $\frac{P}{2}$, ce qui doit être, car on a un seul plan, et la pression est

$$Q + Q' = 2 \cdot \frac{P}{2} = P$$

2° *L'angle β reste constant, et α varie de* 0 *à* (180 — β).

Si α = 0, Q' = 0 et Q = P, ce qui est évident.

Si α grandit, Q' augmente et Q diminue.

Problème 143

Entre deux plans inclinés de α et de β, et dont l'intersection est horizontale, se trouve une barre de longueur l.

1° *Position d'équilibre ;*

2° *Pression en* A *et en* B ;

3° *Conditions que doivent remplir les plans pour que la barre en équilibre soit horizontale.*

1re Méthode. 1° *Position d'équilibre.* Elle sera déterminée par l'angle x de la barre avec l'horizontale.

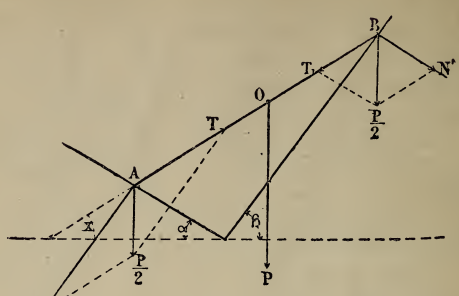


Fig. 192.

Le poids P de la barre se décompose en deux forces $\frac{P}{2}$ appliquées en A et en B. Chacune de celles-ci peut à son tour se décomposer en une normale au plan, et en une autre dirigée suivant la barre.

Les composantes normales sont détruites par la fixité des plans ; il suffira, pour qu'il y ait équilibre, que les deux autres composantes T, T_1 soient égales*.

Évaluons chacune d'elles.

On a, dans les triangles formés en A et en B,

$$\frac{T}{\frac{P}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\sin [90 - (\alpha + x)]}$$

et

$$\frac{T_1}{\frac{P}{2}} = \frac{\sin \beta}{\sin [90 - (\beta - x)]}$$

d'où, puisque $T = T_1$,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin [90 - (\alpha + x)]} = \frac{\sin \beta}{\sin [90 - (\beta - x)]}$$

---

* La conclusion à laquelle nous arrivons suppose la barre dans un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans, sans cela les forces T et T_1 ne se détruiraient pas. Il faut de plus, comme dans le problème précédent, que l'intersection des deux plans soit horizontale.

Ce qui peut s'écrire

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos (\alpha + x)}{\cos (\beta - x)}$$

En résolvant par rapport à x, on trouve

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta}\right)$$

Rép. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}\right)$.

2° *Pressions en* A *et en* B. Les pressions N, N′, s'obtiendront en considérant les deux mêmes triangles ; on aura

$$\frac{N}{\frac{P}{2}} = \frac{\sin (90 + x)}{\cos (\alpha + x)}$$

et

$$\frac{N'}{\frac{P}{2}} = \frac{\sin (90 - x)}{\cos (\beta - x)}$$

En développant, puis exprimant les lignes trigonométriques de x en fonction de la tangente, on trouverait

Rép. $\left\{ \begin{array}{l} N' = \dfrac{P \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)} \\ \text{et} \quad N = \dfrac{P \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \end{array} \right.$

Ce dernier calcul est laborieux ; on verra comment la 2e méthode fournit bien plus simplement ces résultats.

3° *Conditions pour que la barre soit horizontale.* Pour que la barre, en équilibre, soit horizontale, x doit être nul ; donc on doit avoir

$$\operatorname{tg} x = 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}\right)$$

ce qui exige que l'on ait $\sin (\beta - \alpha) = 0$, et par suite

Rép. $\alpha = \beta$.

C'est-à-dire qu'il suffit que les deux plans soient également inclinés, quelle que soit d'ailleurs cette inclinaison.

2e Méthode. Si l'on supprime les deux plans, il faut appliquer à la barre deux réactions normales N'_1 et N_1, égales et de sens contraire aux pressions.

Les forces P, N'_1, N_1 devant laisser la barre en équilibre, on a, en appliquant les équations d'équilibre (fig. 193) :

Proj. axe des X :	$N_1 \sin \alpha = N'_1 \sin \beta$	(1)
» » Y :	$N_1 \cos \alpha + N'_1 \cos \beta = P$	(2)
Moments (O) :	$N_1 \times OD = N'_1 \times OE$	(3)

L'équation (3) peut s'écrire

$$N_1 \times \frac{l}{2} \cos(\alpha + x) = N'_1 \times \frac{l}{2} \cos(\beta - x)$$

ou

$$N_1 \cos(\alpha + x) = N'_1 \cos(\beta - x) \qquad (4)$$

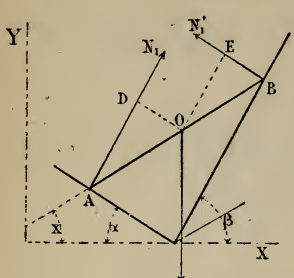


Fig. 193.

Les relations (1) et (2) fournissent, en tirant N_1 de (1) et en portant cette valeur dans (2),

$$\left.\begin{array}{l} N'_1 = \dfrac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ \text{On aurait de même} \\ N_1 = \dfrac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \end{array}\right\} \text{2e Réponse.}$$

Dès lors (4) fournit

$$\frac{\cos(\alpha + x)}{\cos(\beta - x)} = \frac{N'_1}{N_1} = \frac{\sin a}{\sin \beta}$$

En résolvant par rapport à x, on trouve

$$\frac{\dfrac{\cos \alpha}{\cos \beta} - \dfrac{\sin \alpha}{\cos \beta} \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} x} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

d'où

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}\right) \qquad \text{1re Réponse.}$$

Problème 144

Une barre AB *de longueur* l *appuie sur un plan incliné, l'autre extrémité est attachée à une corde* OB = l' *fixée en un point* O *distant de* d *du plan incliné. Position d'équilibre?*

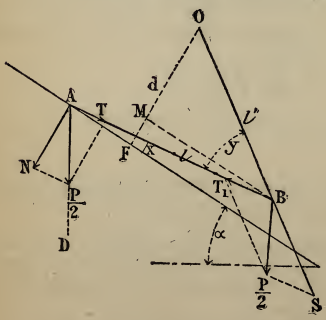


Fig. 194.

Le poids P de la barre se décompose en deux forces $\frac{P}{2}$ appliquées en A et B.

Décomposons chacune d'elles en deux autres; au point A on aura N normale au plan, et T suivant la barre; en B on aura T_1 suivant la barre, et S dans la direction de la corde.

La force N étant détruite par la fixité du plan, et la force S par la résistance du fil, pour qu'il y ait équilibre il faut que $T = T_1$.

Évaluons chacune de ces forces; dans les parallélogrammes de décomposition

on a $$\frac{T}{\sin NAD} = \frac{\frac{P}{2}}{\sin NAT} \quad \text{et} \quad \frac{T_1}{\sin KBS} = \frac{\frac{P}{2}}{\sin T_1BS}$$

d'où $$T = T_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sin NAD}{\sin NAT} = \frac{P}{2} \frac{\sin KBS}{\sin T_1BS}$$

ou $$\frac{\sin \alpha}{\sin (90 + x)} = \frac{\sin (90 - \alpha - y + x)}{\sin (180 - y)}$$

Ce qui peut s'écrire $$\frac{\sin \alpha}{\cos x} = \frac{\cos (y + \alpha - x)}{\sin y}$$

On peut établir une relation de position.

Si l'on mène BM parallèle au plan, on a

$$FM = l \sin x$$

$$MO = l' \sin (y - x)$$

d'où $$FM + MO = d = l \sin x + l' \sin (y - x)$$

Il ne reste plus qu'à résoudre, par rapport à x et à y, les deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\sin \alpha}{\cos x} = \dfrac{\cos (y + \alpha - x)}{\sin y} \\ \text{et } d = l \sin x + l' \sin (y - x) \end{cases}$$

Remarque. La question générale conduit à des calculs trop laborieux. Nous allons l'appliquer au cas particulier où le plan est horizontal.

On a alors $\alpha = 0$, et les relations deviennent

$$\frac{\sin 0}{\cos x} = \frac{\cos (y - x)}{\sin y} \quad ; \quad \text{d'où} \quad \cos x \cos (y - x) = 0$$

ce qui peut avoir lieu de deux manières.

1° Si l'on a $\cos (y - x) = 0$; d'où $y - x = 90°$; soit $y = 90° + x$ c'est la position d'équilibre indiquée par la fig. 195.

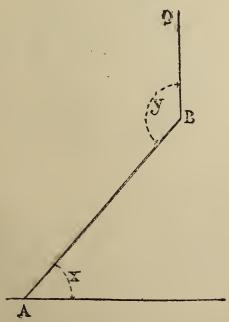


Fig. 195.

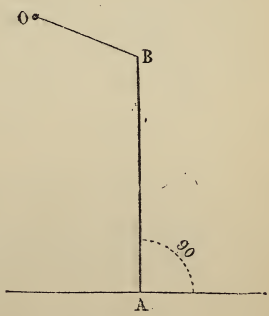


Fig. 196.

2° Ou encore si l'on a $\cos x = 0$; d'où $x = 90°$ c'est le cas de la figure 196.

Problème supplémentaire.

Au bord d'un hémisphère de poids Q, *on suspend un poids* p. *Trouver la position d'équilibre.*

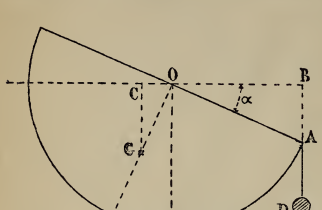


Fig. 197.

En prenant les moments, par rapport au centre de la sphère, on a

$$p \times OB = Q \times OC \qquad (1)$$

Mais $OB = R \cos \alpha$

et $OC = d \sin \alpha$

d représentant OG, distance du centre O de figure au centre G de gravité.

L'équation (1) devient

$$pR \cos \alpha = Qd \sin \alpha$$

Rép. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{pR}{Qd}$.

1er **Cas.** *On a un hémisphère plein.*

Alors $$d = \frac{3}{8} R \qquad \text{(M., n° 88.)}$$

et $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8p}{3Q}$$

On voit que l'inclinaison augmente, lorsque p augmente ou que le poids Q de l'hémisphère diminue. Mais quelque grand que soit p, l'inclinaison n'atteindra jamais 90°. Ce résultat est analogue à celui qui a été trouvé pour le peson. (M., n° 133.)

2e **Cas.** *On a une enveloppe hémisphérique.*

Alors $$d = \frac{R}{2} \qquad \text{(M., n° 83.)}$$

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2p}{Q}$$

Pour des valeurs données de p et de Q, on voit que l'inclinaison est moindre dans le 2e cas que dans le 1er; ce qui est évident, *à priori*, puisque d est plus grand dans le second cas que dans le premier.

3e **Cas.** *On a une enveloppe hémisphérique d'une certaine épaisseur.*

Les rayons sont R et r.

Alors $$d = \frac{3}{8} \times \frac{(R + r)(R^2 + r^2)}{R^2 + Rr + r^2}$$ (Prob. sup., p. 79.)

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8pR(R^2 + Rr + r^2)}{3Q(R + r)(R^2 + r^2)}$$

Cette formule renferme celle des deux cas précédents, on les obtiendrait en faisant 1° $r = 0$

2° $r = R$

Problème 145

Dans une coupe hémisphérique, quelle sera la position du point pesant P *pour qu'il équilibre le poids* Q ?

1re **Méthode.** Je décompose le poids P en deux forces, l'une F normale à la coupe, l'autre Q_1 dirigée suivant le cordon.

La première est détruite par la résistance de la coupe ; la deuxième doit être égale à Q, pour qu'il y ait équilibre.

On aura la relation

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

Mais $\alpha + \beta = \frac{90° + \alpha}{2}$

d'où $2\beta + \alpha = 90°$

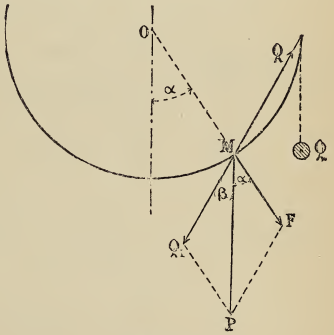


Fig. 198.

dès lors $$\frac{P}{Q} = \frac{\sin\left(\frac{90 - \alpha}{2} + \alpha\right)}{\sin \alpha} = \frac{\sin\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}.$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin 45 \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos 45}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right)$$

d'où l'on tire *

$$\textbf{Rép.}\quad \sin\alpha = \frac{Q^2}{4P^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot \frac{P^2}{Q^2}}\right).$$

2e Méthode. Si l'on supprime la corde de la demi-sphère, il faut appliquer au corps une force Q dans la direction de la corde et la réaction N normale à la surface.

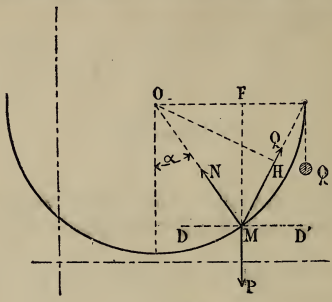


Fig. 199.

Les trois forces N, P, Q se faisant équilibre, on a, en appliquant les équations d'équilibre,

Proj. sur X $\qquad N \cos NMD - Q \cos QMD = 0$

ou $\qquad N \sin\alpha = Q \cos\frac{90 + \alpha}{2} \qquad (1)$

Proj. sur Y $\qquad P = N \cos\alpha + Q \sin\frac{90 + \alpha}{2} \qquad (2)$

Moments (O) $\qquad P \times OF = Q \times OH$

ou $\qquad P \times R \sin\alpha = Q \times R \cos\left(\frac{90 - \alpha}{2}\right)$

ou $\qquad P \sin\alpha = Q \cos\frac{90 - \alpha}{2} \qquad (3)$

---

* Cette équation, qui est de la forme $m = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$, peut se résoudre ainsi :

$$m \sin x \cos x = \cos x + \sin x$$

d'où $\qquad m^2 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x$

ou $\quad m^2 \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2x = 1 + \sin 2x;$ d'où $\frac{m^2}{4} \cdot \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$

$$\sin 2x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + m^2}}{\frac{m^2}{2}} = \frac{2}{m^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + m^2}\right)$$

Les relations (1) et (2) fournissent

$$N = Q \frac{\cos \frac{90 + \alpha}{2}}{\sin \alpha} \quad \text{et} \quad P = Q \cdot \frac{\cos \frac{90 + \alpha}{2}}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha + Q \sin \frac{90 + \alpha}{2}$$

d'où
$$P = Q \frac{\cos \left(\frac{90 + \alpha}{2} - \alpha \right)}{\sin \alpha} = Q \frac{\cos \frac{90 - \alpha}{2}}{\sin \alpha}$$

Cette valeur, portée dans (3), donnera

$$Q \cdot \frac{\cos \frac{90 - \alpha}{2}}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = Q \cos \frac{90 - \alpha}{2}$$

ce qui est une identité.

La troisième relation est donc inutile; nous aurions pu le prévoir, puisque le corps à considérer n'est qu'un point; il n'y a pas à exprimer *à la fois* que la résultante des forces est nulle, et que la somme des moments est nulle.

Il suffit : 1° ou des deux premières relations (1) et (2);
2° ou de la troisième seule (3).

Cette troisième relation fournit

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos \left(45 - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} = \frac{\cos 45 \cos \frac{\alpha}{2} + \sin 45 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

ou encore
$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$$

d'où
$$\frac{4P}{Q\sqrt{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

d'où l'on tire, ainsi qu'on l'a vu précédemment (page 186),

$$\sin \alpha = \frac{Q^2}{4P^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot \frac{P^2}{Q^2}} \right)$$

Remarque. Examinons la troisième relation

$$P \sin \alpha = Q \cos \frac{90 - \alpha}{2}$$

Nous la résoudrons plus aisément en prenant pour inconnue l'angle β, complément de α, on aura

$$P \cos \beta = Q \cos \frac{\beta}{2}$$

d'où
$$P \left(2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1 \right) = Q \cos \frac{\beta}{2}$$

ou
$$2P \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - Q \cos \frac{\beta}{2} - P = 0$$

d'où
$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + 8P^2}}{4P}$$

Problème 146

Deux points P *et* Q *de poids différents sont réunis par un fil de longueur* l, *position d'équilibre ; le rayon du cercle est* R.

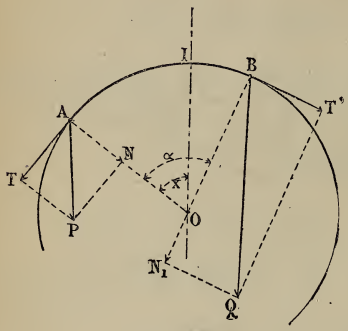


Fig. 200.

Chacune des forces P et Q se décompose en deux, l'une normale et l'autre tangentielle ; les forces normales N, N_1 sont détruites par la fixité du cercle ; pour qu'il y ait équilibre, les deux tensions T, T' doivent être égales.

Connaître la longueur $AB = l$ et le rayon du cercle, c'est connaître l'angle $AOB = \alpha$. La position d'équilibre sera déterminée, si l'on trouve l'angle x que fait le rayon OA avec la verticale.

Évaluons les forces T et T' et égalons-les, on a

$$\frac{T}{P} = \sin x \quad \text{et} \quad \frac{T'}{Q} = \sin(\alpha - x)$$

Mais on doit avoir $\qquad T = T'$

d'où $\qquad P \sin x = Q \sin(\alpha - x)$

par suite, $\qquad \dfrac{\sin(\alpha - x)}{\sin x} = \dfrac{P}{Q}$

ou $\qquad \dfrac{\sin\alpha \cos x - \cos\alpha \sin x}{\sin x} = \sin\alpha \times \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} - \cos\alpha = \dfrac{P}{Q}$

d'où l'on tire

Rép. $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin\alpha}{\dfrac{P}{Q} + \cos\alpha}.$

Remarque. Si l'on veut faire intervenir l et R, on a

$$\pi R \cdot \frac{\alpha}{180} = l, \quad \alpha = \frac{180 \cdot l}{\pi R}$$

Discussion. Il est évident que la longueur l du fil ne peut être comprise entre une demi-circonférence et une circonférence entière, car alors l'un des poids ne pourrait se maintenir appuyé sur le cercle. Cette longueur pourrait être supérieure à une circonférence, mais alors la question est la même que pour un fil qui aurait cette longueur diminuée d'un nombre entier de circonférences.

Il en résulte que α doit être considéré comme variant de 0° à 180° seulement.

Cas général. L'angle x cherché ne saurait être supérieur à 90°; il faut donc que sa tangente soit toujours positive.

1° Si l'angle α est compris entre 0 et 90°, comme $\cos \alpha$ est positif de 0 à 90°, *il y aura toujours une position d'équilibre, quelles que soient les valeurs relatives de* P *et de* Q.

Ce résultat se conçoit. Si P est petit, par exemple, il suffira que Q se maintienne près du point culminant I pour que le poids P équilibre Q ; la formule elle-même le montre : elle indique que pour une valeur déterminée de α, l'angle x est d'autant plus voisin de α, c'est-à-dire que B est d'autant plus rapproché de I, que P est plus petit par rapport à Q.

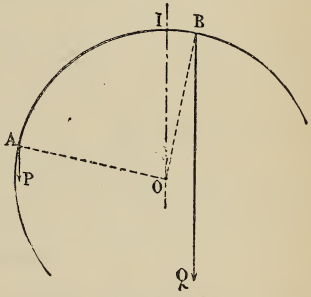


Fig. 201.

Si Q est infiniment grand par rapport à P, la formule donne $x = \alpha$; ce qui indique que la charge Q est en I, où elle n'a pas besoin, en effet, d'être équilibrée.

2° Si l'angle α est supérieur à 90°, il n'y aura une solution qu'autant que l'on aura

$$\frac{P}{Q} + \cos \alpha > 0$$

d'où

$$\cos \alpha \leqq -\frac{P}{Q}$$

La valeur $\cos \alpha = -\frac{P}{Q}$ donnera le maximum de l'angle α.

Cas particuliers. 1° Si $P = Q$, A et B doivent être symétriques par rapport à OI ; la formule fournit en effet

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

d'où

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

2° Si $\alpha = 180°$, la condition du 2e cas général fournit $-\frac{P}{Q} = -1$. P et Q seront égaux, ce qui doit être en effet.

Remarque. Il est facile de résoudre l'équation

$$P \sin x = Q \sin (\alpha - x)$$

de manière à obtenir une formule logarithmique. Pour simplifier, faisons

$$(\alpha - x) = y$$

on a

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{Q}{P}$$

on en tire

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{Q - P}{Q + P}$$

d'où (Trig., n° 47)

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (x + y)} = \frac{Q - P}{Q + P}$$

Et, en remarquant que $x + y = \alpha$, on a

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (x - y) = \frac{Q - P}{Q + P} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Connaissant la somme et la différence des arcs x et y, on peut les déterminer.

Problème 147

Deux sphères de poids P *et* P′ *appuient sur deux plans inclinés dont les angles sont* α *et* β. *Position de la ligne des centres* OO′ *quand il y a équilibre.*

La ligne des centres doit être dans un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans ; car ce plan doit, pour qu'il y ait équilibre, contenir les poids des sphères et les réactions des deux plans.

Les poids P et P′ peuvent se décomposer chacun en deux forces: les unes N et N′ normales aux plans et détruites par la fixité de ces plans ; les autres R et R′, suivant la ligne des centres et qui doivent être égales pour qu'il y ait équilibre.

Évaluons R et R′ et égalons leurs valeurs.

Soit x l'angle de OO′ avec l'horizon ; on a dans les triangles de décomposition :

$$\frac{R}{P} = \frac{\sin \alpha}{\sin (90 + x + \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos (x + \alpha)}$$

$$\frac{R'}{P'} = \frac{\sin \beta}{\sin (90 + \beta - x)} = \frac{\sin \beta}{\cos (\beta - x)}$$

d'où $$R = R' = P' \times \frac{\sin \beta}{\cos (\beta - x)} = P \times \frac{\sin \alpha}{\cos (\alpha + x)}$$

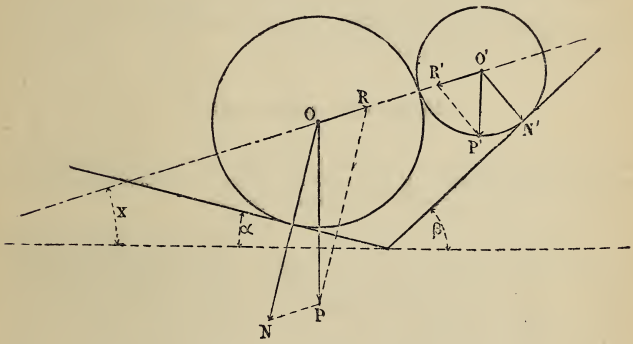


Fig. 202.

D'où $$P' \sin \beta \cos (\alpha + x) = P \sin \alpha \cos (\beta - x)$$

$$P' \sin \beta (\cos \alpha \cos x - \sin \alpha \sin x) = P \sin \alpha (\cos \beta \cos x + \sin \beta \sin x)$$

En divisant par $\cos x$, on obtient

$$P' \sin \beta (\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} x) = P \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta \,.\, \operatorname{tg} x)$$

d'où

$$\operatorname{tg} x (P \sin \alpha \sin \beta + P' \sin \beta \sin \alpha) = P' \sin \beta \cos \alpha - P \sin \alpha \cos \beta$$

d'où $$\operatorname{tg} x = \frac{\dfrac{P'}{\operatorname{tg} \alpha} - \dfrac{P}{\operatorname{tg} \beta}}{(P + P')} = \frac{P' \operatorname{tg} \beta - P \operatorname{tg} \alpha}{(P + P') \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Rép. $$\operatorname{tg} x = \frac{P' \operatorname{tg} \beta - P \operatorname{tg} \alpha}{(P + P') \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Si les deux angles α et β sont complémentaires, on trouve

$$\operatorname{tg} x = \frac{P' \operatorname{tg} \beta - P \operatorname{tg} (90 - \beta)}{(P + P') \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (90 - \beta)}$$

Rép. $$\operatorname{tg} x = \frac{P' \operatorname{tg}^2 \beta - P}{(P + P') \operatorname{tg} \beta}.$$

Remarques. 1° On peut observer que l'inclinaison de la ligne des centres dépend uniquement du poids des sphères et non de leur diamètre.

2° La discussion des cas particuliers de ce problème se ferait aisément ; elle fournit des résultats intéressants.

3° Si les sphères étaient de même densité, on obtiendrait la valeur de x, en remplaçant les poids par les cubes des rayons.

Si les corps, au lieu d'être des sphères, étaient des disques, on remplacerait P et P′ par les carrés des rayons.

Et si les corps étaient des anneaux infiniment minces, on remplacerait P et P′ par les rayons.

Problème supplémentaire.

Trois sphères O, O′, O″ *de poids* P, P′, P″ *se touchent étant placées dans une coupe hémisphérique; leurs centres sont dans un même plan vertical avec le centre de la coupe. Trouver la position d'équilibre.*

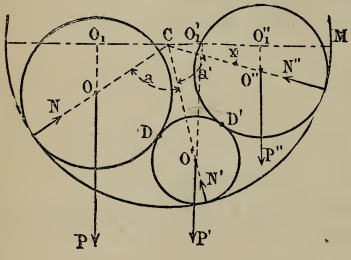


Fig. 203.

Les trois sphères forment un système en équilibre sous l'action de leurs points P, P′, P″ et des réactions N, N′, N″ aux points de contact. Il n'y a pas lieu de tenir compte des pressions aux points D, D′, car elles sont, en chacun de ces points, égales et de sens contraire.

Si nous désignons par x l'angle MCO″ qui suffit pour déterminer la position d'équilibre; par a, a' les angles connus que font les lignes des centres; par d, d', d'' les distances connues des centres des sphères au centre de la coupe; nous aurons, en prenant les moments par rapport au centre, et remarquant que ceux des réactions sont nuls,

$$0 = P \times O_1C - P' \times O'_1C - P'' \times O''_1C$$

d'où $\quad Pd \cos(180 - a - a' - x) - P'd' \cos(a' + x) - P''d'' \cos x = 0$

ou $\quad - Pd \cos[(a + a') + x] - P'd' \cos(a' + x) - P''d'' \cos x = 0$

En développant

$$- Pd \cos(a + a') \cos x + Pd \sin(a + a') \sin x - P'd' \cos a' \cos x + P'd' \sin a' \sin x - P''d'' \cos x = 0$$

En divisant par $\cos x$,

$$- Pd \cos(a + a') + Pd \sin(a + a') \operatorname{tg} x - P'd' \cos a' + P'd' \sin a' \operatorname{tg} x - P''d'' = 0$$

Rép. $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{Pd \cos(a + a') + P'd' \cos a' + P''d''}{Pd \sin(a + a') + P'd' \sin a'}$

Problème 148

Deux sphères en contact sont en équilibre dans une coupe hémisphérique dont l'axe est vertical et dont le centre est en C. *Quelle est l'inclinaison de la ligne des centres* OO' ?

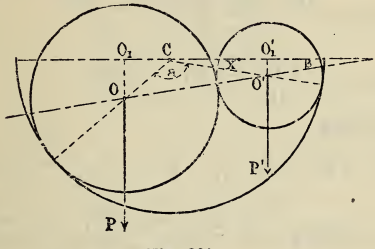


Fig. 204.

En conservant les mêmes notations que dans le problème précédent, on aura

$$P \times CO_1 = P' \times CO'_1$$

ou $$P \times d \cos(180^\circ - a - x) = P'd' \cos x$$

d'où $$-P\, d \cos(a + x) = P'\, d' \cos x$$

En développant et divisant par $\cos x$,

$$-P\, d \frac{\cos a \cos x}{\cos x} + P\, d \frac{\sin a \sin x}{\cos x} = P'\, d'$$

ou $$\operatorname{tg} x = \frac{P'\, d' + P\, d \cos a}{P\, d \sin a}$$

Remarques. 1° Cette formule aurait pu se tirer de la précédente, en y faisant a' et P'' égaux à zéro.

2° Si les sphères sont d'une même matière, leurs poids sont proportionnels aux cubes des rayons ; dès lors

$$\operatorname{tg} x = \frac{R'^3 d' + R^3 d \cos a}{R^3 d \sin a} \qquad (1)$$

3° L'angle a et les distances d, d' peuvent s'exprimer en fonction de R_1, R' et du rayon R de la coupe.

Le triangle OO'C fournit

$$d = R_1 - R, \quad d' = R_1 - R'$$

il donne l'angle a en fonction des trois côtés d, d', $R + R'$.

On a, en effet,

$$\overline{OO'}^2 = d^2 + d'^2 - 2dd' \cos a$$

ou

$$(R + R')^2 = (R_1 - R)^2 + (R_1 - R')^2 - 2(R_1 - R)(R_1 - R') \cos a$$

d'où l'on tirera cos a, et, de sa valeur, celle de sin a.

$$\cos a = \frac{R_1^2 - R_1(R + R') - RR'}{(R_1 - R)(R_1 - R')}$$

et

$$\sin a = \frac{2\sqrt{RR'R_1[R_1 - (R+R')]}}{(R_1 - R)(R_1 - R')} \qquad (1)$$

On aura dès lors

$$\operatorname{tg} x = \frac{R'^3(R_1 - R') + R^3(R_1 - R) \times \dfrac{R_1(R + R') + RR' - R_1^2}{(R_1 - R)(R_1 - R'}}{R^3(R_1 - R)\dfrac{2\sqrt{RR'R_1[R_1 - (R + R')]}}{(R_1 - R)(R_1 - R')}}$$

La valeur de x ne sera réelle qu'autant que le facteur $R_1 - (R + R')$, placé sur le radical, sera plus grand que 0, ce qui entraîne $R + R' < R_1$. Ce qui est évident.

L'angle x, ainsi trouvé, n'est pas l'inclinaison β de la ligne des centres ; mais cet angle β égale $CO'O - x$, et $CO'O$ peut être fourni par le triangle $OO'C$.

Problème 149

Une barre AB *appuie contre un plan vertical* OC *et sur la face interne d'une coupe hémisphérique de rayon* R *dont le centre est sur le plan.*

Position d'équilibre.

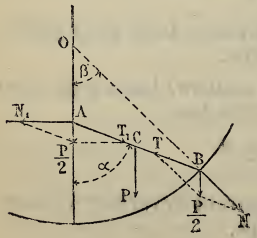


Fig. 205.

1re Méthode. Le poids P de la barre se décompose en deux forces $\frac{P}{2}$ appliquées aux extrémités A et B.

En ces points, chacune de ces forces peut être remplacée par deux, l'une normale, l'autre dans la direction de la barre.

En B, on aura N suivant le rayon et T suivant la barre ; en A, N_1 normale au plan et T_1 suivant la barre.

Les deux forces N et N_1, normales, sont détruites ; il suffit, pour que l'équilibre subsiste, que $T = T_1$.

Exprimons ces deux forces.

La position d'équilibre sera déterminée, si on connaît l'angle α de la barre avec le plan vertical.

Les triangles de décomposition fournissent

$$T_1 = \frac{P}{2} \times \frac{1}{\cos \alpha}$$

et

$$\frac{T}{\frac{P}{2}} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$$

Or $T = T_1$; donc $\frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{P}{2} \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$

de là

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} \qquad (1)$$

Le triangle OAB fournit, l étant de la longueur de la barre,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{l}{R} \text{ ou } \sin \beta = \frac{l}{R} \sin \alpha \qquad (2)$$

La relation (1) donne successivement

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}$$

puis

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = 1$$

d'où

$$\operatorname{tg} \alpha \times \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} - 1 = 1$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \beta \qquad (3)$$

On a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{l}{R} \sin \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2 \sin^2 \alpha}}$$

La relation (3) donne

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \, . \, \frac{\frac{l}{R} \sin \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2 \sin^2 \alpha}} \qquad (4)$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 2 \, \frac{l}{R} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2 \sin^2 \alpha}}$$

En élevant au carré et chassant les dénominateurs,

$$1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2 \sin^2 \alpha = (2)^2 . \left(\frac{l}{R}\right)^2 . (1 - \sin^2 \alpha)$$

d'où $$3 \frac{l^2}{R^2} . \sin^2 \alpha = 4 \frac{l^2}{R^2} - 1$$

et $$\sin^2 \alpha = \frac{4l^2 - R^2}{3l^2}$$

Rép. $$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{4l^2 - R^2}}{l\sqrt{3}} .$$

Remarques. 1° En divisant la relation (3) par $\sin \alpha$, on a annulé la solution $\sin \alpha = 0$, soit $\alpha = 0$; solution qui convient parfaitement : la barre est verticale.

2° Si l'on suppose que $l = R$, la formule fournit

$$\sin \alpha = 1, \quad \alpha = 90°$$

qui correspond à la position horizontale de la barre ; elle est alors en équilibre, si elle ne peut glisser le long du plan vertical.

2e **Méthode.** On peut supprimer la coupe et le plan, pourvu que l'on applique à la barre deux forces normales N_1, N'_1 représentant les réactions des surfaces.

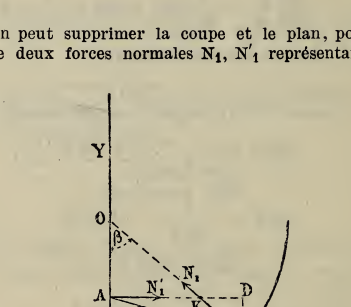


Fig. 206.

La barre devant être en équilibre sous l'action des forces P, N_1, N'_1, on aura, en appliquant les équations d'équilibre,

Projections	X	$N'_1 - N_1 \sin \beta = 0$	(1)
»	Y	$P - N_1 \cos \beta = 0$	(2)
Moments	(B)	$P \times BE - N'_1 \times DB = 0$	(3)

Cette dernière relation peut s'écrire

$$P \times \frac{l}{2} \sin \alpha = N'_1 \, l \cos \alpha$$

d'où

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{N'_1}{P}$$

Or les formules (1) et (2) fournissent

$$\frac{N'_1}{P} = \operatorname{tg} \beta$$

Donc

$$2 \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

Ce qui est la relation trouvée précédemment.

Remarque. Il est bon d'observer que si la figure représentait réellement la position d'équilibre, la ligne PC passerait par le point K, point d'intersection des deux réactions.

Méthode graphique. Une construction très simple permet de résoudre le problème graphiquement.

Soit la barre de longueur AB dans sa position d'équilibre, la verticale menée par le point C doit passer au point de rencontre D des deux réactions BO, AD ; mais CD, étant verticale, est parallèle à OA, et par suite passe par le milieu du rayon OB ; le triangle ADC étant rectangle, on est conduit à la construction suivante :

On prend A′B′ égale à la longueur AB de la barre donnée ; sur sa moitié A′C′ on construit une demi-circonférence ; du point B′ comme centre avec une longueur égale à la moitié du rayon OB on décrit un arc de cercle qui coupe la demi-circonférence au point D′ ; le triangle rectangle A′D′C′ donne D′C′ égale à DC et par suite moitié de AO.

On prend donc OA = 2C′D′ ; du point A avec un rayon égal à AB on coupe le quadrant au point B ; AB est la position d'équilibre de la barre.

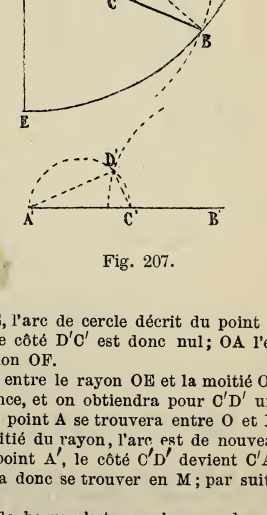


Fig. 207.

Discussion. Si AB est égale au rayon OE, l'arc de cercle décrit du point B′ est tangent en C′ à la demi-circonférence ; le côté D′C′ est donc nul ; OA l'est aussi ; la barre est horizontale dans la position OF.

Pour toute longueur de la barre comprise entre le rayon OE et la moitié OM de ce rayon, l'arc coupera la demi-circonférence, et on obtiendra pour C′D′ une longueur plus petite que le quart du rayon ; le point A se trouvera entre O et M.

Lorsque la barre a pour longueur OM moitié du rayon, l'arc est de nouveau tangent à la demi-circonférence ; mais, au point A′, le côté C′D′ devient C′A′, qui alors vaut $^1/_4$ du rayon ; le point A devra donc se trouver en M ; par suite, la barre doit être verticale.

D'où l'on conclut que toutes les fois que la barre n'est pas plus grande que la moitié du rayon, elle viendra se dresser contre le plan OE. Il n'en est pas

ainsi dans la pratique, à cause du frottement qui modifie les résultats que nous venons de trouver.

Ces résultats sont, du reste, identiques à ceux que fournit la discussion de la formule $\sin \alpha = \frac{\pm\sqrt{4l^2 - R^2}}{l\sqrt{3}}$, trouvée plus haut.

Problème 150

A l'extrémité B *d'une tige horizontale droite* AB, *scellée dans un mur par son extrémité* A, *est suspendu un poids* P.

Un bras DC *fixé en* D *contre le mur soutient la tige en* C. *On désigne par* α *l'angle* ADC, *et l'on demande*

1° *La force* T *qui sollicite* AB *dans la direction* AB;

2° *La pression verticale qui, en* A, *s'exerce de bas en haut;*

3° *La pression* t *que subit le bras* CD *dans sa direction.*

Application. $P = 100^k$, $AB = 1^m20$, $AC = 0^m20$, $ADC = 30°$.

(Besançon, bacc., octobre 1872.)

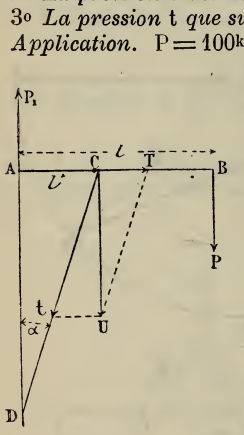


Fig. 208.

1re Méthode. Le poids P peut être considéré comme la résultante de deux forces parallèles U et P_1 de sens contraire; P est la pression verticale en A.

On aura $\frac{P_1}{P} = \frac{CB}{AC}$

d'où $P_1 = \frac{P(l - l')}{l'}$

et $U = P\frac{l}{l'}$

La force U se décompose en deux, suivant la barre AB et le bras CD; elle fournit ainsi les deux forces demandées t et T.

On a $$t = U \times \frac{1}{\cos\alpha} = P \cdot \frac{l}{l'} \times \frac{1}{\cos\alpha}$$

et $$T = U \operatorname{tg}\alpha = P \cdot \frac{l}{l'} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Rép. $T = P \cdot \frac{l}{l'} \operatorname{tg}\alpha$, $P_1 = P \cdot \frac{l - l'}{l'}$, $t = P \cdot \frac{l}{l'} \times \frac{1}{\cos\alpha}$

2e Méthode. Si nous supprimons le *scellement du mur*, il faut le remplacer par une force T′ suivant AB et par une autre P′ verticale qui remplace les assises supérieures. Au bras CD devra être substituée une force t' égale et contraire à la compression de ce bras.

La barre AB étant en équilibre sous l'action des forces P′, T′, t', P, on aura, en appliquant les équations d'équilibre,

Projections X $\quad T' - t' \sin \alpha = 0 \quad (1)$

» Y $\quad P + P' - t' \cos \alpha = 0 \quad (2)$

Moments (C) $\quad P(l - l') - P'l' = 0 \quad (3)$

La relation (3) fournit $\quad P' = P \cdot \dfrac{(l - l')}{l'} \quad (a)$

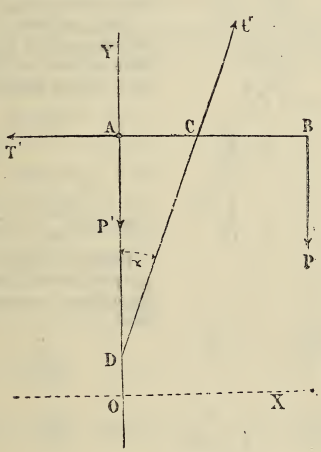


Fig. 209.

Les équations (1) et (2) donnent

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T'}{P + P'}$$

d'où $\quad T' = \left(P + P \dfrac{l - l'}{l'}\right) \operatorname{tg} \alpha = P \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(1 + \dfrac{l - l'}{l'}\right)$

ou $\quad T' = P \cdot \dfrac{l}{l'} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (b)$

De (1) on tire $\quad t' = \dfrac{T'}{\sin \alpha} = P \cdot \dfrac{l}{l'} \times \left(\dfrac{1}{\cos \alpha}\right) \quad (c)$

Application. En prenant les nombres donnés dans l'énoncé, on obtient

Rép. $\quad T' = T = 346^k; \quad P' = 500^k; \quad t' = t = 692^k \ldots$

Problème 151

Deux poids P *et* P′ *sont attachés aux extrémités d'un fil de longueur* l, *qui passe en* D *sur une petite poulie.*

Ces corps reposent sur deux plans inclinés adossés et faisant avec la verticale des angles β *et* β′.

Quelle est la position d'équilibre, AD = h ?

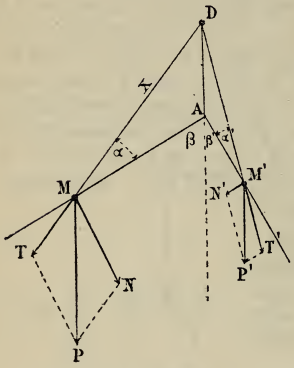


Fig. 210.

Chacune des forces P et P′ se décompose en deux : l'une normale au plan, l'autre dirigée suivant le cordon.

Les deux forces normales N, N′ sont détruites par la fixité du plan ; le système sera en équilibre si les tensions T et T′ sont égales.

Or $$T = P \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

et $$T' = P' \cdot \frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'} \ *$$

d'où $$P\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = P'\frac{\cos\beta'}{\cos\alpha'} \qquad (1)$$

Désignons par x la distance DM qui peut servir à marquer la position d'équilibre ; on aura, dans le triangle MDA,

$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin\alpha}$$

d'où on tire

$$\frac{x^2}{\sin^2\beta} = \frac{h^2}{\sin^2\alpha} = \frac{h^2}{1-\cos^2\alpha} \ ; \quad \text{d'où} \quad \cos^2\alpha = 1 - \frac{h^2\sin^2\beta}{x^2}$$

On trouverait également

$$\cos^2\alpha' = 1 - \frac{h^2\sin^2\beta'}{(l-x)^2}$$

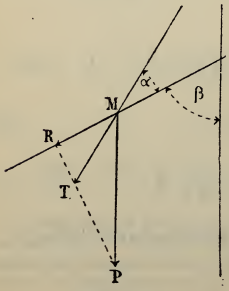


Fig. 211.

* Un moyen simple pour établir ces relations est celui-ci :

On a $$R = P\cos\beta$$

mais $$T = \frac{R}{\cos\alpha}$$

Donc $$T = P\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Si l'on porte ces valeurs dans (1), il vient

$$P \cos \beta \sqrt{1 - \frac{h^2 \sin^2 \beta}{x^2}} = P' \cos \beta' \sqrt{1 - \frac{h^2 \sin^2 \beta'}{(l - x)^2}}$$

équation dans laquelle on tire x.

Problème 152

Une barre AB, *de poids* P *et de longueur* 2l, *s'appuie en* A *contre un plan vertical, en* C *elle repose sur une cheville fixe.*

On demande de déterminer la position d'équilibre et les pressions exercées par le plan et par la cheville sur la tige.

Soit d la distance de la cheville au plan vertical et x l'angle de la barre et du plan.

1re Méthode. Le poids P de la barre peut être remplacé par deux forces T et U parallèles et de sens contraire, appliquées en C et en A.

Ces forces auront pour valeurs

$$T = P \times \frac{AO}{AC} \qquad (1)$$

et

$$U = P \times \frac{CO}{AC} \qquad (2)$$

La force T peut se décomposer en deux, l'une R_1 perpendiculaire à la barre et qui représente la pression de celle-ci sur la cheville, l'autre CK suivant la barre.

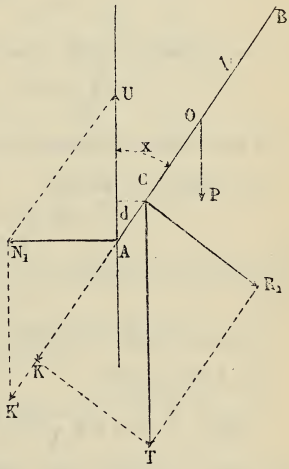


Fig. 212.

La force CK peut être transportée en A, elle devient AK', et il y aura équilibre, si la composition des deux forces qui restent, AK' et U, donne une résultante AN_1 normale au plan.

On a, dans ces diverses décompositions,

$$R_1 = T \sin x$$

$$K \text{ ou } K' = T \cos x$$

$$N_1 = K' \sin x = T \sin x \cos x$$

$$U = K' \cos x = T \cos^2 x$$

Les relations (1) et (2) peuvent ainsi se transformer :

$$T = P \times \frac{\frac{l}{2}}{\frac{d}{\sin x}} = \frac{Pl \sin x}{2d}$$

et $$U = P \times \frac{\left(\frac{l}{2} - \frac{d}{\sin x}\right)}{\frac{d}{\sin x}} = \frac{P\,(l \sin x - 2d)}{2d}.$$

d'où $$R_1 = \frac{Pl \sin^2 x}{2d} \qquad (3)$$

$$N_1 = \frac{Pl \sin^2 x \,.\, \cos x}{2d} \qquad (4)$$

et, en égalant les deux valeurs de U,

$$\frac{Pl \sin x \cos^2 x}{2d} = \frac{P\,(l \sin x - 2d)}{2d} \qquad (5)$$

Il nous reste finalement les trois relations (3), (4) et (5).

La relation (5) donne

$$l \sin x\,(1 - \cos^2 x) = 2d$$

ou $$l \sin^3 x = 2d$$

d'où $$\sin^3 x = \frac{2d}{l}$$

C'est la valeur qui détermine la position d'équilibre.

Dès lors on aura

Rép. 1° $\sin x = \sqrt[3]{\frac{2d}{l}}$.

2° $R_1 = \frac{Pl}{2d}\left(\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}\right)^2 = P\sqrt[3]{\frac{l}{2d}}$.

3° $N_1 = \frac{Pl}{2d}\left(\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}\right)^2\left(\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}\right)^2}\right) = P\sqrt[3]{\frac{l}{2d}}\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}\right)^2}$

Autre marche. Nous avons vu que finalement la force P se ramène à R_1 et N_1 ; donc, si nous composons ces deux dernières, nous devons trouver P ; dès lors ces deux forces devront se rencontrer en D, et le parallélogramme de composition devra fournir $DP' = OP$ (fig. 213).

On aura dès lors, dans le parallélogramme, les relations

$$R_1^2 = P^2 + N_1^2$$

$$\frac{P}{N_1} = \operatorname{tg} x$$

Puis, en exprimant AD de deux manières, d'abord dans le triangle rectangle ACD, qui donne

$$AD = \frac{AC}{\sin x} = \frac{d}{\sin^2 x}$$

puis dans le triangle rectangle ADO, où l'on a

$$AD = \frac{l}{2} \sin x$$

on aura $\frac{l}{2} \sin x = \frac{d}{\sin^2 x}$

par suite, $\sin^3 x = \frac{2d}{l}$

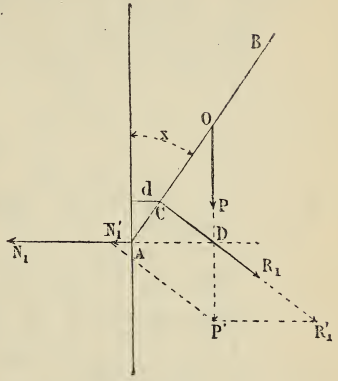


Fig. 213.

Résultat déjà trouvé ; le reste s'établirait aisément.

Remarque. Les valeurs de R_1 et N_1 trouvées précédemment doivent satisfaire à la relation

$$R_1^2 = P^2 + N_1^2 \quad \text{ou} \quad R_1^2 - N_1^2 = P^2$$

C'est, en effet, ce qui a lieu, car on a

$$P^2\left(\sqrt[3]{\frac{l}{2d}}\right)^2 - P^2\left(\sqrt[3]{\frac{l}{2d}}\right)^2\left[1 - \left(\sqrt[3]{\frac{2d}{l}}\right)^2\right] = P^2$$

Discussion. Pour que le problème soit possible, il suffit que l'on ait $\sin x < 1$, soit

$$\sqrt[3]{\frac{2d}{l}} < 1 \quad \text{ou} \quad \frac{2d}{l} < 1$$

d'où $$d < \frac{l}{2}$$

Il suffit que la cheville soit à une distance du plan inférieure à la moitié de la longueur de la barre. On voit, *à priori*, qu'il en doit être ainsi.

2e **Méthode.** On peut supprimer le point C et le plan, en considérant les deux réactions R et N (fig. 214), que ces obstacles exercent sur la tige. Celle-ci sera en

équilibre sous l'action des trois forces R, N, P ; en appliquant les équations d'équilibre, on aura

Projections sur X $\quad P - R \sin x = 0 \quad (1)$

» » Y $\quad N - R \cos x = 0 \quad (2)$

Moments (C) $\quad P \times CF - N \times CE = 0 \quad (3)$

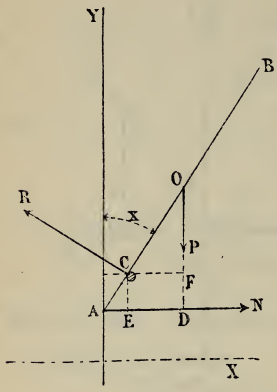


Fig. 214.

Cette dernière relation peut s'écrire

$$\frac{P}{N} = \frac{CE}{CF} = \frac{d \times \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{\frac{l}{2} \sin x - d}$$

Or (1) et (2) fournissent $\frac{P}{N} = \operatorname{tg} x$

Donc $\operatorname{tg} x = \dfrac{d}{\operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{l}{2} \sin x - d\right)}$

d'où $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{d}{\frac{l}{2} \sin x - d}$

ou $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{d}{\frac{l}{2} \sin x - d}$

et, d'après une propriété des proportions,

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{d}{\frac{l}{2} \sin x - d + d}$$

Soit $\quad \sin^2 x = \dfrac{d}{\frac{l}{2} \sin x}$

d'où $\quad \sin^3 x = \dfrac{d}{\frac{l}{2}} = \dfrac{2d}{l}$

résultat déjà trouvé..., etc.

Problème 153

Une lame homogène ABC, *de poids* P, *dont la forme est celle d'un triangle rectangle isocèle, est placée dans un plan vertical, et repose, par ses côtés, sur deux chevilles fixes* D *et* E *placées sur une horizontale* DE = d. *On demande de déterminer la position d'équilibre.*

Appliquons la *marche générale* que nous avons déjà exposée si souvent.

Le triangle est en équilibre sous l'action de son poids et des réactions normales des chevilles N, N_1 *.

En écrivant les trois équations d'équilibre, on aura, en désignant par x l'inclinaison de la base sur l'horizon, par b la base et par a les côtés égaux du triangle,

pr. sur Y $\quad P - N_1 \cos(45 - x) - N \sin(45 - x) = 0 \quad (1)$

pr. sur X $\quad N_1 \sin(45 - x) - N \cos(45 - x) = 0 \quad (2)$

mom. (A) $\quad P \times AH + N \times DA - N_1 \times AE = 0 \quad (3)$

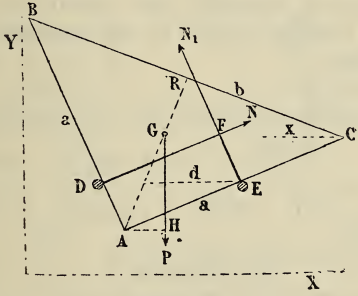


Fig. 215.

Cette relation (3) donne

$$P \times \frac{2}{3} \times AR \times \sin x + N \times d \sin(45 - x) = N_1 \times d \cos(45 - x)$$

Or $AR = BR = \frac{b}{2}$, d'où $P \times \frac{2}{3} \times AR = \frac{Pb}{3}$, et l'équation précédente devient

$$\frac{Pb}{3} \sin x + Nd \sin(45 - x) = N_1 d \cos(45 - x) \quad (4)$$

De l'équation (2) on tire

$$N_1 = \frac{N \cos(45 - x)}{\sin(45 - x)}$$

En mettant cette valeur de N_1 dans l'équation (1), on obtient

$$P = \frac{N \cos^2(45 - x)}{\sin(45 - x)} + N \sin(45 - x) = 0$$

ou $$P - N\left(\frac{\cos^2(45 - x) + \sin^2(45 - x)}{\sin(45 - x)}\right) = 0$$

* C'est intentionnellement que la figure n'indique pas que la direction de P passe par le point de concours F des deux réactions. Dans la position d'équilibre, P doit passer par ce point; il faudrait le faire remarquer et tracer une figure en conséquence si on employait une *méthode ordinaire;* mais avec la *méthode générale*, il n'en est pas besoin.

d'où $$N = P \sin(45 - x)$$

par suite, $$N_1 = P \cos(45 - x)$$

Ces valeurs portées en (4) fourniront

$$\frac{P}{3} b \sin x + Pd \sin^2(45 - x) = Pd \cos^2(45 - x)$$

d'où $$\frac{b \sin x}{3} = d\left[\cos^2(45 - x) - \sin^2(45 - x)\right]$$

Cette équation est satisfaite pour $x = 0$, et, en effet, le triangle est en équilibre lorsque BC est horizontal; mais il y a d'autres solutions.

On a (Trig., n° 36)

$$\cos^2(45 - x) - \sin^2(45 - x) = \cos 2(45 - x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Donc $$\frac{b \sin x}{3} = 2d \sin x \cos x$$

On voit que $x = 0$ satisfait à l'équation. En divisant par $\sin x$, on obtient

$$\frac{b}{3} = 2d \cos x$$

d'où $$\cos x = \frac{b}{6d}$$

Rép. $\cos x = \frac{b}{6d}$.

Discussion. La première solution $x = 0$ est toujours possible, tant que d n'est pas plus grand que b.

La deuxième solution $\cos x = \frac{b}{6d}$ donne, pour chaque valeur acceptable de $\frac{b}{6d}$, deux valeurs de x égales et de signe contraire, qui correspondent à deux positions symétriques du triangle et par suite acceptables toutes deux.

Mais il faut que l'on ait $$\frac{b}{6d} \leq 1$$

d'où $$d \geq \frac{b}{6}$$

I. Si $d = \frac{b}{6}$, on a $\cos x = 1$; par suite, $x = 0$. La deuxième solution se confond alors avec la première.

II. Si $d > \frac{b}{6}$, on a $\cos x < 1$, on trouve pour x une valeur

différente de zéro; mais cet angle x ne peut évidemment être plus grand que 45°; il faut donc que l'on ait de plus

$$\frac{b}{6b} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ d'où } d < \frac{b\sqrt{2}}{6}$$

La deuxième solution est acceptable, si l'on a

$$\frac{b}{6} < d < \frac{b\sqrt{2}}{6}$$

La figure ci-contre représente la position du triangle dans le cas de la deuxième solution. On voit qu'en effet les réactions N et N_1 se coupent sur la verticale GP du centre de gravité du triangle.

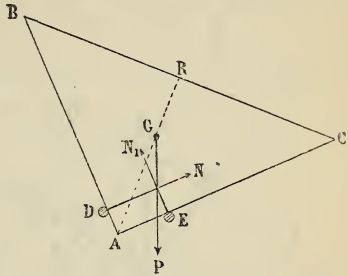


Fig. 216.

III. Si $d \geqq \frac{b\sqrt{2}}{6}$, il n'y a plus qu'une solution.

En résumé, si l'on fait grandir d constamment à partir de zéro, on a, pour

$d \leqq \frac{b}{6}$, une seule position d'équilibre;

$d < \frac{b\sqrt{2}}{6}$, trois positions d'équilibre;

$d \geqq \frac{b\sqrt{2}}{6}$, une seule position;

$d \geqq b$, impossible.

Problème 154

Une lame BAC, *rectangle en* A, *repose en équilibre, par les côtés de l'angle droit, sur deux disques fixes de la même épaisseur que la lame, placés avec elle dans le même plan vertical, et ayant leurs centres* O, O′ *sur une même horizontale. Si l'on suppose que, dans cette position d'équilibre, la verticale du centre de gravité de la surface* ABC *passe par le sommet de l'angle droit* A, *et, de plus, que ce sommet est sur la ligne des centres, on demande d'exprimer, au moyen des côtés* b, c *du triangle :*

1° *Le rapport des rayons* R *et* R′ *des disques;*

2° *Le rapport des segments* AO, AO′ *de la ligne des centres;*
3° *Le rapport des charges supportées par les deux disques.*

Si l'on a $b = 0^m60$, $c = 0^m80$, $R = 0^m27$, épaisseur $= 0^m05$, densité $= 7$, *on calculera le poids de la lame, la distance* MN *des points de contact, et on construira exactement la figure relative à ces données à l'échelle de* $^1/_{10}$. (Poitiers, Conc. ac. Ens. sp., 1879.)

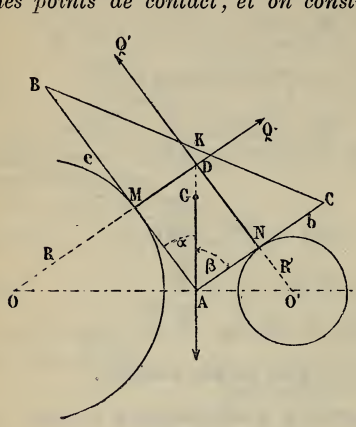


Fig. 217.

On peut supprimer les disques en les remplaçant par les réactions normales Q, Q′.

Le triangle étant en équilibre sous l'action de Q, Q′, P, la rencontre D de Q et de Q′ doit se faire sur la verticale AG.

1° *Rapport des rayons* R *et* R′ *des disques.*

On a les relations

$$R = MA \operatorname{tg} \beta, \qquad R' = NA \operatorname{tg} \alpha$$

d'où
$$\frac{R}{R'} = \frac{MA}{NA} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Or
$$MA = MD \operatorname{tg} \beta = NA \operatorname{tg} \beta$$

dès lors
$$\frac{R}{R'} = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Mais les angles α et β sont les angles B et C du triangle ABC, car AK est médiane.

Donc on a
$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} \alpha \text{ et } \frac{c}{b} = \operatorname{tg} \beta$$

d'où
$$\frac{R}{R'} = \frac{c^2}{b^2} : \frac{b}{c} = \frac{c^3}{b^3}$$

Rép. $$\frac{R}{R'} = \frac{c^3}{b^3}.$$

2° *Rapport des segments* AO, AO′ *de la ligne des centres.*

Le triangle rectangle ODO′ fournit

$$OA \times O'A = \overline{DA}^2$$

Les triangles semblables OMA et ONA donnent

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{R}{AN}$$

d'où, en multipliant membre à membre ces deux relations,

$$\overline{OA}^2 = R \times \frac{\overline{DA}^2}{AN} = R \times DA \times \frac{DA}{AN}$$

Or $$AN = DA \cos \beta$$

donc $$\overline{OA}^2 = \frac{R \times DA}{\cos \beta}$$

On trouverait de même

$$\overline{O'A}^2 = \frac{R' \times DA}{\cos \alpha}$$

d'où $$\frac{\overline{OA}^2}{\overline{O'A}^2} = \frac{R}{R'} \times \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{c^3}{b^3} \times \operatorname{tg} \beta = \frac{c^3}{b^3} \times \frac{c}{b} = \frac{c^4}{b^4}$$

Rép. $$\frac{OA}{O'A} = \frac{c^2}{b^2}.$$

3° *Rapport des charges supportées par les deux disques.*

Les charges Q et Q' ayant une résultante égale et de sens contraire à P, on a

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{NA}{MA} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

Rép. $$\frac{Q}{Q'} = \frac{b}{c}.$$

Remarque. La première réponse permet de résoudre ce problème : *Trouver deux lignes qui soient entre elles comme deux cubes donnés* m^3, n^3.

Construisons un triangle rectangle ayant m, n pour côtés. Soient AK la médiane partant du sommet de l'angle droit et xy la perpendiculaire en A à la médiane. D'un point quelconque O', abaissons O'N perpendiculaire sur AC; puis, du point P, PO perpendiculaire sur AB; les deux lignes ON, O'N sont dans le rapport des cubes de m et de n :

$$\frac{OM}{O'N} = \frac{m^3}{n^3}$$

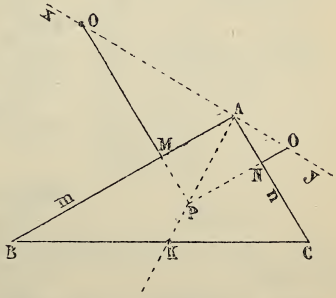


Fig. 218.

Application. La figure à l'échelle de $^1/_{10}$ est facile à construire.

Les valeurs numériques de l'énoncé donnent :

Rép. Poids de la lame, 168^{kg}.
Distance MN, $0^{m}60$.

Problème 155

Soit un triangle équilatéral pesant ABC, *dont le côté est* a *et qui n'est susceptible de se mouvoir que dans un plan vertical.*

Au milieu du côté AB, *on attache un fil de longueur* OM = l, *dont l'autre extrémité est fixée en un point* O *du mur vertical* AO.

La tension du fil donne lieu à une force T *appliquée au triangle dans la direction* MO. *Le sommet* A *s'appuie sans frottement sur le mur vertical* AO, *c'est-à-dire que la réaction du mur donne lieu à une force normale* N *appliquée au sommet* A.

On demande de trouver les positions d'équilibre du triangle ABC. (Ecole navale, 1880.)

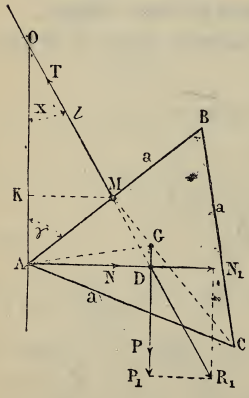


Fig. 219.

Les trois forces T, N et P doivent laisser le triangle en équilibre ; donc la résultante R_1 de P et de N doit être égale et directement opposée à T.

Désignons par x l'angle du fil avec le mur.

Le quadrilatère ADGM est inscriptible, car les angles en M et en D sont droits ; par suite, les angles AMD et AGD sont égaux.

L'angle AMD étant extérieur au triangle AMO, on a

$$AMD = x + \gamma$$

Donc $$AGD = x + \gamma$$

Mais, à cause des parallèles AO et GP, on a $AGD = GAO = GAM + MAO = 30^{o} + \gamma$

par suite, $x = 30^{o}$

Rép. *L'équilibre a lieu lorsque le fil fait un angle de* 30° *avec le plan vertical.*

Remarque. Ce résultat est singulier ; il ne dépend ni de la grandeur du côté du triangle, ni de la longueur du fil.

Discussion. 1° *Des positions d'équilibre.*

On peut remarquer que la solution que nous avons fournie convient à deux positions d'équilibre du triangle équilatéral.

Tout, en effet, se ramène à la construction du triangle OMA dans lequel on connaît deux côtés l et $\frac{a}{2}$ et l'angle opposé à l'un deux. Cette construction donne généralement deux solutions. (Voir fig. 220.)

2° *De la possibilité du problème.*

Le triangle OMA ne pourrait être construit, et ainsi il n'y aurait pas de solution si l'on avait MA ou $\frac{a}{2}$ inférieur à KM ou l sin 30° (fig. 219).

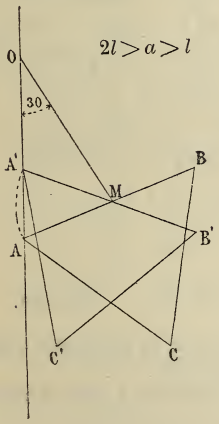


Fig. 220.

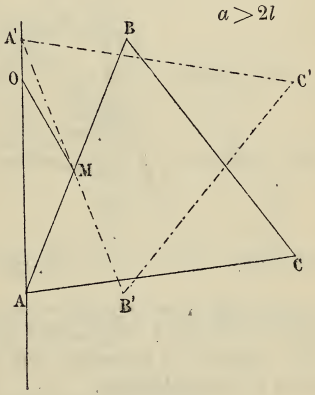


Fig. 221.

La condition de possibilité est donc

$$\frac{a}{2} \geqq l \sin 30$$

ou

$$\frac{a}{2} \geqq \frac{l}{2}$$

soit

$$a \geqq l$$

Il faut que le côté du triangle équilatéral soit au moins égal à la longueur du fil.

Si l'on a $a > l$, il y a 2 positions d'équilibre (fig. 220 et 221).
$a = l$ 1 » (fig. 222).

On peut remarquer que si a est plus grand que $2l$ (fig. 221), la seconde position pointillée ne saurait convenir.

On pourrait pousser plus loin la discussion et montrer que si VV' est un mur, ainsi que le suppose le problème, et non un obstacle représenté par une simple ligne, il peut y avoir une des solutions qu'il faut rejeter, c'est lorsque l'angle MA'V' (fig. 223) serait inférieur à 60° ; la figure 223 indique ce cas.

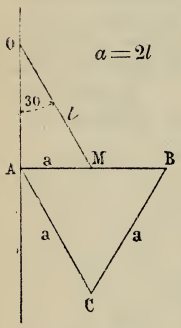


Fig. 222.

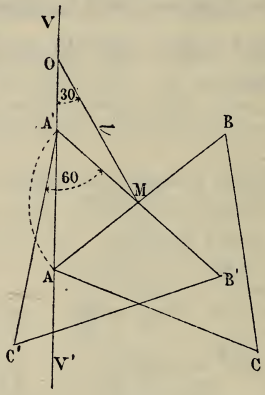


Fig. 223.

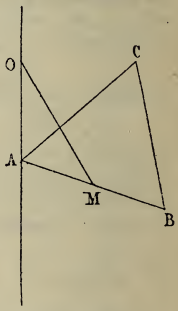


Fig. 224.

On pourrait aussi examiner les cas où le fil passerait sur le triangle, ainsi que le représente la figure 224.

Nous laissons au lecteur le soin de s'exercer à cette dernière question et de la discuter.

Problème 156

Une barre AB, *dont le poids est* P *et la longueur* l, *peut tourner librement autour d'un point* A *tandis que l'autre extrémité* A *est soutenue par un cordon qui s'enroule sur une petite poulie de renvoi et porte un poids* Q. *Déterminer la position d'équilibre.*

Le poids P de la tige peut se décomposer en deux parties appliquées aux extrémités A et B.

La force $\frac{P}{2}$ en A est détruite par la fixité du point. La force $\frac{P}{2}$ en B se décompose en deux autres forces T et S, dirigées suivant le cordon et suivant

la barre. S est détruite par le point A ; il reste T qui doit, pour qu'il y ait équilibre, être égale au poids Q.

Exprimons cette condition.

On a, dans le parallélogramme de décomposition,

$$\frac{\frac{P}{2}}{T} = \frac{\sin BTF}{\sin BFT}$$

Or $\qquad T = Q$

donc $\dfrac{P}{2Q} = \dfrac{\sin BTF}{\sin BFT} = \dfrac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ (1)

La position d'équilibre peut être déterminée par l'angle x de la barre avec l'horizon.

Exprimons β et γ en fonction de x et des données.

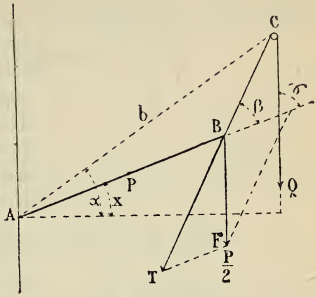


Fig. 225.

On a $\qquad \gamma = 90 - x$

et le triangle ABC fournit, en posant $AC = b$,

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{l}{\sin ACB} = \frac{l}{\sin [\beta - (\alpha - x)]} \qquad (2)$$

La relation (1) devient $\qquad \dfrac{P}{2Q} = \dfrac{\sin \beta}{\cos x}$

Si on en tire $\sin \beta$, puis $\cos \beta$, et que l'on porte ces valeurs dans l'équation (2), celle-ci devient

$$\frac{b}{\frac{P}{2Q}\cos x} = \frac{l}{\frac{P}{2Q}\cos x \cos(\alpha - x) - \sin(\alpha - x)\sqrt{1 - \left(\frac{P}{2Q}\cos x\right)^2}}$$

ou $$\frac{b}{P\cos x} = \frac{l}{P\cos x \cos(\alpha - x) - \sin(\alpha - x)\sqrt{4Q^2 - P^2\cos^2 x}}$$

ou $$b = \frac{l}{\cos(\alpha - x) - \sin(\alpha - x)\sqrt{\frac{4Q^2}{P^2\cos^2 x} - 1}}$$

d'où $$b\cos(\alpha - x) - l = b\sin(\alpha - x)\sqrt{\frac{P^2\cos^2 x}{4Q^2} - 1}$$

équation de laquelle on tirera l'angle x.

Remarque. Cherchons ce que donne cette formule, lorsque AB est horizontale et égale à la projection horizontale de AC. Alors $x = 0$ et $l = b\cos\alpha$, et la formule devient

$$b\cos\alpha - b\cos\alpha = b\sin\alpha\sqrt{\frac{4Q^2}{P^2} - 1}$$

d'où $\qquad 4Q^2 - P^2 = 0 \quad$ ou $\quad P = 2Q$, ce qui est évident.

Problème 157

Une barre homogène AB, *de longueur* 2l *et de poids* P, *est mobile dans l'angle droit* AOB *dont le côté* OA *est vertical. Une corde* OC *relie le point* C *de* AB *au sommet* O ; *la barre glisse sans frottement jusqu'à ce que le cordon soit tendu. Quelle est la tension du cordon?*

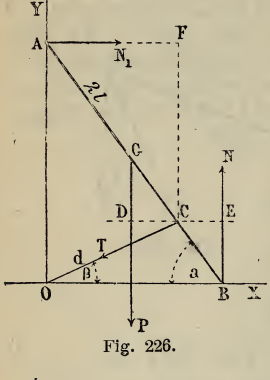


Fig. 226.

Soit d la longueur de la corde.

Les forces qui sollicitent la barre sont le poids P, la tension T du cordon, et les deux réactions normales N, N_1.

Désignons par β l'inclinaison du cordon et par a* celle de la barre.

Nous appliquerons la méthode générale exposée déjà si souvent.

Écrivons les trois équations d'équilibre.

$$\text{proj. X}: \quad N_1 - T\cos\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\text{pr. Y}: \quad P - N + T\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\text{mom. C}: \quad P \times CD + N \times CE - N_1 \times CF = 0 \qquad (3)$$

Cette dernière relation peut s'écrire

$$P \times CG\cos a + N \times BC\cos a - N_1 \times AC\sin a = 0$$

et, en y remplaçant N et N_1 par leurs valeurs tirées de (1) et (2), on a

$$P \times CG\cos a + (P + T\sin\beta)\,BC\cos a - T\cos\beta \times AC\sin a = 0$$

---

* L'angle a est déterminé par la *forme* de la figure.

On peut l'exprimer en fonction des données l et d, et du rapport $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$.

On a $\sin\beta = \frac{BC}{d}\,.\sin a, \quad \cos\beta = \frac{AC}{d}\,.\cos a$

d'où $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 = \frac{1}{d^2}\left(\overline{BC}^2\sin^2 a + \overline{AC}^2\cos^2 a\right)$

d'où $d^2 = (\overline{BC}^2 - \overline{BC}^2\cos^2 A + \overline{AC}^2\cos^2 a)$

ou $d^2 = (\overline{AC}^2 - \overline{AC}^2\sin^2 a + \overline{BC}^2\sin^2 a)$

d'où $\frac{\overline{AC}^2 - d^2}{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = \sin^2 a$, et enfin, $\sin^2 a = \frac{4l^2 m^2 - d^2(m^2 + n^2)}{4l^2(m^2 - n^2)}$

d'où l'on tire

$$T=\frac{P\,(CG\cos a+BC\cos a)}{-BC\sin\beta\cos a+AC\sin a\cos\beta}=\frac{P\times l\times\cos a}{-BC\sin\beta\cos a+AC\sin a\cos\beta}$$

Or on a $\sin\beta=\dfrac{BC\sin a}{d}$ et $\cos\beta=\dfrac{AC\cos a}{d}$

Donc

$$T=\frac{Pl\cos a}{-\dfrac{\overline{BC}^2}{d}\sin a\cos a+\dfrac{\overline{AC}^2}{d}\sin a\cos a}=\frac{Pld}{\sin a(-\overline{BC}^2+AC^2)}$$

Représentons par $\dfrac{m}{n}$ le rapport $\dfrac{AC}{BC}$, nous aurons

$$T=\frac{Pld}{\sin a\left[\left(2l\times\dfrac{m}{m+n}\right)^2-\left(2l\times\dfrac{n}{m+n}\right)^2\right]}=\frac{Pd}{4l\sin a}\times\frac{(m+n)^2}{m^2-n^2}$$

Rép. $T=\dfrac{Pd}{4l\sin a}\times\dfrac{(m+n)^2}{m^2-n^2}$

La valeur de sin a a été trouvée dans la note précédente.

Problème 158

Une tige AB *est mobile sans frottement dans une rainure verticale* AD *de laquelle son extrémité* A *ne peut sortir. Elle est retenue par un cordon* CD. *Trouver la position d'équilibre.*

$$AB=2a,\quad CD=l,\quad AC=b$$

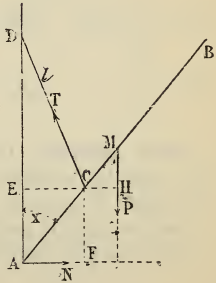


Fig. 227.

La barre est en équilibre sous l'action de son poids P, de la réaction de la rainure N et de la tension du fil T.

Désignons par x l'angle de la barre avec la rainure dans la position d'équilibre.

En appliquant les trois équations d'équilibre, on aura

$$\text{proj. X}:\quad N-T\cos DCE=0 \qquad (1)$$

$$\text{» Y}:\quad P-T\sin DCE=0 \qquad (2)$$

$$\text{mom. (C)}:\quad P\times CH-N\times CF=0 \qquad (3)$$

En remarquant que DCE est le complément de D, on a

$$\frac{\sin D \text{ ou } \cos DCE}{b} = \frac{\sin x}{l}$$

d'où $$\cos DCE = \frac{b}{l} \sin x$$

et $$\operatorname{tg} DCE = \frac{\sqrt{l^2 - b^2 \sin^2 x}}{b \sin x}$$

La relation (3) peut s'écrire

$$P \times (a - b) \sin x = N \times b \cos x \qquad (4)$$

Les relations (2) et (1) fournissent

$$N - \frac{P}{\sin DCE} \times \cos DCE = 0 \quad \text{ou} \quad N = \frac{P}{\operatorname{tg} DCE}$$

Alors (4) devient

$$P \times (a - b) \sin x = \frac{P \times b \cos x}{\operatorname{tg} DCE}$$

d'où $$(a - b) \sin x = \frac{b \cos x}{\operatorname{tg} DCE}$$

En remplaçant tg DCE par sa valeur,

$$(a - b) \sin x = \frac{b^2 \sin x \cos x}{\sqrt{l^2 - b^2 \sin x}}$$

d'où l'on tire $$\sin x = \frac{\sqrt{b^4 - (a - b)^2 l^2}}{b\sqrt{a(2b - a)}}$$

ou $$\cos x = \frac{(a - b)\sqrt{l^2 - b^2}}{b\sqrt{a(2b - a)}}$$

Autre méthode. Pour que la barre AB soit en équilibre, il faut que la réaction N, composée par le point P, donne une résultante T′ égale et directement opposée à T.

Donc le cordon prolongé passe par K.

Les triangles semblables DCA, MCK fournissent

$$CK = \frac{l(a - b)}{b}$$

On a les relations faciles à établir

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{l}{b} \qquad (1)$$

et dans le triangle ACK

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{KC}{AC} = \frac{l(a-b)}{b^2} \qquad (2)$$

Des relations (1) et (2) on tire

$$\sin^2 y = \sin^2 x \cdot \frac{b^2}{l^2} = \frac{b^2}{l^2} - \cos^2 x \cdot \frac{b^2}{l^2}$$

et $\cos^2 y = \cos^2 x \times \dfrac{b^4}{l^2(a-b)^2}$

d'où, par addition,

$$1 = \cos^2 x \left(\frac{b^4}{l^2(a-b)^2} - \frac{b^2}{l^2}\right) + \frac{b^2}{l^2}$$

on en tire

Rép. $\cos x = \dfrac{(a-b)\sqrt{l^2-b^2}}{b\sqrt{a(2b-a)}}$.

Résultat déjà trouvé.

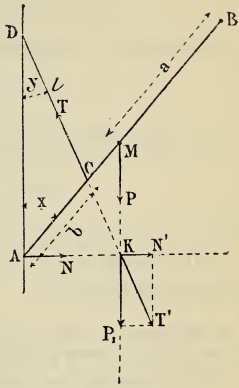


Fig. 228.

Problème 159

Une poutre AB, *dont le poids est* P, *peut tourner autour de son extrémité* A; *elle est retenue par l'autre extrémité* B, *à l'aide d'une corde qui passe sur une poulie* C *dont le diamètre est négligeable. On demande de calculer la force nécessaire pour s'opposer à la chute de la poutre.*

$AB = l, \quad AC = h, \quad BAC = \alpha$

Effectuer le calcul pour $P = 500^k$, $l = 12^m$, $h = 13^m$, $\alpha = 50°8'17''$. (Besançon, bacc.)

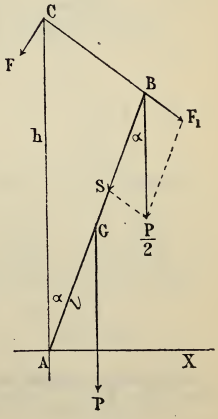


Fig. 229.

1re Méthode. Le poids P se décompose en deux forces $\frac{P}{2}$ appliquées en A et en B. Au point A, $\frac{P}{2}$ est détruit par la fixité de l'obstacle. En B, $\frac{P}{2}$ se décompose en deux forces, l'une S suivant la barre qui est détruite,

l'autre F_1 suivant la corde et qui doit égaler F pour qu'il y ait équilibre.

On aura donc

$$F_1 = F = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin SBF_1}.$$

Le triangle ABC donne la relation

$$\frac{\sin SBF_1}{\sin C} = \frac{h}{l}$$

Or l'angle SBF_1, extérieur au triangle ABC, est

$$SBF_1 = \alpha + C$$

d'où

$$\frac{\sin(\alpha + C)}{\sin C} = \frac{h}{l}$$

Cette équation sera encore obtenue par la 2e méthode, nous la résoudrons plus loin.

2e Méthode. La barre AB est en équilibre sous l'action de son poids P, de la tension de la corde F, de la réaction R du point A.

En appliquant les trois équations d'équilibre, il vient

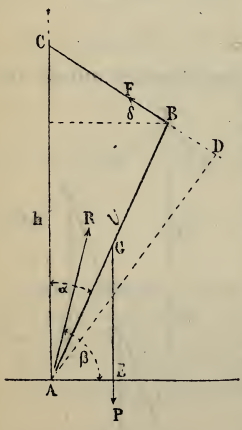


Fig. 230.

Projections X : $R \cos \beta - F \cos \delta = 0$ (1)

» Y : $P - R \sin \beta - F \sin \delta = 0$ (2)

Moments (A) : $P \times AE - F \times AD = 0$ (3)

La relation (3) peut s'écrire

$$P \times \frac{l}{2} \sin \alpha = F \times h \sin C \qquad (4)$$

Les relations (1) et (2), utiles pour connaître R et β si on le désirait, ne servent pas à la détermination de la position d'équilibre ; l'équation (4) suffit avec celle que fournit le triangle ABC.

La relation (4) donne

$$F = \frac{P}{2} \times \frac{l \sin \alpha}{h \sin C}$$

L'angle C est déterminé par le triangle ABC, qui fournit

$$\frac{h}{l} = \frac{\sin(\alpha + C)}{\sin C}$$

d'où l'on tire * $\operatorname{tg} C = \dfrac{l \sin \alpha}{h - l \cos \alpha}$

Cette formule permet de calculer l'angle C en fonction des données, et, par suite, de trouver la valeur de la tension F cherchée.

---

* Cette transformation est expliquée au renvoi de la page 160.

Si l'on veut exprimer cette tension en fonction des données du problème, on peut continuer le calcul comme il suit :

On a (Trig., n° 27)

$$\sin^2 C = \frac{\operatorname{tg}^2 C}{1 + \operatorname{tg}^2 C} = \frac{l^2 \sin^2 \alpha}{(h - l \cos \alpha)^2 + l^2 \sin^2 \alpha}$$

par suite,

$$\sin C = \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{h^2 - 2hl \cos \alpha + l^2}}$$

Mettant cette valeur dans la formule de F, on obtient

$$F = \frac{P}{2h} \sqrt{h^2 - 2hl \cos \alpha + l^2}$$

ou

$$F = \frac{P}{2} \sqrt{1 + \frac{l^2}{h^2} - \frac{2l}{h} \cos \alpha}$$

Remarque. Cette question n'est qu'un cas particulier du problème supplémentaire, page 152.

On peut donc lui appliquer la formule

$$N = \frac{P}{2} \times \frac{\cos \alpha}{\cos (\theta - \alpha)}$$

dans laquelle N est la tension F cherchée,

» P le poids de la poutre,

» α l'angle BAX,

» θ est égal à l'angle C.

Application. En introduisant les valeurs numériques dans l'une des formules ci-dessus, on trouve en chiffres ronds :

$$F = 235^{kg}$$

Problème 160

Un poids P *est élevé à l'aide d'une corde* PAC *qui passe en* A *sur une poulie fixe.*

Un homme, placé en B, *agit sur le corps* P *à l'aide d'une corde* BP′ *et l'écarte du mur* AO *d'une quantité constante* DP′.

Calculer l'effort exercé sur le cordon en C *et en* B. *On fera*

$$AO = H, \quad P'B = d, \quad P'D = S, \quad OD = h$$

Application :

$$P = 500^{kg}, \quad H = 18^{m}, \quad h = 6^{m}75, \quad S = 0^{m}75, \quad d = 12^{m}$$

(Besançon, bacc., novembre 1872.)

Le corps P′ est en équilibre sous l'action de son propre poids

P, de la tension T de la corde AP′ et de la tension F de la corde P′B.

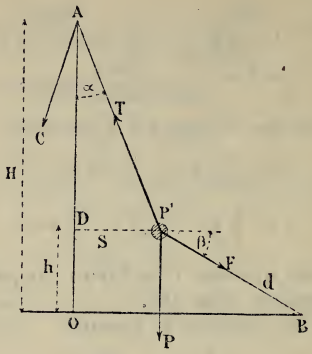


Fig. 231.

On a donc

$$\frac{T}{\sin PP'F} = \frac{F}{\sin TP'P} = \frac{P}{\sin TP'F}$$

par suite, $T = P\dfrac{\sin PP'F}{\sin TP'F}$ et $F = P\dfrac{\sin TP'P}{\sin TP'F}$

or $TP'P = 180^\circ - \alpha$, $TP'F = 90^\circ + \alpha + \beta$

Donc
$$T = P\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} \qquad (1)$$

et
$$F = P\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} \qquad (2)$$

Les angles α et β sont déterminés par les données de la question, puisque l'on a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{S}{H-h} \qquad (3)$$

et
$$\sin\beta = \frac{h}{d} \qquad (4)$$

On peut donc calculer F et T.

Si l'on veut exprimer ces forces en fonction des données, on peut continuer ainsi le calcul :

$$F = P\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)} = P\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{P}{\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta - \sin\beta}$$

Les formules (3) et (4) donnent

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{H - h}{S}$$

et

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d}$$

d'où l'on tire

$$F = \frac{P}{\frac{H - h}{S} \times \frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d} - \frac{h}{d}}$$

et

$$F = \frac{PSd}{(H - h)\sqrt{d^2 - h^2} - Sh} \qquad (5)$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$T = F \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

Or on a (Trig., n° 27)

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

En remplaçant tg α par sa valeur $\frac{S}{H - h}$, on obtient

$$\sin \alpha = \frac{S}{\sqrt{(H - h)^2 + S^2}}$$

ce qui donne

$$T = F \times \frac{\frac{\sqrt{d^2 - h^2}}{d}}{\frac{S}{\sqrt{(H - h)^2 + S^2}}} = \frac{\sqrt{(d^2 - h^2)\left[(H - h)^2 + S^2\right]}}{Sd}$$

et enfin

$$T = \frac{P\sqrt{(d^2 - h^2)^2\left[(H - h)^2 + S^2\right]}}{(H - h)\sqrt{d^2 - h^2} - Sh} \qquad (6)$$

Remarque. Cette question est un cas particulier de la deuxième partie du problème 137, où l'on a déjà trouvé les formules (1) et (2).

Application. En mettant les valeurs numériques données dans les formules (5) et (6), ou mieux encore dans les formules (1), (2), (3), (4), on trouve en kilogrammes :

$$F = 42^{kg}$$

$$T = 525^{kg}$$

On voit qu'il serait difficile à un homme seul d'obtenir l'écartement indiqué dans l'énoncé, la corde P'B est trop courte.

Problème 161

Sur deux droites rectangulaires, on donne deux points A *et* B. *Au point* B, *on fixe un fil soutenu en* C *par une tige* AC, *mobile autour du point* A. *Au point* C *est suspendu un poids* P.

Calculer les efforts supportés par le fil BC *et la tige* AC. *On fera*

$$d = 32^\circ 25' 12'', \quad R = 127^\circ 17' 8'',$$
$$P = 100^k$$

(Besançon, bacc., juillet 1875.)

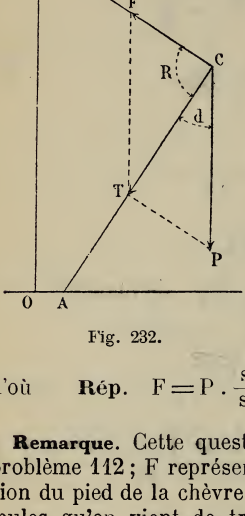


Fig. 232.

Soit F la tension du fil ; il y aura équilibre lorsque la résultante de cette force et du poids sera dirigée suivant la tige, d'où les relations

$$\frac{F}{P} = \frac{\sin d}{\sin R}$$

et

$$\frac{T}{P} = \frac{\sin (R + d)}{\sin R}$$

d'où **Rép.** $F = P \cdot \frac{\sin d}{\sin R}, \quad T = P \cdot \frac{\sin (R + d)}{\sin R}.$

Remarque. Cette question est analogue à celle de la chèvre, problème 112 ; F représente la tension du hauban et T la pression du pied de la chèvre ; il est facile de s'assurer que les formules qu'on vient de trouver sont les mêmes que celles du nº 112.

Application. $F = 67^{kg}38 \quad T = 43^{kg}59$

Problème 162

Une lame homogène de point P *forme un triangle isocèle ; on la place dans une sphère creuse de rayon* r, *les trois sommets s'appuient sur la surface de la sphère ; on demande de déterminer la position d'équilibre.*

Par raison de symétrie, les deux sommets B et C des angles égaux du triangle isocèle seront à la même hauteur ; soit OMA le méridien perpendiculaire au plan du rectangle.

Le triangle est en équilibre sous l'action de son poids et des trois réactions normales N, N', N' de la sphère sur les points A, B, C. (Voir simultanément fig. 233 et fig. 234.)

Pour que ces forces se fassent équilibre, il suffit que le poids P, appliqué au centre de gravité G du triangle ABC, passe par le centre O de la sphère.

Remarquons que la pyramide triangulaire OABC a une forme parfaitement déterminée, une forme obligée, car au triangle ABC correspond un cercle circonscrit connu, toujours à égale distance du centre O de la sphère.

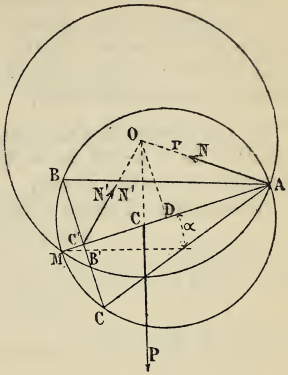


Fig. 233.

Le problème revient donc à déterminer l'angle α, qui mesure l'inclination de la lame, pour que GP passe par le centre O ou pour que GO soit une ligne verticale.

Soient r' le rayon du cercle circonscrit, h la hauteur AK du triangle isocèle.

I. On peut donner une solution graphique du problème.

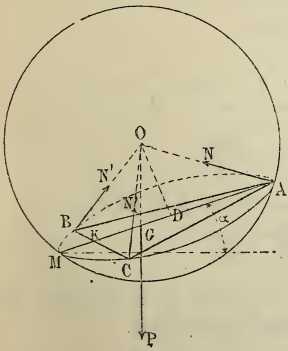


Fig. 234.

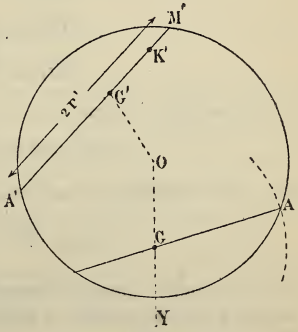


Fig. 235.

D'un point quelconque d'un grand cercle de la sphère, portons une corde A'M' égale au double du rayon r' du cercle circonscrit au triangle donné.

Prenons $A'K' = h$ et $A'G' = {}^2/_3\, h$, joignons OG'.

Sur la verticale OY menée par le centre O, prenons $OG = OG'$, c'est la distance du centre O au centre de gravité du triangle ; du point G, comme centre, avec $A'G'$ pour rayon, coupons le grand cercle au point A, la corde AG fournira la position de la hauteur du triangle donné.

II. La valeur de OG peut être déterminée par le calcul, en fonction de r, rayon de la sphère, de a, base du triangle, de b, longueur des côtés égaux.

Déterminons d'abord h et r' en fonction des données.

On a (fig. 236)

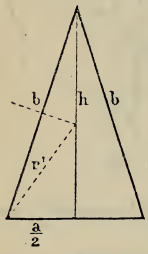


Fig. 236.

$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \qquad (1)$$

et
$$r'^2 = \frac{a^2}{4} + (h - r')^2$$

d'où
$$r' = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

En remplaçant h par sa valeur,

$$r' = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \qquad (2)$$

Le triangle OGD (fig. 233 ou 234) fournit

$$\overline{OG}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DG}^2$$

Or
$$\overline{OD}^2 = r^2 - r'^2$$

$$DG = \frac{2h}{3} - r'$$

En remplaçant, il vient

$$\overline{OG}^2 = r^2 + \frac{4h^2}{9} - \frac{4hr'}{3}$$

Et, en y mettant les valeurs (1) et (2) de h et de r',

$$OG = \frac{\sqrt{9r^2 - 2b^2 - a^2}}{3} \qquad (3)$$

III. On peut encore déterminer la position d'équilibre du triangle par l'inclinaison α qu'il a sur l'horizontale.

Le triangle GOD donne

$$\text{angle } GOD = \alpha$$

d'où
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DG}{OD}$$

d'où, en remplaçant DG et OD,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h - 3r'}{3\sqrt{r^2 - r'^2}} \tag{4}$$

Et enfin, en mettant les valeurs (1) et (2) de h et de r',

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 - a^2}{3\sqrt{^2 (4b^2 - a^2) - b^4}} \tag{5}$$

Conditions de possibilité. Pour que les valeurs de tg α soient réelles, la relation (4) donne

$$r^2 - r'^2 \geqq 0$$

d'où

$$r \geqq r'$$

La seule condition de possibilité est donc que le rayon du cercle circonscrit au triangle ne soit pas plus grand que le rayon de la sphère. Ce qui est évident à priori.

Discussion. I. Si l'on suppose $b = a$, le triangle est équilatéral ; la relation fournit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{3\sqrt{r^2 (3b^2) - b^4}} = 0$$

d'où

$$\alpha = 0$$

La lame se maintient horizontalement, ce qu'il était facile de prévoir.

II. Si l'on suppose $a = 0$, la formule (5) donne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{3\sqrt{4r^2 - b^2}}$$

Ce résultat demande à être interprété.

Une barre *homogène* placée dans une sphère ne peut s'y maintenir que dans une position horizontale ; or le calcul semble nous conduire, alors que $a = 0$ et que le triangle devient une ligne, à un résultat différent. On fait disparaître cette anomalie si l'on remarque que la *ligne ne peut être considérée comme étant homogène,* puisque son centre de gravité, comme ceux des triangles dont elle est la limite, est aux $^2/_3$ de sa longueur.

Il serait facile de traiter directement cette dernière question, c'est-à-dire de trouver la position d'équilibre d'une barre non homogène dont la densité en chaque point varie proportionnellement à la distance de ce point à une des extrémités ; on trouverait

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{3\sqrt{4r^2 - b^2}}$$

III. Il est intéressant d'examiner le cas où le cercle circonscrit au triangle est égal à un grand cercle de la sphère.

Alors $r = r'$ et la formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3} h - r'}{\sqrt{r^2 - r'^2}}$$

devient

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3} h - r}{0} = \infty$$

d'où

$$\alpha = 90^\circ$$

Le triangle se place dans un plan vertical, sa base devant toujours être horizontale.

On peut remarquer que le centre de la sphère est sur le plan du triangle.

Remarque. Si avec $r = r'$ on suppose de plus $b = a$, la formule (5)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 - a^2}{3\sqrt{r^2 (4b^2 - a^2) - b^4}}$$

devient

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{3b\sqrt{3r^2 - b^2}}$$

Or, dans le triangle équilatéral, $b = r\sqrt{3}$

Donc

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0}{0}$$

ce qui indique une indétermination.

Le triangle est, en effet, en équilibre dans une position quelconque, puisque son centre de gravité coïncide précisément avec le centre de la sphère.

CINÉMATIQUE

Mouvement uniforme.

Problème 162 bis.

Construire les lignes représentatives des mouvements donnés par les équations suivantes, dans lesquelles a *et* v *sont des quantités positives :*

$$\text{I.} \quad e = a + vt$$
$$\text{II.} \quad e = a - vt$$
$$\text{III.} \quad e = -a + vt$$
$$\text{IV.} \quad e = -a - vt$$
$$\text{V.} \quad e = vt$$

Dans chacun de ces cinq mouvements, l'espace parcouru vt est proportionnel au temps t employé à le parcourir ; ces mouvements sont uniformes (M., n° 172).

Les lignes représentatives sont des lignes droites (M., n° 174) ; pour les tracer, il suffira d'en déterminer deux points.

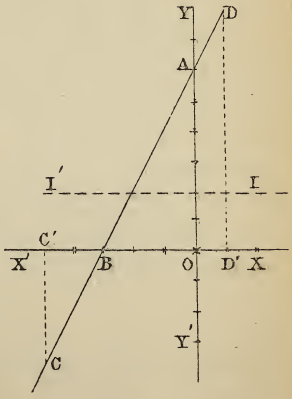


Fig. 237.

I. Donnons aux coefficients des valeurs numériques, par exemple

$$a = 6 \quad \text{et} \quad v = 2$$

l'équation I devient

$$e = 6 + 2t$$

Pour tracer la droite donnée par cette équation, cherchons les points où cette droite coupe les axes OX, OY.

La rencontre avec l'axe des Y est donnée par $t = 0$, alors

$e = 6$; en prenant au-dessus du point O une longueur de 6 unités, on obtient le point de rencontre A (fig. 237).

Quand la droite rencontre l'axe des X, on a $e = 0$; en mettant cette valeur dans l'équation, on obtient

$$0 = 6 + 2t$$

d'où

$$t = -\frac{6}{2} = -3$$

Portant 3 unités dans le sens OX', on trouve B pour le point cherché.

BA est la ligne représentative demandée.

Nous allons nous servir de cette ligne représentative pour étudier le mouvement du mobile sur sa trajectoire.

Mouvement sur la trajectoire. La trajectoire peut être une ligne quelconque, supposons que ce soit la droite NN' et que le point O soit l'origine des espaces. (Voir simultanément les figures 237 et 238.)

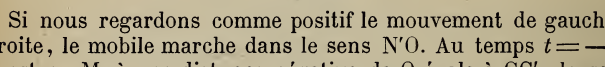


Fig. 238.

Si nous regardons comme positif le mouvement de gauche à droite, le mobile marche dans le sens N'O. Au temps $t = -5$, il est en M_1 à une distance négative de O égale à CC' ; lorsque $t = -3$, le mobile est en M_2 à l'origine, il s'avance ensuite sur la partie positive de sa trajectoire : à l'origine du temps, il est en M_3 à une distance de O égale à OA ; une seconde plus tard, lorsque $t = 1$, le mobile se trouve en M_4 de manière que $OM_4 = DD'$; à mesure que t grandit, il s'éloigne indéfiniment du point O dans le sens ON.

Représentation de la vitesse. Dans ce mouvement, la vitesse ayant pour valeur constante et positive $+2$, est représentée par une droite parallèle à l'axe des X placée au-dessus de cet axe dont elle est distante de 2 unités. Sur la figure, elle est représentée par II', tracée en traits interrompus.

II. $e = 6 - 2t$

Pour $t = 0$, on a $e = 6$

La rencontre avec l'axe des y se fait en A ; $OA = +6$ (fig. 239)

Pour $e = 0$, on trouve $t = 3$

La rencontre avec l'axe des X a lieu en B ; $OB = +3$.

Le mobile marche dans le sens négatif NO (fig. 238), il se rapproche du point O, qu'il atteint trois secondes avant l'origine des temps ; puis il continue son mouvement sur la partie négative de la projection ON' et s'éloigne indéfiniment du point O.

La vitesse est négative; elle est représentée par II′.

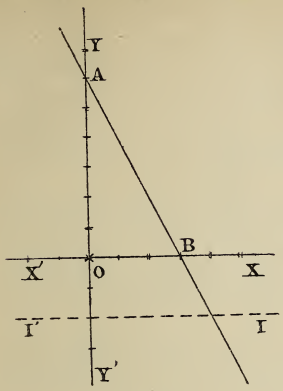


Fig. 239.

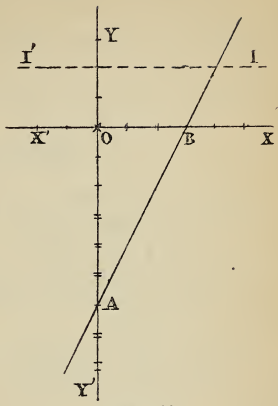


Fig. 240.

III. (fig. 240) $e = -6 + 2t$

Pour $t = 0$, on a $e = -6$; donc $OA = -6$

$e = 0$, $t = +3$; $OB = +3$

La vitesse est positive.

IV. (fig. 241) $e = -6 - 2t$

Pour $t = 0$, on a $e = -6$; donc $OA = -6$

$e = 0$, $t = -3$; $OB = -3$

La vitesse est négative.

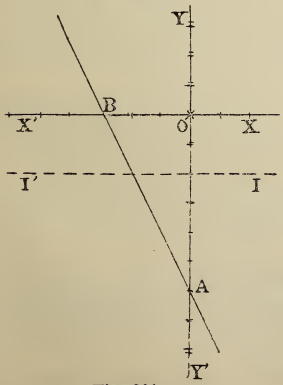


Fig. 241.

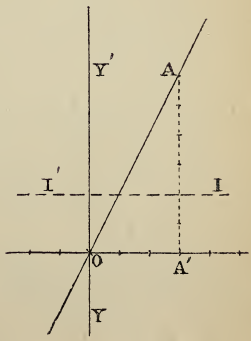


Fig. 242.

V. (fig. 242) $e = vt$

Dans ce cas, si l'on fait $t = 0$, on trouve $e = 0$; à l'instant pris pour origine

des temps, le mobile est donc à l'origine des espaces. La ligne représentative coupe les deux axes au même point O; pour la tracer, il en faut déterminer un second point.

Faisons $v = 2$, l'équation devient $e = 2t$; pour $t = 3$, par exemple, on a $e = 6$, ce qui détermine le point A; par suite, OA est la ligne représentative cherchée.

La vitesse est positive et représentée par II'.

Problème 162 ter.

Graphique des trains. *Au moyen des données fournies par les indicateurs des chemins de fer, tracer la ligne figurative du mouvement d'un train. — A quel moment et en quel lieu se croisent deux trains? — Dans ce qui précède, on a supposé le mouvement uniforme; quelles sont les conséquences des variations de vitesse?*

La figure 243 représente la marche des trains de voyageurs qui, de 11 heures à 4 heures, parcourent la voie entre Dijon et Chalon.

Les lignes verticales donnent le temps de 10 minutes en 10 minutes. Sur les lignes horizontales un point indique le milieu de la distance de deux verticales ; on lit donc sans peine un intervalle de 5 minutes ; les temps plus petits s'apprécient à l'œil.

La première colonne verticale à gauche contient en kilom. les distances des stations, à partir de Dijon ; les lignes horizontales sont écartées proportionnellement à ces distances.

L'épure étant préparée par le tracé des lignes verticales et horizontales, on trace sans difficulté les droites qui figurent la marche des trains. Avec ce *graphique*, on se rend compte des particularités que présentent les divers parcours.

Considérons le train omnibus AA' qui part de Dijon à midi, il arrive à Gevrey à midi 15^m et en part à midi 17^m pour arriver à Vougeot à $12^h 26^m$ et en partir à $12^h 28^m$, ainsi de suite ; on voit qu'il s'arrête 10^m à Chagny et arrive à Chalon à $2^h 3^m$.

Le train BB' ne s'arrête pas entre Dijon et Chalon, c'est un train rapide ; la ligne qui en représente la marche est moins inclinée que AA'.

Le train direct CC' *brûle* les stations entre Dijon et Nuits ; il ne s'arrête qu'aux stations principales ; la marche étant moins rapide que celle du train précédent, la ligne CC' est plus inclinée que BB', mais elle l'est moins que AA'.

Le train DD' va en sens inverse des précédents, il part de Chalon à $12^h 10^m$, *brûle* Fontaine et ne s'arrête qu'aux stations principales ; c'est encore un train direct. Il croise le train AA'

entre Meursault et Beaune un peu après 1h; la voie étant double, il n'y a pas à se préoccuper du point de croisement. Si la voie était simple, les trains ne pourraient se croiser que dans une gare.

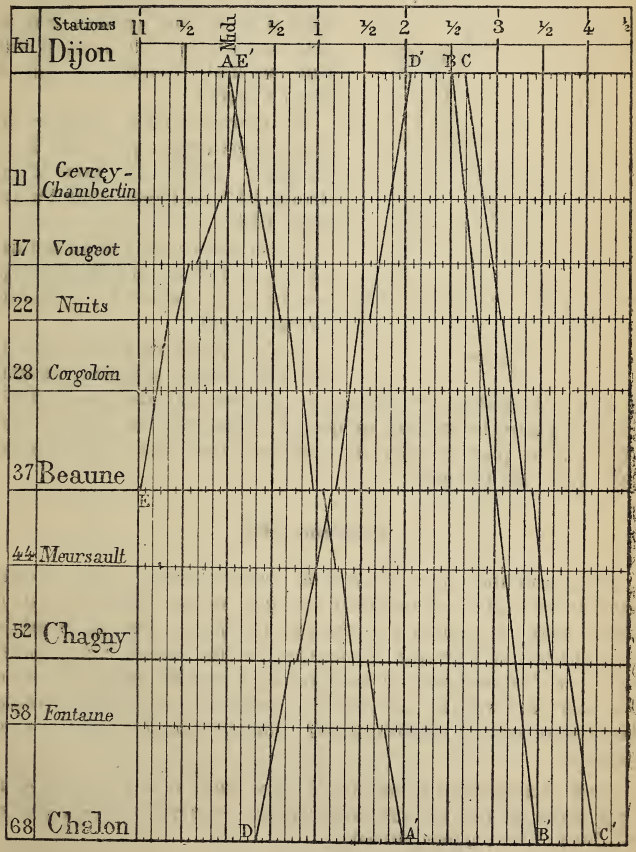


Fig. 243.

On voit encore un train EE′ dont le parcours entre Chalon et Beaune n'a pu être figuré dans l'épure ; c'est un train omnibus dont la vitesse subit de grandes variations entre Vougeot et Dijon.

Quelles sont les conséquences des variations de vitesse? La marche des trains étant représentée par une ligne droite, on suppose que le mouvement est uniforme entre deux stations tandis que ce mouvement s'accélère en quittant la station, pour arriver à la vitesse *de régime* au bout d'un certain temps, puis se retarder en approchant de la station suivante jusqu'à ce que le train s'arrête.

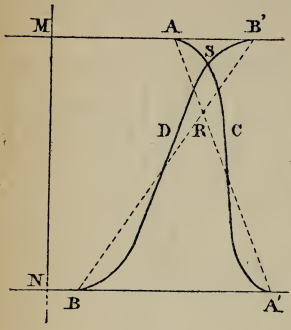


Fig. 244.

La marche vraie du train est donc représentée par une ligne sinueuse ACA', au lieu d'une droite AA'; de même pour l'autre train BDB'.

La rencontre, au lieu de se faire en R, se fait en S; elle se rapproche de la station M, et l'heure change aussi.

Il n'y a pas à se préoccuper de ces différences, puisque, lorsque la voie est double, les trains se croisent sur des voies différentes ; quand la voie est unique, le croisement se fait aux stations ; il ne peut y avoir de collision, tant que la marche est celle qui a été prévue.

Problème 163

Deux mobiles A *et* B *animés respectivement des vitesses constantes* v *et* v' *se meuvent sur une même droite, dans le même sens, et depuis une époque indéfinie, sans se troubler l'un l'autre. A l'origine du temps, la distance qui les sépare est* d, *et l'on demande d'indiquer le temps de leur rencontre. Discuter la formule qui résout le problème et justifier chaque discussion par le raisonnement. Insister sur les solutions négatives.*

Quel changement faudrait-il faire subir à la formule générale dans le cas où les deux mobiles courraient l'un contre l'autre? (Lille, baccalauréat.)

Cette question n'est autre que le *problème des courriers* résolu et discuté dans le *Cours d'algèbre*, au nº 170.

Nous allons le traiter au moyen des lignes représentatives des mouvements.

L'origine des espaces sera la position du mobile A, à l'origine du temps; le sens positif sera celui de son mouvement.

I. *Les mobiles se meuvent dans le même sens.*

1° *On suppose* $v > v'$

L'espace parcouru par le mobile A est vt; par le mobile B, il est $v't$; la distance de ce mobile à l'origine est $d + vt$.

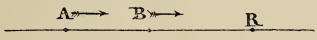


Fig. 245.

Soit AB la trajectoire des mobiles; pour obtenir le point de rencontre R, traçons la droite OD (fig. 246) qui représente la loi du mouvement du mobile A; CD est celle de B, leur point de rencontre D correspond à la rencontre des mobiles, qui sont alors tous deux à la distance DE du point origine.

En prenant sur la trajectoire AR = DE, on obtient R, point de rencontre des deux mobiles.

Cette rencontre arrive au bout d'un temps donné par OE.

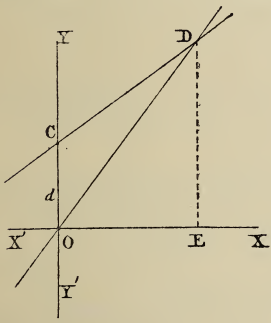


Fig. 246.

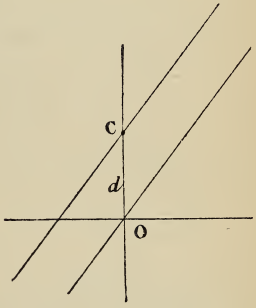


Fig. 247.

2° *On suppose* $v = v'$

Les lignes figuratives sont alors parallèles; les deux mobiles étant toujours à la même distance d l'un de l'autre ne peuvent se rencontrer, à moins que d ne soit nul; alors ils sont constamment ensemble.

3° *On suppose* $v < v'$

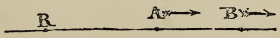


Fig. 248.

La ligne représentative de B étant alors plus inclinée que celle de A, leur rencontre a lieu au-dessous de l'axe du temps; l'ordonnée du point D est

négative, la rencontre des mobiles a lieu en R sur la partie négative de la trajectoire de manière que AR = DE

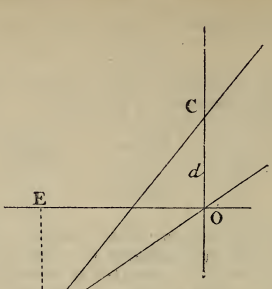


Fig. 249.

Elle arrive avant l'origine du temps, à une époque donnée par OE.

II. *Les mobiles vont en sens contraire.*

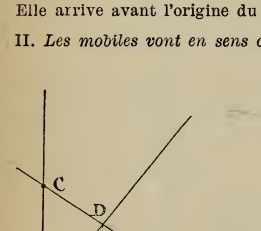


Fig. 251.

Fig. 250.

Le point B se mouvant dans le sens négatif, la ligne représentative de son mouvement sera dirigée suivant CD, par exemple ; l'ordonnée du point D est positive et plus petite que d, la rencontre a lieu en R, entre A et B ; elle arrive au bout du temps OE.

Il serait facile de multiplier les cas particuliers ; on pourrait, par exemple, supposer que la distance d est négative : le point C serait alors au-dessous du point O, et l'on aurait à faire des constructions analogues aux précédentes.

Problème 164

Un mobile M *décrit une droite* AB *avec un mouvement uniforme de vitesse* v. *Un second mobile* M′ *part d'un point* C, *situé hors de la droite, avec une vitesse* v′ : *quelle direction doit-il prendre pour rencontrer le mobile* M ?

Soit A la position du mobile M, lorsque le mobile M′ part du point C.

Désignons par α l'angle CAR et par x l'angle que la direction cherchée doit faire avec la droite CA.

Les mobiles partant au même instant, les droites AR et CR sont parcourues pendant le même temps, ce qui donne l'équation

$$\frac{AR}{v} = \frac{CR}{v'}$$

d'où $\frac{v}{v'} = \frac{AR}{CR} = \frac{\sin x}{\sin \alpha}$

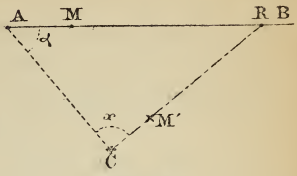


Fig. 252.

par suite, $$\sin x = \frac{v}{v'} \sin \alpha \qquad (1)$$

relation qui permet de trouver l'angle x et, par suite, la direction à donner au mobile M'.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait $\sin x \leqq 1$

ou $\frac{v}{v'} \sin \alpha \leqq 1$

ce qui donne $v' \geqq v \sin \alpha$

Le minimum de la vitesse v' est donc

$$v' = v \sin \alpha \qquad (2)$$

Pour mieux étudier la question, nous allons la diviser en trois cas, suivant que l'on a

$$\alpha < 90^\circ, \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{et} \quad \alpha > 90^\circ$$

1er Cas. $\alpha < 90^\circ$

Examinons les résultats donnés par la formule (1) suivant les valeurs que peut prendre v', à partir de son minimum (2).

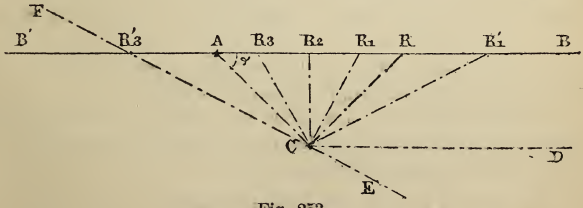


Fig. 253.

1° v' *a sa valeur minimum* v' = v sin α.

Alors $\sin x = 1$ et $x = 90^\circ$.

Ce qui donne pour le mobile M′ une direction CR perpendiculaire à AC. La rencontre a lieu en R, et il n'y a qu'une solution.

2° v′ *grandit tout en restant plus petit que* v.

On a $$v \sin \alpha < v' < v$$

L'équation (1) donne alors en outre de $\sin x < 1$

$$\sin x > \sin \alpha$$

On a donc pour l'angle x deux valeurs supplémentaires plus grandes que α et, par suite, pour le mobile M′ deux directions CR_1 et CR'_1 symétriques par rapport à CR ; la rencontre peut, par suite, avoir lieu en R_1 ou en R'_1.

Il y a deux solutions.

La direction CR_1 présente l'avantage que, les chemins étant plus courts, les deux mobiles se rencontrent plus tôt.

A mesure que v' grandit, l'angle x diminue et le point R_1 se rapproche de A, tandis que le point R'_1 s'en éloigne de plus en plus.

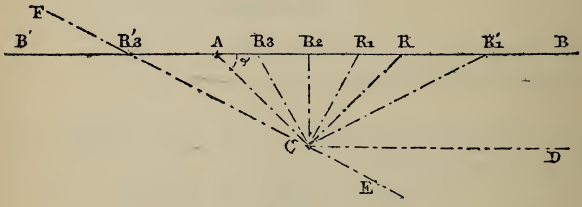


Fig. 254.

3° v′ *devient égal à* v.

On a alors $$\sin x = \sin \alpha$$

L'angle x peut être égal à l'angle α ou en être le supplément.

Pour $x = \alpha$, on trouve la direction CR_2; les mobiles se rencontrent en R_2, et le triangle AR_2C est isocèle.

La deuxième solution $x = 180° - \alpha$ donne la direction CD parallèle à AB, les deux mobiles ne se rencontrent jamais.

Il n'y a donc qu'une solution.

4° v′ *grandit et devient plus grand que* v.

On tire de la relation (1)

$$\sin x < \sin \alpha$$

On a encore pour l'angle x deux valeurs supplémentaires dont la plus petite, qui est moindre que l'angle α, donne la direction CR_3 et, par suite, un point de rencontre R_3 compris entre R_2 et A.

La seconde valeur de x correspond à la direction CE, dont le prolongement rencontre AB en R'_3 à gauche du point A.

Cette seconde solution ne convient pas à la question telle qu'elle a été posée, puisque l'on suppose que le mobile M part du point A ; mais elle conviendrait à la question généralisée comme il suit :

Un mobile M *décrit uniformément une droite* AB, *avec une vitesse* v. *Un second mobile* M', *dont le mouvement est rectiligne uniforme, de vitesse* v', *passe en un point* C *situé hors de* AB, *en même temps que le mobile* M *passe au point* A. *Quelle direction doit suivre le second mobile pour rencontrer le premier ?*

Alors le mobile M, parcourant B'A, et le mobile M', parcourant FC, ces deux mobiles peuvent se rencontrer en R'_3, puis arriver en même temps l'un en A, l'autre en C. Si le mobile M' suit la direction CR_3, il y aura rencontre en R_3.

Il y a deux solutions.

A mesure que v' grandit, v restant constant, les points R_3 et R'_3 se rapprochent indéfiniment du point A.

2e Cas. $\alpha = 90^o$

Alors $\sin \alpha = 1$ et la formule (1) devient

$$\sin x = \frac{v}{v'}$$

ce qui exige que l'on ait

$$v' \geqq v$$

C'est-à-dire que la vitesse du mobile M' doit être plus grande que celle du mobile M ; c'est qu'en effet le chemin CR sera toujours plus grand que le chemin AR.

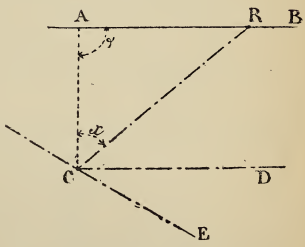


Fig. 255.

Si l'on faisait $v' = v$, on trouverait $\sin x = 1$ ou $x = 90^o$.

Le mobile suivrait la direction CD parallèle à AB, et il n'y aurait pas de rencontre.

Si l'on a $v' > v$, on en tire $\sin x < 1$.

Ce qui donne deux directions CR et CE, symétriques par rapport à CD.

La direction CR répond à la question ; la direction CE ne répond pas à la question telle qu'elle est posée, elle peut être interprétée comme précédemment.

3e Cas. $\alpha > 90^\circ$

Ce cas est l'inverse du 1er.

Dans le sens rigoureux de l'énoncé, la rencontre devant avoir lieu du côté AB, elle ne sera possible que pour $x < 180^\circ - \alpha$, c'est-à-dire pour $v' > v$, et chaque valeur de v' remplissant cette condition ne donne qu'une solution.

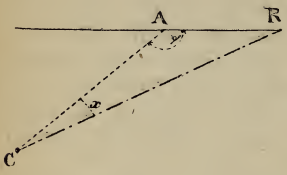


Fig. 256.

Si l'on admet les rencontrès du côté AB′, il y a deux solutions pour les valeurs de v' plus grandes que son minimum, excepté pour $v' = v$, où il n'y a aussi qu'une solution, ainsi qu'on l'a vu au 1er cas.

Remarques. I. Si l'on avait pris pour données des coordonnées $a = \text{AD}$, $b = \text{CD}$ du point C, et pour inconnue l'angle x que la direction cherchée doit faire avec la droite AB ; les temps mis pour parcourir AR et CR étant égaux, on aurait eu pour équation

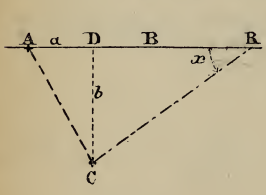


Fig. 257.

$$\frac{\text{A}'\text{R}}{v} = \frac{\text{CR}}{v'}$$

Cette équation devient

$$\frac{a + \dfrac{b}{\operatorname{tg} x}}{v} = \frac{\dfrac{b}{\sin x}}{v'}$$

Résolvons par rapport à x, nous aurons successivement

$$\frac{v}{v'} \cdot \frac{b}{\sin x} = a + \frac{b \cos x}{\sin x}$$

ou

$$\frac{v}{v'}\, b = a \sin x + b \cos x$$

Ici deux méthodes différentes se présentent pour tirer la valeur de x.
1° Méthode directe ; 2° Méthode qui rend calculable par logarithmes.

1° Méthode directe.

On a

$$b\left(\frac{v}{v'} - \cos x\right) = a \sin x$$

Élevant au carré

$$b^2\left(\frac{v}{v'} - \cos x\right)^2 = a^2 (1 - \cos^2 x)$$

d'où

$$\cos^2 x\,(a^2 + b^2) - 2 \,.\, b^2 \,.\, \frac{v}{v'} \cos x + b^2 \,.\, \frac{v^2}{v'^2} - a^2 = 0$$

d'où $$\cos x = \frac{b^2 \cdot \frac{v}{v'} \pm \sqrt{b^4 \frac{v^2}{v'^2} - (a^2 + b^2)\left(b^2 \cdot \frac{v^2}{v'^2} - a^2\right)}}{(a^2 + b^2)}$$

$$\cos x = \frac{b^2 \cdot \frac{v}{v'} \pm \sqrt{a^2\left(a^2 + b^2 - b^2 \frac{v^2}{v'^2}\right)}}{(a^2 + b^2)}$$

ce qui peut encore s'écrire

Rép. $$\cos x = \frac{b^2 \frac{v}{v'} \pm \sqrt{a^2\left[a^2 + b^2\left(1 - \frac{v^2}{v'^2}\right)\right]}}{a^2 + b^2}$$

2e Méthode qui rend calculable par logarithmes.

$$\frac{v}{v'} b = a \sin x + b \cos x$$

On a $$\frac{v}{v'} b = a\left(\sin x + \frac{b}{a} \cos x\right)$$

Posons $$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

on aura $$\frac{v}{v'} \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)$$

d'où $$\frac{v}{v'} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin (x + \alpha)}{\cos \alpha}$$

et enfin $$\sin (x + \alpha) = \frac{v}{v'} \sin \alpha$$

Nous sommes ainsi ramenés à la solution que nous avons développée et discutée plus haut, car l'angle auxiliaire α n'est autre que l'angle DAC, et $\sin (x + \alpha)$ est égale à $\sin$ ACR, que nous avions pris pour inconnue.

II. On verra plus loin (Probl. 218) une autre manière de résoudre cette question.

Problème 164 bis.

Deux mobiles se déplacent sur deux axes rectangulaires et se dirigent avec des vitesses v *et* v' *vers le point d'intersection de ces axes dont ils sont, à un moment donné, à des distances* a *et* b. *A quel instant ces deux mobiles sont-ils le plus proches l'un de l'autre ?*

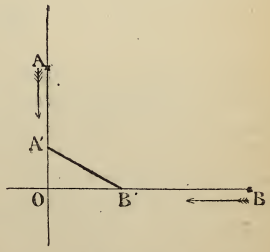


Fig. 258.

Soit AO $= a$ et BO $= b$; cherchons à exprimer la distance A'B' $= d$ des mobiles au bout du temps t.

On a $d^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2$

or $$OA' = a - vt \quad \text{et} \quad OB' = b - v't$$

d'où $$d^2 = (a - vt)^2 + (b - v't)^2$$

En développant et ordonnant, on obtient

$$t^2 (v^2 + v'^2) - 2t (av + bv') + a^2 + b^2 - d^2 = 0$$

d'où $$t = \frac{av + bv' \pm \sqrt{(av + bv')^2 - (a^2 + b^2 - d^2)(v^2 + v'^2)}}{v^2 + v'^2}$$

qui devient $$t = \frac{av + bv' \pm \sqrt{d^2 (v^2 + v'^2) - (av' - bv)^2}}{v^2 + v'^2}$$

Pour que les valeurs de t soient réelles, on doit avoir

$$d^2 (v^2 + v'^2) \geqq (av' - bv)^2$$

Le minimum de d^2 est donc

$$d^2 = \frac{(av' - bv)^2}{v^2 + v'^2}$$

Il arrive au bout d'un temps

$$t = \frac{av + bv'}{v^2 + v'^2}$$

Remarque. Pour que les mobiles se rencontrent au point O, le minimum de d doit être zéro, ce qui exige que

$$av' = bv \quad \text{ou} \quad \frac{v}{v'} = \frac{a}{b}$$

Relation évidente à priori, car alors les espaces a et b, étant proportionnels aux vitesses, seront parcourus pendant le même temps.

On trouve alors pour t

$$t = \frac{a}{v} = \frac{b}{v'}$$

Problème 165

Deux droites se coupent à angle droit en un point O. *Deux courriers partis simultanément de ce point prennent ces deux routes avec des vitesses respectives de* 6 *kilomètres et* 8 *kilomètres à l'heure. Au bout de* 10 *heures ils reviennent sur leurs pas en échangeant leurs vitesses. On demande à quelle époque leur distance mutuelle sera égale à* 35 *kilomètres, à quelle époque elle sera égale à* 25, *à quelle époque elle sera minimum.*

Généraliser le problème en supposant quelconques les vitesses primitives et la distance mutuelle. (Caen, conc. acad. Ens. spéc., 1876.)

1er Cas. Les deux courriers partent ensemble du point O.

Désignons par v la vitesse du 1er courrier, par v' celle du 2e, par t le temps après lequel les courriers, arrivés en A et en B, reviennent sur leurs pas et échangent leurs vitesses, et par x le temps qu'il leur faudra encore pour que leur distance A_1B_1 soit égale à d.

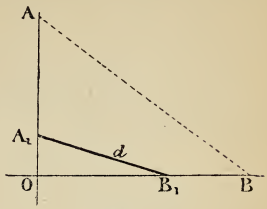


Fig. 259.

On a $\quad d^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 \quad (1)$

Or $OA_1 = OA - AA_1 = vt - v'x$

$OB_1 = OB - BB_1 = v't - vx$

ce qui donne

$$d^2 = (vt - v'x)^2 + (v't - vx)^2$$

Cette équation devient

$$x^2(v^2 + v'^2) - 4vv'tx + (v^2 + v'^2)t^2 - d^2 = 0 \qquad (2)$$

d'où $\quad x = \dfrac{2vv't \pm \sqrt{4v^2v'^2t^2 - (v^2 + v'^2)^2 t^2 + (v^2 + v'^2) d^2}}{v^2 + v'^2}$

et, en simplifiant,

$$x = \frac{2vv't \pm \sqrt{(v^2 + v'^2) d^2 - (v^2 - v'^2)^2 t^2}}{v^2 + v'^2} \qquad (3$$

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$d^2 \geq \frac{(v^2 - v'^2)^2 t^2}{v^2 + v'^2}$$

Le minimum de d^2 est donc

$$d^2 = \frac{(v^2 - v'^2)^2 t^2}{v^2 + v'^2}$$

Il arrivera lorsque $\quad x = \dfrac{2vv't}{v^2 + v'^2}$

A toute valeur de d plus grande que son minimum,

$$\frac{v^2 - v'^2}{\sqrt{v^2 + v'^2}}\, t$$

correspondent deux valeurs de x pour lesquelles il y a plusieurs cas à considérer :

1° $\quad d^2 < (v^2 + v'^2)t^2$ ou $d < AB$

L'équation (2) montre que les deux valeurs de x sont positives, elles conviennent toutes deux.

2° $$d^2 = (v^2 + v'^2)\, t^2 \quad \text{ou} \quad d = \text{AB}$$

Alors on a $x' = 0$ qui satisfait évidemment, puisque les moments sont alors en A et en B.

La seconde racine $$x'' = \frac{4vv't}{v^2 + v'^2}$$

donne une seconde position des mobiles pour laquelle leur distance est égale à AB.

3° $$d^2 > (v^2 + v'^2)\, t^2 \quad \text{ou} \quad d > \text{AB}$$

La première racine de x est positive, elle convient ; mais la seconde est négative, elle correspondrait à des positions des mobiles, situées au delà du point A et du point B ; elle doit donc être rejetée.

Dans ce cas, le problème n'admet qu'une solution.

Remarques. I. Pour que le minimum soit nul, c'est-à-dire pour que les mobiles se rencontrent au point O, il faut que l'on ait

$$\frac{(v^2 - v'^2)^2\, t^2}{v^2 + v'^2} = 0$$

c'est-à-dire $$t = 0 \quad \text{ou} \quad v = v'$$

résultats évidents à priori.

II. La valeur (3) de x ne change pas si v et v' changent de signe ou si l'on remplace v par v' et réciproquement.

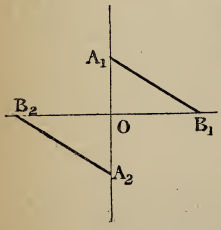


Fig. 260.

III. Si l'on fait $v = v'$, la formule (3) devient

$$x = t \pm \frac{d\sqrt{2}}{2v}$$

Ces valeurs correspondent aux deux triangles A_1OB_1 et A_2OB_2 symétriques par rapport au point O.

Le minimum de d est zéro, et il arrive pour $x = t$.

Application. En prenant les nombres donnés par l'énoncé, on a $$v = 6^{\text{km}}, \quad v' = 8^{\text{km}}, \quad t = 10^{\text{h}}$$

1° Faisons d'abord $d = 35^{\text{km}}$, on trouve (3)

$$x = \frac{960 \pm \sqrt{100 \times 35^2 - 28^2 \times 100}}{100}$$

d'où $$x = \frac{960 \pm 210}{100}$$

Rép. $x' = 11^h,7.$
$x'' = 7^h, 5.$

Pour vérifier, en faisant $x = 11^h,7$, on trouve

$$OA_1 = -33,6 \quad \text{et} \quad OB_1 = 9,8$$

qui donnent $$d^2 = (33,6)^2 + (9,8)^2 = 1225$$

d'où $$d = 35$$

Si l'on fait $$x = 7^h,5$$

on trouve $$OA_1 = 0 \quad \text{et} \quad OR_1 = 35$$

Le premier mobile est revenu au point O, le second en est à 35^{km}, la distance des deux mobiles est bien encore celle qui a été donnée.

2° Faisons $$d = 25^{km}$$

La formule (3) donne pour x des valeurs imaginaires : il est donc impossible que les mobiles soient à cette distance l'un de l'autre.

Si l'on cherche, en effet, le minimum de d, on trouve qu'il est de 28^{km}, et qu'il arrive pour $x = 9^h,6$.

3° Faisons $$d = AB \quad \text{ou} \quad d = 100^{km}$$

on trouve $$x = \frac{960 \pm 960}{100}$$

par suite, $$x' = 0$$

Les mobiles sont aux points de départ A et B, et

$$x'' = 19^h,2$$

Vérifions cette seconde solution, elle donne

$$OA_1 = -93,6 \quad \text{et} \quad OB_1 = -35,2$$

par suite, $$d^7 = (93,6)^2 + (35,2)^2 = 10,000$$

et $$d = 100^{km}$$

Donc, après $19^h,2$, les deux mobiles sont distants de 100^{km} comme au départ.

2e Cas. Les deux mobiles partent de points différents.

Pour plus de généralité, nous allons examiner le cas où les mobiles partent de points différents A et B avec les vitesses v et v' ; soit t le temps qu'ils mettent

pour aller aux points A_1 et B_1 où ils changent de direction et échangent leurs vitesses, A_2 et B_2 les points où ils sont arrivés lorsque leur distance $A_2B_2 = d$.

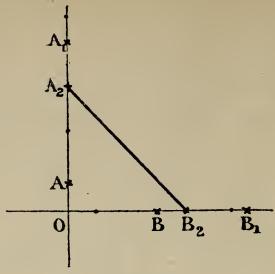


Fig. 261.

Faisons $\quad OA = a \quad$ et $\quad OB = b$

On a $\quad d^2 = \overline{OA_2}^2 + \overline{OB_2}^2$

Or $\quad OA_2 = OA_1 - A_1A_2 = a + vt - v'x$

$$OB_2 = OB_1 - B_1B_2 = b + v't - vx$$

d'où $\quad d^2 = (a + vt - v'x)^2 + (b + v't - vx)^2$

qui devient

$$x^2(v^2 + v'^2) - 2x\left[(a + vt)v' + (b + v't)v\right] + (a + vt)^2 + (b + v't)^2 - d^2 = 0$$

Elle donne

$$x = \frac{(a + vt)v' + (b + v't)v \pm \sqrt{d^2(v^2 + v'^2) - \left[(a + vt)v - (b + v't)v'\right]^2}}{v^2 + v'^2}$$

ou encore

$$x = \frac{av' + bv + 2vv't \pm \sqrt{(v^2 + v'^2)\,d^2 - \left[(a + vt)\,v - (b + v't)\,v'\right]^2}}{v^2 + v'^2}$$

Si dans cette formule on fait $a = 0$ et $b = 0$, on retrouve la formule (3) du 1er cas.

On pourrait faire une discussion analogue à celle du 1er cas, il y aurait de plus à faire des hypothèses sur a et b.

Problème 166

Deux mobiles se meuvent uniformément à partir du point O *sur l'axe* OX, *avec des vitesses* v *et* v'. *Un point* P *est donné sur* OY *perpendiculaire à* OX. *Au bout de combien de temps verra-t-on du point* P *la distance des deux mobiles, sous l'angle maximum?*

Trouver la condition pour que le maximum soit de 45°. (Ex. oral de Saint-Cyr, 1878.)

I. Soit A le mobile qui se meut avec une vitesse v, B celui qui a la vitesse v', x le temps au bout duquel la distance AB est vue du point P sous l'angle α.

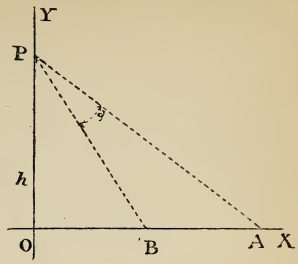


Fig. 262.

On a $OA = vx$, $OB = v'x$,

$$\alpha = OPA - OPB$$

Or $$\operatorname{tg} OPA = \frac{vx}{h}$$

et $$\operatorname{tg} OPB = \frac{v'x}{h}$$

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{vx}{h} - \frac{v'x}{h}}{1 + \frac{vv'x^2}{h^2}} = \frac{hx(v - v')}{h^2 + vv'x^2}$$

Faisons $$\operatorname{tg} \alpha = m$$

On a $$\frac{hx(v - v')}{h^2 + vv'x^2} = m$$

d'où $$mvv'x^2 - h(v - v')x + mh^2 = 0$$

par suite, $$x = \frac{h(v - v') \pm \sqrt{h^2(v - v')^2 - 4m^2vv'h^2}}{2mvv'}$$

et $$x = \frac{h\left[(v - v') \pm \sqrt{(v - v')^2 - 4vv'm^2}\right]}{2mvv'}$$

Pour que x soit réel, il faut que la quantité, sous radical, soit positive, ce qui fournit pour valeur maximum de m

$$m \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v - v'}{2\sqrt{vv'}}$$

La valeur maximante est $$x = \frac{(v - v')}{2mvv'} = \frac{h}{\sqrt{vv'}}$$

II. Pour que le maximum soit de 45°, on doit avoir

$$\operatorname{tg} \alpha \quad \text{ou} \quad m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

par suite, $$\frac{v - v'}{2\sqrt{vv'}} = 1$$

d'où $$(v - v')^2 = 4vv'$$

ou $$v^2 - 6vv' + v'^2 = 0$$

et $$\frac{v}{v'} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Alors $$x = \frac{h}{\sqrt{vv'}} = \frac{h\,(3 \mp 2\sqrt{2})}{v'}$$

Remarque. Le maximum de l'angle α est indépendant de h, mais la valeur correspondante de x est proportionnelle à h. Par conséquent, lorsque le point P se déplace sur OP, les côtés PB et PA se déplacent en restant parallèles à eux-mêmes.

Problème 167

Deux mobiles partent en même temps d'un même point d'une circonférence; leur mouvement est uniforme et a lieu dans le même sens. Ils s'arrêtent quand ils sont revenus ensemble au point de départ. Le premier met 42 heures pour faire un tour, le deuxième en met 105. Cela posé, on demande:

1° *Le nombre d'heures qui s'écouleront entre chaque rencontre;*

2° *Le nombre de rencontres;*

3° *Le nombre d'heures pendant lesquelles ils auront marché;*

4° *Le nombre de tours qu'ils auront faits l'un et l'autre.* (Lille, baccalauréat.)

1° *Nombre d'heures écoulées entre chaque rencontre.*

Soit a le nombre d'heures que met le mobile qui va le plus vite pour parcourir la circonférence, b le nombre d'heures que met l'autre mobile.

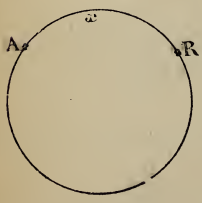


Fig. 263.

Les deux mobiles partent ensemble du point A et se rencontrent au point R; désignons par x le rapport de l'arc AR à la circonférence.

Jusqu'au moment de la rencontre, le premier mobile a parcouru une circonférence plus l'arc x, il a donc marché pendant $(a + ax)$ heures; le second, qui n'a parcouru que l'arc x, a marché pendant bx heures. Ils ont marché pendant le même temps; on a donc l'équation

$$a + ax = bx$$

d'où $$x = \frac{a}{b - a}$$

La discussion de cette formule est très simple. (Voir Alg., 170.) En prenant les valeurs numériques de l'énoncé, on obtient

$$x = \frac{42}{105 - 42} = \frac{2}{3}.$$

Le premier mobile a parcouru $\frac{5}{3}$ de circonférence, il a mis

$$42^h \times \frac{5}{3} = 70^h$$

Le second a parcouru $\frac{2}{3}$ de circonférence pendant

$$105^h \times \frac{2}{3} = 70^h$$

1re **Rép.** 70 heures.

2o *Nombre de rencontres.*

Pour que les mobiles soient revenus ensemble au point de départ, il faut qu'ils aient parcouru chacun un nombre entier de circonférences ; le nombre d'heures pendant lequel ils ont marché est le plus petit commun multiple de 42 et de 105, c'est-à-dire 210 ; alors le premier aura parcouru cinq circonférences et le deuxième deux, il y aura eu 3 rencontres.

2e **Rép.** 3 rencontres.

3o *Nombre d'heures pendant lesquelles ils ont marché.*

$$70^h \times 3 = 210^h$$

3e **Rép.** 210 heures.

4o Nous avons déjà trouvé les résultats.

4e **Rép.** Le 1er a fait 5 tours ;
Le 2e 2 tours.

Problème 168

Trois aiguilles se meuvent uniformément sur le cadran d'une horloge. La première marque les heures et fait le tour du cadran en 12 heures. La seconde marque les minutes et fait le tour du cadran en 1 heure. La troisième marque les secondes et fait le même tour à chaque minute. Les aiguilles coïncident à midi, et l'on demande de déterminer le moment précis où l'une quelconque des aiguilles devra faire le même angle avec les directions des deux autres. (Clermont, conc. acad., 1876.)

1re Solution. 1o *L'aiguille des heures est bissectrice.*

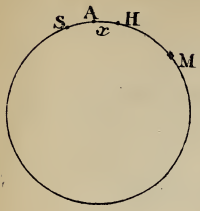


Fig. 264.

On sait que le cadran est partagé en 60 divisions.

Soit x le nombre de ces divisions parcourues par l'aiguille des heures jusqu'à l'instant où elle est bissectrice ; l'aiguille des minutes aura parcouru AM qui égale $12x$, celle des secondes va 720 fois plus vite que l'aiguille des heures, elle aura parcouru $720x$, ce qui égale le cercle entier ou 60 divisions moins l'arc AS.

Il faut que l'on ait $HM = HS$

Or $$HM = AM - AH = 12x - x = 11x$$
$$HS = AH + AS = x + (60 - 720x)$$

d'où l'équation $$11x = 60 - 719x$$

et $$x = \frac{60}{730} = \frac{6}{73}$$

L'aiguille des heures a parcouru $\frac{6}{73}$ de division ; celle des secondes aura parcouru

$$\frac{6}{73} \times 720 = 59 \text{ divisions } \frac{13}{73}$$

Rép. Il est midi 59 secondes $\frac{13}{73}$.

2o *L'aiguille des minutes est bissectrice.*

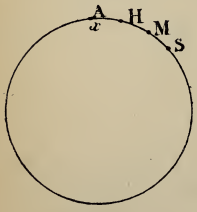


Fig. 265.

L'aiguille des secondes aura parcouru tout le cadran plus l'arc AS.

On doit avoir $MH = MS$

Or $$MH = AM - AH = 11x$$
$$MS = AS - AM = 720x - (60 - 12x)$$

d'où $$11x = 708x - 60$$
$$x = \frac{60}{697}$$

L'aiguille des heures a parcouru $\frac{60}{697}$ de division ; celle des secondes, $$\frac{60}{697} \times 720 = 61 \text{ divisions } \frac{683}{697}$$

Rép. Il est midi 1 minute 1 seconde $\frac{683}{697}$.

3° *L'aiguille des secondes est bissectrice.*

L'aiguille des secondes a parcouru le cadran plus AS.

On doit avoir $HS = SM$

Or $HS = AS - AH = AS - x$

$SM = AM - AS = 12x - AS$

d'où $AS - x = 12x - AS$

et $13x = 2AS$

Or $AS = 720x - 60$

Donc $13x = 1440x - 120$

d'où $x = \frac{120}{1427}$

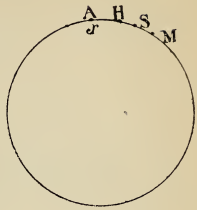


Fig. 266

L'aiguille des secondes a parcouru

$$\frac{120}{1427} \times 720 = 60 \text{ divisions } \frac{780}{1427}$$

Rép. Il est midi 1 minute $\frac{780}{1427}$ de seconde.

2e **Solution.** La solution suivante est préférable.

Le mouvement relatif ne change pas si l'on imprime à tout le système un mouvement de sens contraire et égal à celui de l'une des aiguilles, par exemple, de celle qui doit être bissectrice; cette aiguille sera immobile, et nous aurons à écrire que les deux autres sont à égale distance de celle que nous aurons immobilisée.

1° *L'aiguille des heures est bissectrice.*

Soit x le nombre des minutes qui se seront écoulées.

En une minute l'aiguille des minutes s'éloigne de celle des heures de

$$1 \text{ div.} - \frac{1}{12} \text{ de div.} = \frac{11}{12} \text{ de division.}$$

En x minutes, de $\frac{11x}{12}$

L'aiguille des secondes s'éloigne de celle des heures en une minute de

$$60 \text{ div.} - \frac{1}{12} \text{ de div.} = \frac{719}{12} \text{ de division}$$

et en x minutes, de $\frac{719x}{12}$

On doit avoir $60 - \frac{719x}{12} = \frac{11x}{12}$

d'où $x = \frac{72}{73}$ de minute.

ou **Rép.** $59^s \frac{13}{73}$.

2° *L'aiguille des minutes est bissectrice.*

Immobilisons l'aiguille des minutes ; l'aiguille des heures s'en sépare de $\frac{11}{12}$ div. en 1^m, celle des secondes de 59 divisions.

On a donc $$\frac{11x}{12} = 59x - 60$$

d'où $$x = \frac{720}{697} = 1^m\,1^s\,\frac{683}{697}$$

3° *L'aiguille des secondes est bissectrice.*

Immobilisons l'aiguille des secondes.

Dans une minute, l'aiguille des minutes s'éloigne de 59 div. de celle des secondes.

Celle des heures s'en éloigne de

$$60 \text{ div.} - \frac{1}{12} = \frac{719}{12} \text{ de division.}$$

Et comme l'aiguille des secondes aurait dû faire un tour de cadran, on a l'équation $$59x - 60 = 60 - \frac{719x}{12}$$

d'où $$x = \frac{1440}{1427} = 1^m\,\frac{13}{1427} \text{ de minute}$$

ou $$x = 1^m\,\frac{780}{1427} \text{ de seconde.}$$

Problème 169

Quelle est la vitesse angulaire de la terre dans le mouvement diurne ?

Vitesse absolue d'un point de l'équateur.

» *de Lille* (*Lat. N.* 50° 38').

1° La vitesse angulaire est l'espace parcouru en une seconde par un point situé à 1 mètre de l'axe (M., n° 199).

Ce point décrit une circonférence de longueur 2π.

Il met, pour la décrire, un jour sidéral (Cosm., n° 102) ou 24 heures ou 86 400 secondes sidérales.

La vitesse angulaire cherchée est donc, en prenant pour unité la seconde sidérale,

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,400} = 0^m\,000072$$

1re Rép. $\omega = 0^m\,000072$.

2° *Vitesse absolue d'un point de l'équateur.*

Cette vitesse est donnée par la formule (M., n° 199)

$$v = \omega R$$

R désignant le rayon de l'équateur, on a donc

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{86\,400}$$

Si l'on suppose que l'équateur ait, comme le méridien, une longueur de 40 000 000 de mètres, on obtient

$$v = \frac{40\,000\,000}{86\,400} = 462^{m}93\,; \quad \text{soit} \quad 463^{m}$$

Ce qui fait, par heure, 1 666 kilomètres.

En prenant 83 kilomètres pour la vitesse, par heure, d'un train rapide, on voit que la vitesse d'un point de l'équateur est environ vingt fois plus grande.

2e Rép. $v = 463$ mètres.

3° *Vitesse absolue à Lille.*

Le rayon LN du parallèle de latitude λ est égal à

$$OM = R \cos \lambda$$

On a donc

$$v' = \frac{2\pi R \cos \lambda}{86\,400} = \frac{40\,000\,000 \cos 50^{\circ}38'}{86\,400}$$

En effectuant le calcul, on trouve à 1 mètre près.

3e Rép. $v' = 294$ mètres.

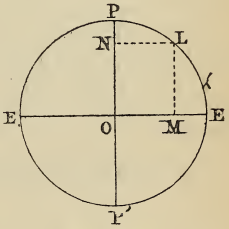


Fig. 267.

Mouvements variés.

Problème 169 bis.

Prouver que l'équation $e = a + bt + ct^2$ *représente un mouvement uniformément varié.*

Pour prouver que ce mouvement est uniformément varié, il suffit de faire voir que la vitesse varie proportionnellement au temps (M., n° 185).

Nous allons chercher l'expression de la vitesse au moyen de la méthode développée dans le cours (M., n° 180).

L'espace e_1, au bout du temps $(t + \theta)$, est

$$e_1 = a + b\,(t + \theta) + c\,(t + \theta)^2$$

Au bout du temps t, cet espace était

$$e = a + bt + ct^2$$

L'espace $e_1 - e$, parcouru pendant le temps θ, est donc

$$e_1 - e = b\theta + 2ct\theta + c\theta^2$$

La vitesse moyenne, pendant ce temps θ, est

$$\frac{e_1 - e}{\theta} = b + 2ct + c\theta$$

La vitesse v, au bout du temps t, étant la limite de la vitesse moyenne alors que le temps θ tend vers 0, on a

$$v = b + 2ct^*$$

La formule $v = b + 2ct$ montre que dans le mouvement donné la vitesse varie proportionnellement au temps ; ce mouvement est donc uniformément varié.

Si le coefficient c est positif, le mouvement est accéléré ; si c est négatif, le mouvement est retardé.

Dans les deux cas, pendant l'unité de temps, la variation de la vitesse ou l'*accélération du mouvement* (M., nº 186) est $2c$.

En désignant l'accélération par j, on a donc

$$j = 2c$$

Remarque. Si l'on fait $t = 0$ dans les formules

$$e = a + bt + ct^2 \quad \text{et} \quad v = b + 2ct$$

on obtient

$$e = a \quad \text{et} \quad v = b$$

Par conséquent, à l'origine des temps, le mobile était à une distance a de l'origine des espaces, et il possédait une vitesse initiale b.

---

* La limite du rapport de l'accroissement d'une fonction à l'accroissement de la variable, lorsque ce dernier accroissement tend vers zéro, a reçu le nom de *dérivée de la fonction.*

D'où il suit que la vitesse à un instant donné est la *dérivée de l'espace, considérée comme fonction du temps.*

On démontre en Algèbre la règle suivante :

La dérivée d'une fonction algébrique entière s'obtient en multipliant dans chaque terme le coefficient par l'exposant de la variable, en diminuant d'une unité cet exposant, et en faisant la somme algébrique des résultats.

En appliquant cette règle à la fonction $e = a + bt + ct^2$, on trouve pour sa dérivée : $b + 2ct$, valeur obtenue ci-dessus.

Si l'on avait les relations suivantes

$$e = bt + ct^2 \quad \text{et} \quad v = b + 2ct$$

on obtiendrait, pour $t = 0$,

$$e = 0 \quad \text{et} \quad v = b$$

C'est-à-dire qu'à l'origine du temps le mobile est à l'origine des espaces et qu'il a encore une vitesse initiale b.

Si l'on a $$e = ct^2 \quad \text{et} \quad v = 2ct$$

on obtient, pour $t = 0$,

$$e = 0 \quad \text{et} \quad v = 0$$

Ce qui exprime que, à l'origine du temps, le mobile est à l'origine des espaces sans vitesse initiale.

Problème 170

Tracer les lignes représentatives des espaces et des vitesses des mouvements donnés par les équations suivantes, dans lesquelles a *et* b *sont des quantités positives.*

I.	$e = at + bt^2$	IV.	$e = -at - bt^2$
II.	$e = -at + bt^2$	V.	$e = bt$
III.	$e = at - bt^2$	VI.	$e = -bt^2$

I. $$e = at + bt^2$$

1° *Ligne des espaces.*

Pour tracer cette courbe, on peut attribuer aux coefficients a et b des valeurs numériques, 1 et 2 par exemple, ce qui donne

$$e = t + 2t^2$$

puis, faisant varier t, on trouve les valeurs correspondantes de e. On porte sur l'axe des abscisses les valeurs de t et sur les ordonnées correspondantes les valeurs de e, ce qui fournit des points de la courbe, ainsi qu'on l'a expliqué dans le cours (M., n° 170).

Nous allons étudier directement le mouvement défini par la fonction $$at + bt^2$$

en nous servant des propriétés du trinôme (Alg., n°s 239 et suiv.). Mais ici, au lieu du trinôme complet

$$ax^2 + bx + c$$

nous avons à considérer la fonction incomplète

$$bt^2 + at$$

On a $$at + bt^2 = t\,(a + bt)$$

Cette fonction a pour racine

$$t' = 0 \quad \text{et} \quad t'' = -\frac{a}{b}$$

Elle est positive pour toutes les valeurs de t, non comprises entre $-\frac{a}{b}$ et 0.

Elle a un minimum $$e = -\frac{a^2}{4b}$$

il arrive pour $$t = -\frac{a}{2b}$$

Donc, la valeur de e est $+\infty$ pour $t = -\infty$; elle diminue lorsque t augmente, devient nulle pour $t = -\frac{a}{b}$, puis devient négative, atteint son minimum pour $t = -\frac{a}{2b}$; elle augmente lorsque t augmente, devient nulle de nouveau pour $t = 0$ et croît jusqu'à $+\infty$, lorsque t croît lui-même jusqu'à $+\infty$. C'est ce que montrent la courbe* et le tableau ci-dessous.

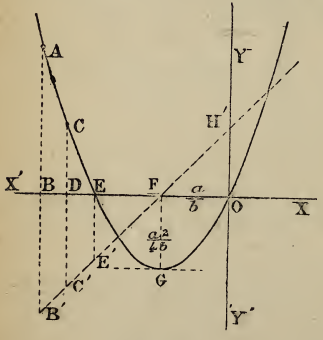


Fig. 267.

Valeurs de t	Valeurs de l
$t = -\infty$	$l = +\infty$
$-\frac{a}{b}$	0
$-\frac{a}{2b}$	$-\frac{a^2}{4b}$ minimum
0	0
$+\infty$	$+\infty$

---

* Il est facile de voir que l'équation $e = at + bt^2$ représente une parabole. La parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet a pour équation (G., n° 708) $$y^2 = 2px \qquad (1)$$

Cherchons ce que devient cette équation, lorsqu'on change les axes.

Prenons pour axe des Y la droite O_1Y_1 (fig. 268) parallèle à OY et distante de $$OO_1 = m.$$

Toutes les abscisses seront augmentées de m, les ordonnées ne changeant pas. On a $x_1 = x + m$; d'où $x = x_1 - m$, et l'équation (1) devient

$$y^2 = 2p\,(x_1 - m) \qquad (2)$$

Ligne des vitesses. Après avoir construit la courbe des espaces, on pourrait mener des tangentes aux divers points de cette courbe et en déduire (M., nº 181) la valeur des vitesses correspondantes ; mais il est plus simple et plus exact de tirer, de l'équation donnée, la loi de la vitesse.

Au moyen du calcul (M., nº 180 ou probl. 169 *bis*) ou plus simplement en appliquant la règle de la dérivée (probl. 169 *bis*, renvoi), on obtient la formule de la vitesse

$$v = a + 2bt$$

Cette fonction, étant du premier degré, sera représentée (M., nº 174) par une droite B'H' (fig. 267) qui, sur la figure, est tracée en traits interrompus.

Cette droite coupe l'axe des X au point F, qui correspond au temps

$$t = -\frac{a}{2b}$$

Elle coupe l'axe des Y au point H' pour lequel on a

$$OH' = a$$

Changeons maintenant l'axe des X, prenons O_2X_1 pour nouvel axe, les ordonnées augmenteront de

$$O_1O_2 = n$$

d'où $y_1 = y + n$ et $y = y_1 - n$

et l'équation (2) devient

$$(y_1 - n)^2 = 2p\,(x_1 - m)$$

Développant et ordonnant, on trouve

$$2px_1 = n^2 + 2mp - 2ny_1 + y_1^2$$

d'où

$$x_1 = \frac{n^2 + 2mp}{2p} - \frac{n}{p}\,y_1 + \frac{1}{2p}\,y_1^2$$

Cette équation est de la forme

$$x = A + By + Cy^2$$

Elle devient semblable à l'équation proposée $e = at + bt^2$, si l'on suppose

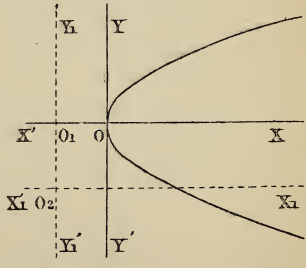


Fig. 268.

$A = 0$, c'est-à-dire $\dfrac{n^2 + 2mp}{2p} = 0$ ou $n^2 = -2mp$

ce qui revient à dire que la nouvelle origine O_2 est sur la parabole.

Remarque. L'équation $y = x \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{gx^2}{2a^2 \cos^2 \alpha}$, trouvée dans le cours (M., nº 209), pour la trajectoire d'un projectile, est de la forme $y = Ax + Bx^2$; cette courbe est donc une parabole.

La vitesse est négative tant que l'on a

$$t < -\frac{a}{2b}$$

elle est nulle pour $t = -\frac{a}{2b}$

et devient positive pour $t > -\frac{a}{2b}$

Mouvement du mobile sur sa trajectoire *. Supposons que la trajectoire soit une droite dont le point O est l'origine des espaces.

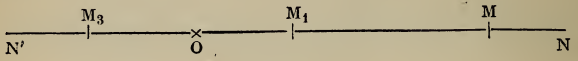


Fig. 269.

Considérons le temps négatif OB (fig. 267); le mobile est alors à une distance de l'origine égale à l'ordonnée AB ; cette ordonnée, étant positive, doit être portée sur ON (fig. 269); dans le sens positif, N'N par exemple, on trouve ainsi le point M.

La vitesse du mobile est donnée par BA', elle est négative ; le mobile, en effet, marche dans le sens négatif NN'.

A l'instant correspondant au temps OD, le mobile est en M_1, à une distance de l'origine $OM_1 = DC$. La vitesse est DC', elle est encore négative et diminue en valeur absolue.

Pour le temps OE, l'ordonnée est nulle, ce qui indique que le mobile est à l'origine, où il a la vitesse négative EE' (fig. 269).

Le temps continuant à croître, le mobile dépasse le point O pour se mouvoir sur la partie négative de sa trajectoire avec une vitesse qui diminue sans cesse.

Quand le mobile atteint M_3, qui est donné par la valeur minimum $E_1G = -\frac{a^2}{4b}$, sa vitesse devient nulle ; puis elle change de signe, et le mobile revient en O avec une vitesse positive croissante.

Il arrive au point O au moment pris pour l'origine du temps ; il a alors une vitesse OH'.

Le mobile continue sa marche dans le sens positif et repasse par les points M_1, M avec des vitesses égales, mais de sens

* Lorsqu'on étudie la loi d'un mouvement, il est très utile de chercher comment le mobile se déplace sur sa trajectoire et de se rendre compte des diverses phases de ce mouvement.

contraire à celles qui l'animaient quand il y passait en premier lieu.

Remarque. Les détails que nous venons de donner nous permettront d'étudier plus brièvement les mouvements qui suivent.

II. $$e = -at + bt^2$$

1° *Ligne des espaces.*

La fonction $-at + bt^2 = t(-a + bt)$ a pour racines

$$t' = 0, \quad t'' = \frac{a}{b}$$

Elle a un minimum $e = -\frac{a^2}{4b}$ pour $t = \frac{a}{2b}$

Les variations de e sont indiquées par le tableau et la courbe ci-dessous.

Valeurs de t	Valeurs de e
$t = -\infty$	$e = +\infty$
0	0
$\frac{a}{2b}$	$-\frac{a^2}{4b}$ minimum
$\frac{a}{b}$	0
$+\infty$	$+\infty$

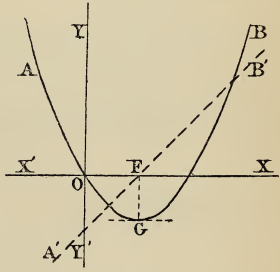


Fig. 270.

2° *Ligne des vitesses.*

L'équation de la vitesse se trouve en prenant la dérivée de la fonction des espaces, ce qui donne $v = -a + 2bt$

Pour $t = -1$ la vitesse est $v = -(a + 2b)$

$t = 0$ » $v = -a$

$t = \frac{a}{2b}$ » $v = 0$

Et pour t continuant à croître, la vitesse reste positive et grandit indéfiniment.

On la voit représentée sur la figure par la droite A'B'.

III. $$e = at - bt^2$$

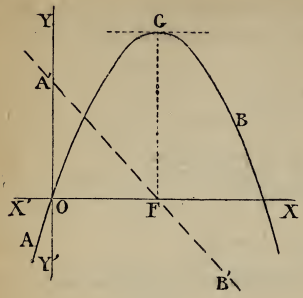
1° *Ligne des espaces.*

La fonction $at - bt^2 = t(a - bt)$ a pour racines

$$t' = 0 \quad \text{et} \quad t'' = \frac{a}{b}$$

Le coefficient de t^2 étant négatif, la fonction a un maximum

$$e = \frac{a^2}{4b} \quad \text{pour} \quad t = \frac{a}{2b}$$



Valeurs de t	Valeurs de e
$t = -\infty$	$e = -\infty$
0	0
$\frac{a}{2b}$	$\frac{a^2}{4b}$ maximum
$\frac{a}{b}$	0
$+\infty$	$-\infty$

Fig. 271.

On voit que, dans ce cas, le mobile ne parcourt, sur la partie positive de la trajectoire, qu'une longueur égale à FG, et qu'il va ensuite de 0 jusqu'à $-\infty$.

2° *Ligne des vitesses.*

On obtient pour équation de la vitesse $v = a - 2bt$

Il est facile d'en étudier les variations.

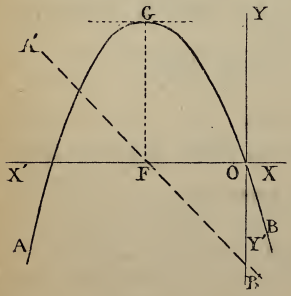
IV. $e = -at - bt^2$

1° *Ligne des espaces.*

La fonction $-at - bt^2 = -t(a + bt)$ a pour racines

$$t' = 0 \quad \text{et} \quad t'' = -\frac{a}{b}$$

Elle a un maximum $e = +\frac{a^2}{4b}$ pour $t = -\frac{a}{2b}$



Valeurs de t	Valeurs de e
$t = -\infty$	$e = -\infty$
$-\frac{a}{b}$	0
$-\frac{a}{2b}$	$\frac{a^2}{4b}$ maximum
0	0
$+\infty$	$-\infty$

Fig. 272.

2° *Ligne des vitesses.*

La dérivée donne $v = -a - 2bt$

La vitesse est positive pour $t < -\frac{a}{2b}$, nulle pour $t = -\frac{a}{2b}$, puis négative pour $t > -\frac{a}{2b}$.

V. $$e = bt$$

Le mouvement est uniforme (M., n° 174), il est représenté par la droite AB qui passe par l'origine. La vitesse $v = b$ est constante; elle est représentée par A'B' parallèle à l'axe des X.

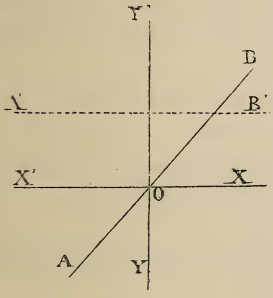


Fig. 273.

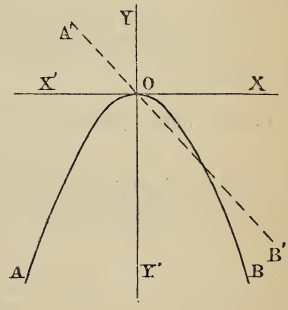


Fig. 274.

VI. $$e = -bt^2$$

On en tire $v = -bt$, mouvement uniformément retardé. La courbe des espaces a son sommet à l'origine et reste tout entière au-dessous de l'axe des X. A'B', ligne des vitesses, passe aussi par l'origine.

Problème 171

Tracer les lignes représentatives des espaces, des vitesses et des accélérations des mouvements donnés par les équations suivantes :

I. $e = t + t^2 + t^3$ III. $e = kt^3$ V. $e = \frac{a}{t^2}$

II. $e = 2 - t - 2t^2 + t^3$ IV. $e = \frac{a}{t}$

I. $$e = t + t^2 + t^3$$

En employant la règle pour former les dérivées (Probl. 169 *bis*, renvoi), on a* $$v = 1 + 2t + 3t^2$$

* Si l'on ne veut pas appliquer la règle des dérivées, on procède comme il suit : On a $$e = t + t^2 + t^3$$

La fonction $t + t^2 + t^3 = t\ (1 + t + t^2)$ n'a qu'une racine nulle, puisque les racines de $1 + t + t^2$ sont imaginaires ; elle ne passe donc qu'une fois par zéro.

Elle n'a ni maximum ni minimum ; en effet, dans les courbes représentatives d'un mouvement, les tangentes aux points qui correspondent aux maximums et aux minimums sont horizontales ; en ces points la vitesse est donc nulle (M., nº 181) ; par suite, ces points correspondent aux racines de l'équation de la vitesse.

Or, dans le cas actuel, l'équation de la vitesse $v = 1 + 2t + 3t^2$ n'ayant pas de racines réelles, celle des espaces n'a ni maximum ni minimum.

Vitesse. Nous avons trouvé, pour la loi de la vitesse,

$$v = 1 + 2t + 3t^2$$

Cette fonction ayant ses racines imaginaires, la vitesse est toujours positive (Alg., nº 246) ; elle a un minimum

$$v = +\frac{2}{3}$$

il arrive pour

$$t = -\frac{1}{3}$$

Accélération. Dans un mouvement rectiligne varié, on nomme accélération à un moment donné *la limite du rapport de l'accroissement de la vitesse à l'accroissement du temps, lorsque ce dernier accroissement tend vers zéro.*

En d'autres termes, l'accélération est *la vitesse de la vitesse.*

On obtient la loi en prenant la *dérivée* de la vitesse.

En désignant l'accélération par j, on a ici

$$j = 2 + 6t$$

En désignant par e_1 la valeur de e au bout du temps $(t + \theta)$, on a

$$e_1 = (t + \theta) + (t + \theta)^2 + (t + \theta)^3 = t + t^2 + t^3 + (1 + 2t + 3t^2)\theta + (1 + 3t)\theta^2 + \theta^3$$

En retranchant, on trouve pour l'espace parcouru pendant le temps θ

$$e_1 - e = (1 + 2t + 3t^2)\ \theta + (1 + 3t)\ \theta^2 + \theta^3$$

La vitesse moyenne pendant le temps θ est

$$\frac{e_1 - e}{\theta} = 1 + 2t + 3t^2 + (1 + 3t)\ \theta + \theta^2$$

La vitesse au bout du temps t, qui en est la limite, sera

$$v = 1 + 2t + 3t^2$$

Elle est représentée par une droite qui coupe l'axe des X au point $t = -\frac{1}{3}$

Pour la même raison que ci-dessus, les maximums ou minimums de la vitesse arrivent lorsque l'accélération devient nulle, c'est-à-dire pour la racine de $2 + 6t = 0$.

Tracé des lignes représentatives. Pour obtenir les lignes représentatives, on commence d'abord par calculer les points importants (racines, maximums, minimums, etc.), puis ceux qu'on juge être utiles pour tracer convenablement chaque courbe. Le tableau ci-dessous renferme les valeurs correspondantes de *e* et de *v*; l'accélération *j* étant représentée par une droite, il a suffi d'en déterminer deux points.

La ligne AB des espaces est tracée en traits pleins.

» A'B' des vitesses, en traits interrompus.

» A''B'' des accélérations est ponctuée.

t	e	v	j
$-\frac{4}{3}$	$-2\frac{4}{27}$		
-1	-1	2	
$-\frac{2}{3}$	$-\frac{14}{27}$	1	
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{27}$ infl.	$\frac{2}{3}$ min.	0
0	0	1	2
$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{27}$	2	
$\frac{2}{3}$	$1\frac{11}{27}$	$3\frac{2}{3}$	
1	3		

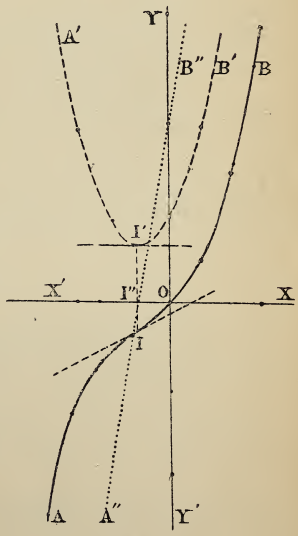


Fig. 275.

Point d'inflexion. La courbe des espaces présente une inflexion

au point I qui correspond au minimum I′ de la vitesse ; il est facile de s'en rendre compte.

Pendant tout le temps qui précède ce minimum, la vitesse décroît ; par suite, la courbe des espaces est concave (M., nos 182 et 183) ; à partir de cet instant, la vitesse croissant, la courbe des espaces devient convexe, elle a donc passé par un point d'inflexion. On ferait un raisonnement analogue dans le cas de la vitesse maximum.

Le point I correspond évidemment au point I″, où l'accélération est nulle.

II. $$e = 2 - t - 2t^2 + t^3$$

On en tire $$v = -1 - 4t + 3t^2$$

et $$j = -4 + 6t$$

Accélération. Elle est représentée par une ligne droite A″B″ qui coupe l'axe des X au point $t = \frac{2}{3}$.

Vitesse. La fonction v a pour racines

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \quad \text{ou} \quad t' = 1{,}54 \quad \text{et} \quad t'' = -0{,}21$$

Elle est représentée par une parabole A′I′B′, son minimum arrive lorsque $j = 0$; pour $t = \frac{2}{3}$, il est $v = \frac{7}{3}$.

Espace. La fonction e a trois racines réelles :

$$t' = -1$$
$$t'' = 1$$
$$t''' = 2$$

la ligne AMINB qui la représente coupe l'axe des X en trois points.

Elle a un maximum et un minimum qui correspondent aux racines de l'équation des vitesses.

La racine $t = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ donne le maximum $e = 2{,}12$.

» $t = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ » minimum $e = -0{,}63$.

Cette courbe a un point d'inflexion en I ; il correspond au minimum en I′ de v, qui a lieu pour $t = \frac{2}{3}$

Alors $e = 0{,}74$

Le tableau ci-dessous renferme ces valeurs et quelques autres qui ont été calculées pour aider au tracé des courbes.

t	e	v	j
$-1\frac{1}{3}$	$-2,59$		
-1	0		
$-\frac{2}{3}$	$1,48$	3	
$-0,21$	$2,12M$	0	
0	2	-1	
$\frac{1}{3}$	$1,48$	-2	
$\frac{2}{3}$	$0,74$ infl.	$-2\frac{1}{3}m$	0
1	0	-2	2
$1\frac{1}{3}$	$-0,51$	-1	
$1,54$	$-0,63m$	0	
$1\frac{2}{3}$	$-0,59$		
2	0	3	
$2\frac{1}{3}$	$1,48$		

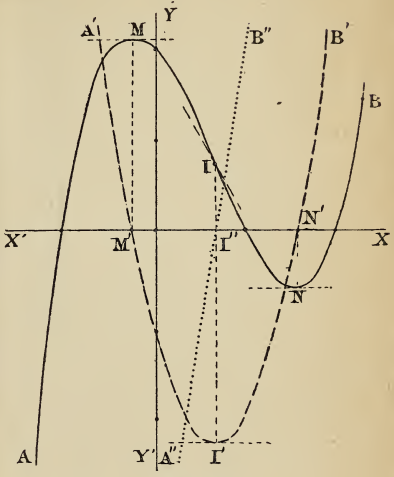


Fig. 276.

Remarque. Ainsi que nous l'avons déjà dit, il est très utile, lorsque les courbes sont tracées, de faire rendre compte aux élèves des particularités que présente le mouvement du mobile sur sa trajectoire.

III. $$e = kt^3$$

On en tire $$v = 3kt^2$$

$$j = 6kt$$

Ces trois fonctions s'annulent pour $t = 0$, les trois lignes représentatives se rencontrent au point O.

Pour les valeurs de e égales et de signe contraire, e et j prennent des valeurs égales et de signe contraire, tandis que v garde les mêmes valeurs; la courbe des vitesses est donc symétrique par rapport à l'axe des y.

La fonction e n'a ni maximum ni minimum.

La fonction v a 0 pour minimum, alors $t = 0$.

Dans le tracé des lignes nous avons fait $k = 1$.

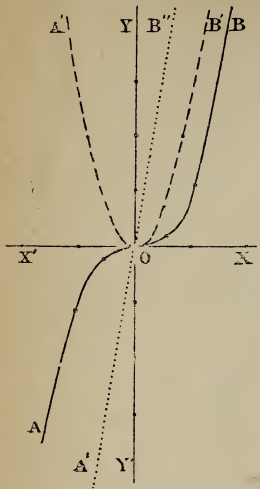


Fig. 277.

t	e	v	j
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{8}$		
-1	-1	3	
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	3
1	8	3	
$1\frac{1}{2}$	1		
	$3\frac{3}{8}$		

IV. $$e = \frac{a}{t}$$

On en tire * $$v = -\frac{a}{t^2}$$

et $$j = \frac{2a}{t^3}$$

Espace. La fonction $e = \frac{a}{t}$ est l'équation d'une hyperbole équilatérale rapportée à ses asymptotes. (G., n° 677.)

Vitesse. La fonction v est toujours négative; elle prend les mêmes valeurs pour les valeurs de t égales et de signe contraire, et la courbe a les deux axes pour asymptotes.

Accélération. Elle est de même ligne que t, et la ligne qui la représente a aussi les axes pour asymptotes.

Remarque. Pour le calcul du tableau, on a fait $a = 1$.

---

* La fonction proposée peut s'écrire (Alg., 53) $e = at^{-1}$; en appliquant la règle donnée plus haut, pour trouver la dérivée, on obtient

$$v = -at^{-2} \quad \text{ou} \quad v = -\frac{a}{t^2}$$

De même, la dérivée de v donne $j = 2at^{-3}$ ou $j = \frac{2a}{t^3}$.

t	e	v	j
$-\infty$	0	0	0
-3	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{27}$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
-1	-1	-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
$-\frac{1}{3}$	-3	-9	-54
0	$\pm\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\frac{1}{3}$	3	-9	54
$\frac{1}{2}$	2	-4	16
-1	1	1	2
-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	16
-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$
$+\infty$	0	0	0

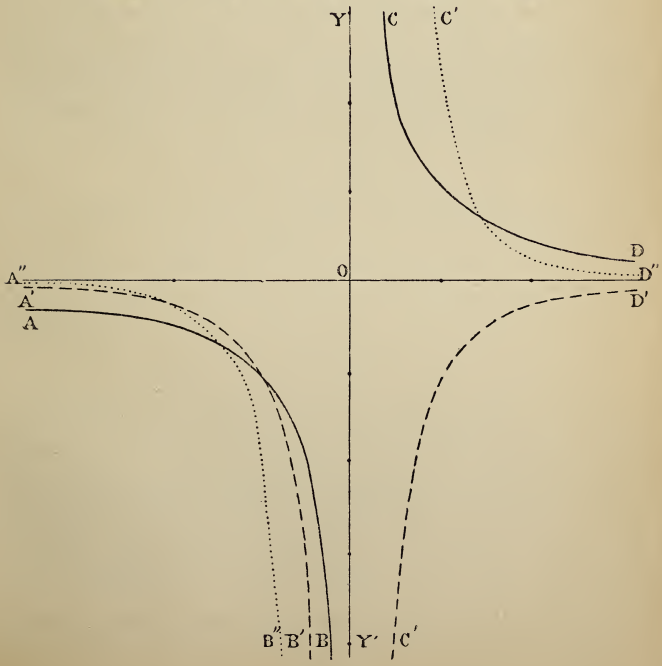


Fig. 278.

V. $$e = \frac{a}{t^2}$$

On en tire $$v = -\frac{2a}{t^3}$$

et $$j = \frac{6a}{t^4}$$

Le tableau et les courbes se construiraient comme dans la question IVe.

Problème 171 bis.

Dire ce que vous savez sur le mouvement dont la loi est donnée par la courbe AB (fig. 279).

Le mobile, à l'origine du temps, se trouve à une distance A*a* du point O de la trajectoire, pris pour origine des espaces ; il est d'abord en repos, puis se met en mouvement avec une vitesse qui croît lentement. Quand il se trouve à une distance C*c*, au bout du temps *ac*, sa vitesse se ralentit de nouveau, comme le montre le point d'inflexion C, jusqu'à ce qu'au bout du

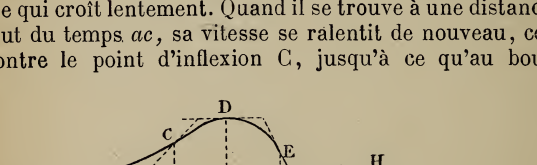


Fig. 279.

temps *ad*, le mobile se trouvant à une distance D*d* de l'origine, s'arrête, pour revenir ensuite sur ses pas avec une vitesse négative croissante en valeur absolue pendant le temps *de ;* puis le mouvement se ralentit, et lorsque le mobile n'est plus qu'à une distance F*f* de l'origine, il s'arrête pour reprendre son mouvement dans le sens positif avec une vitesse qui croît pendant le temps *fg*, puis décroît pendant *gh* et devient nulle de nouveau.

Le mobile se dirige alors vers le point O de sa trajectoire d'un

mouvement qui s'accélère rapidement jusqu'à ce qu'il atteigne ce point au bout du temps hI ; il dépasse l'origine, s'avance sur la partie négative de la trajectoire, mais son mouvement se ralentit et le mobile s'arrête quand il est à une distance Bb du point O, dans le sens négatif.

Problème 172

Arriver, par le calcul, à la formule de la vitesse, dans un mouvement où les espaces parcourus au bout d'un temps donné t, *sont donnés par l'équation* $e = \frac{\gamma t^2}{2}$, γ *désignant une quantité constante positive ou négative.* (Lille, baccalauréat.)

Cette question est traitée dans le cours (M., nº 180).

Problème 172 bis.

Dans un certain mouvement, la vitesse v, *à un instant donné quelconque* t, *est exprimée par la formule* $v = 7 - 2t$. *On demande quelle est l'accélération du mouvement et quel est l'espace parcouru depuis l'instant où* $t = 2$, *jusqu'à celui où* $t = 3{,}5$. (Lille, baccalauréat, 1881.)

La variation de vitesse pendant l'unité de temps est -2 ; on a donc $j = -2$

On a vu (M., nº 188) que lorsque la vitesse est donnée par la formule $v = a + bt$

on a pour les espaces $e = at + \frac{bt^2}{2}$

En faisant $a = 7$ et $b = -2$

on obtient $e = 7t - t^2$

Il ne reste plus qu'à faire successivement $t = 2$ et $t = 3{,}5$, et la différence donne l'espace demandé.

Rép. Accélération $j = -2$;

Espace $e = 2{,}25$.

Remarque. Si l'on demandait l'espace parcouru depuis l'instant

$t = 2$ jusqu'à $t = 5$, en mettant ces valeurs dans la formule de e, on trouverait chaque fois $e = 10$; cela exprime qu'en ces deux instants le mobile est à la même distance de l'origine ; mais, pendant ces trois secondes, le mobile a parcouru 2^m25 pour atteindre sa distance maximum et 2^m25 pour revenir au point $e = 10$; il a donc parcouru 4^m50.

Problème 173

Qu'appelle-t-on vitesse d'un mouvement varié ? Si le chemin parcouru croît proportionnellement au cube du temps, compté à partir d'une certaine époque, comment varie la vitesse ? (Caen, baccalauréat, 1877.)

Cette question est résolue dans le problème 171, I et III.

Problème 173 bis.

Un mouvement est donné par l'équation de sa vitesse; trouver la loi des espaces.

I. $v = bt$ II. $v = a + bt$ III. $v = bt^2$

I. $$v = bt$$

1° On peut, de la règle donnée pour obtenir la dérivée d'une fonction algébrique (Ex. n° 85), déduire celle qui permet de remonter à la fonction, quand on en connaît la dérivée.

Règle. Dans chaque terme, ajouter une unité à l'exposant de la variable, puis diviser ce terme par le nouvel exposant.

En général, il faut ajouter à ce résultat une *constante* qui provient de ce que les termes indépendants de la variable disparaissent lorsqu'on prend la dérivée. Cette constante exprime la distance du mobile à l'origine pour l'époque $t = 0$. On peut déterminer la valeur de cette constante, lorsqu'on connaît une position du mobile et l'instant correspondant.

En appliquant ce qui vient d'être dit à l'équation

$$v = bt$$

on trouve $$e = \frac{1}{2} bt^2 + A$$

A étant la constante arbitraire.

2° On peut encore employer la méthode suivante, qui n'exige pas la notion de dérivée.

Soit AF la ligne représentative de la vitesse $v = bt$ et Af le temps considéré.

Supposons-le partagé en n parties égales Ab, bc, etc.

Si la vitesse était restée constamment égale à Bb pendant le temps bc, le mouvement aurait été uniforme, et l'on obtiendrait l'espace parcouru en multipliant la vitesse Bb par le temps bc; ce qui donne

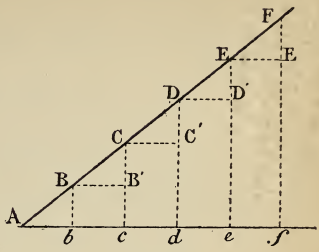


Fig. 280.

$$\mathrm{B}b \times bc$$

Or ce produit exprime la surface du rectangle Bc.

De même, si la vitesse restait égale à Cc pendant le temps cd, l'espace parcouru serait la surface du rectangle Cd, et ainsi de suite.

La somme des espaces parcourus de cette manière se rapproche d'autant plus de l'espace cherché que les temps bc, cd,... sont plus petits; alors aussi la somme des rectangles se rapproche de la surface du triangle AfF. A la limite, le mouvement devient uniformément accéléré, et l'espace parcouru est donné par la surface du triangle AfF ; d'où

$$e = \text{surf. triangle } \mathrm{A}f\mathrm{F} = \frac{1}{2}\,\mathrm{A}f \times \mathrm{F}f$$

Mais
$$\mathrm{A}f = t$$
$$\mathrm{F}f = bt$$

Donc
$$e = \frac{1}{2}\,bt^2$$

Résultat obtenu par le calcul, dans le cours (M., n° 188).

Si à l'origine du temps le mobile n'était pas à l'origine des espaces, pour trouver la valeur de e, il faudrait à l'espace $\frac{1}{2}\,bt^2$, parcouru pendant le temps t, ajouter une longueur A exprimant la distance à laquelle le mobile se trouvait de l'origine à l'époque $t = 0$; on a alors

$$e = \frac{1}{2}\,bt^2 + \mathrm{A}$$

Remarque. Dans les cours élémentaires, on emploie souvent la méthode graphique que nous venons de développer, pour trouver l'espace parcouru d'un mouvement uniformément accéléré, au lieu de la méthode algébrique exposée dans le cours (M., nº 188).

II. $$v = a + bt$$

1º La règle donnée plus haut fournit immédiatement

$$e = at + \frac{1}{2} bt^2 + A$$

2º La méthode graphique arrive au même résultat.

La ligne des vitesses part alors d'un point situé au-dessus de l'axe des temps.

L'espace parcouru pendant le temps t est donné par l'aire du trapèze ABab, dans lequel Aa représente la vitesse initiale a, et BA$' = bt$, l'augmentation de la vitesse pendant le temps t.

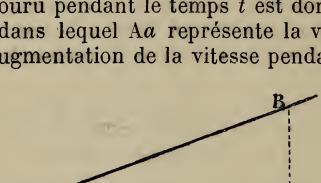


Fig. 281.

Le trapèze se compose du rectangle Ab dont la surface est

$$Aa \times ab = at$$

et du triangle AA'B qui a pour surface

$$\frac{1}{2} AA' \times BA' = \frac{1}{2} bt^2$$

Donc $$e = at + \frac{1}{2} bt^2$$

Si la ligne représentative de la vitesse part d'un point situé au-dessous de l'axe des temps, on regarde comme négatives les aires telles que AaB (fig. 282), placées au-dessous de l'axe des abcisses, de sorte que l'espace parcouru est la somme algébrique

des aires AaB et BDd ; il est négatif, nul ou positif, suivant que le temps considéré est plus petit que $ac = 2aB$, égal à ac ou plus grand que ac.

Les équations du mouvement sont alors

$$v = -a + bt$$

et par suite,

$$e = -at + \frac{1}{2}bt^2$$

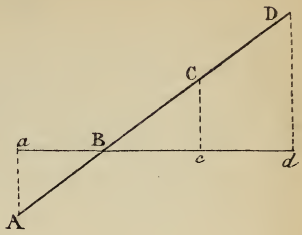


Fig. 282.

Leur discussion donnerait des résultats analogues à ceux que nous a fournis la méthode graphique.

III. $v = bt^2$

1° En appliquant la règle donnée précédemment, on écrit

$$e = \frac{1}{3}bt^3 + A$$

Nous allons voir que la méthode graphique conduit aux mêmes résultats.

2° Nous savons (page 254) que la fonction $v = bt^2$ représente une parabole.

En raisonnant comme précédemment, on trouverait que l'espace parcouru pendant le temps $Ab = t$ est donné par l'aire comprise entre la courbe AB et l'axe Ab.

Or cette aire égale (G., n° 707)

$$\frac{1}{3}Ab \times Ab'$$

et puisque $Ab = t$

et que $Ab' = Bb = bt^2$

on a donc $e = \frac{1}{3}bt^3$

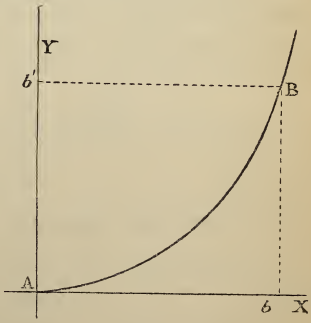


Fig. 283.

C'est la formule trouvée ci-dessus.

Problème 174

Un plan incliné étant donné par sa hauteur, sa base et sa longueur, trouver, en fonction des données, la vitesse du mobile lorsqu'il a parcouru toute la longueur du plan, sans vitesse initiale, sous l'influence de la pesanteur seule.

On ne tiendra pas compte du frottement. (Lille, bacc.)

Le corps chemine le long du plan incliné, d'un mouvement uniformément accéléré, sans vitesse initiale (M., nº 192). On a donc (M., nº 187)

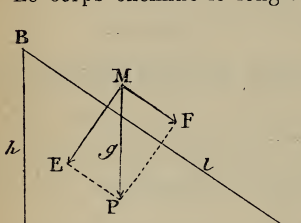


Fig. 284.

$$v = jt \qquad (1)$$

On a encore (M., nº 188)

$$e = \frac{jt^2}{2} \qquad (2)$$

De ces deux formules on tire

$$v^2 = 2je$$

Remplaçons e par l,

$$v^2 = 2jl \qquad (3)$$

Il reste à déterminer l'accélération j, en fonction des données.

L'accélération g de la pesanteur se décompose en deux autres : l'une ME, normale au plan, n'a pas d'action, puisqu'il n'y a pas de mouvement dans ce sens ; l'autre MF est celle du mouvement du mobile. On a (M., nº 207) :

$$\frac{MF}{MP} = \frac{AB}{BC} \quad \text{ou} \quad \frac{j}{g} = \frac{h}{l}$$

par suite,

$$j = \frac{h}{l}\, g \qquad (4)$$

En mettant cette valeur dans la formule (3), on a

$$v^2 = 2gh$$

d'où

$$v = \sqrt{2gh}$$

On voit que c'est la vitesse que posséderait le mobile s'il était tombé verticalement d'une hauteur h (M., nº 197) ; ce résultat est indépendant de l'inclinaison du plan.

Problème 175

Trouver la vitesse initiale et l'accélération du mouvement uniformément varié d'un mobile qui a parcouru e *pendant un temps* t *et* e' *pendant un temps* t' :

Dans quel cas le mouvement sera-t-il accéléré ou retardé ?
» » *n'aura-t-il point de vitesse initiale?*
» » *serait-il uniforme ?*

Les formules du mouvement uniformément accéléré (M., nº 188) donnent

$$e = at + \frac{bt^2}{2} \qquad (1)$$

et

$$e' = at' + \frac{bt'^2}{2} \qquad (2)$$

a étant la vitesse initiale et b l'accélération du mouvement du mobile, ce sont les deux inconnues.

En éliminant a entre les équations (1) et (2), on obtient

$$b = \frac{2(e't - et')}{tt'(t' - t)}$$

Et en éliminant b, on a

$$a = \frac{e't^2 - et'^2}{tt'(t' - t)}$$

1º *Pour que le mouvement soit accéléré*, il faut que l'accélération b soit positive.

On doit avoir $$\frac{2(e't - et')}{tt'(t' - t)} > 0$$

Et comme on peut toujours supposer $t' > t$, il est nécessaire que l'on ait

$$e't > et'$$

ou

$$\frac{e'}{e} > \frac{t'}{t}$$

Il faut que les espaces parcourus croissent plus rapidement que les temps employés à les parcourir.

Si le mouvement est retardé, on a

$$\frac{e'}{e} < \frac{t'}{t}$$

2º *Pour que le mouvement n'ait pas de vitesse initiale*, il faut que $a = 0$, ce qui entraîne la relation

$$e't^2 - et'^2 = 0$$

ou

$$\frac{e'}{e} = \frac{t'^2}{t^2}$$

C'est-à-dire que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.

C'est la condition indiquée dans le cours (M., nº 189, 2º).

3º *Si le mouvement est uniforme,* l'accélération est nulle ;

alors $$e't - et' = 0$$

d'où $$\frac{e'}{e} = \frac{t'}{t}$$

Les espaces sont proportionnels aux temps, c'est la définition du mouvement uniforme (M., nº 172).

Problème 176

On donne deux droites rectangulaires qui se coupent en un point O, *un point* A *sur l'une, et un point* B *sur l'autre. Au même instant, un mobile part de* A *et un autre de* B, *sans vitesse initiale, se dirigeant vers le point* O, *d'un mouvement uniformément accéléré ; les accélérations sont* a *et* b. *On demande :*

1º *Dans combien de temps la distance de ces deux mobiles sera minimum ;*

2º *La valeur de cette distance;*

3º *Les positions correspondantes des mobiles.*

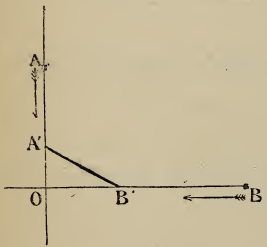


Fig. 285.

Application au cas où $OA = 20^m$, $OB = 10^m$, $a = b = 1^m$. (Brevet Ens. spéc., 1871.)

Soit $OA = l$, $OB = l'$

Désignons par A', B' les points où seront les mobiles après un temps t, et par d la distance A'B'.

On a $$d^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2$$

Or $$OA' = l - \frac{at^2}{2} \quad \text{et} \quad OB' = l' - \frac{bt^2}{2}$$

donc $$d^2 = \left(l - \frac{at^2}{2}\right)^2 + \left(l' - \frac{bt^2}{2}\right)^2$$

ou, en ordonnant,

$$t^4(a^2 + b^2) - 4t^2(al + bl') + 4(l^2 + l'^2 - d^2) = 0$$

d'où

$$t=\pm\sqrt{\frac{2\left[(al+bl'\pm\sqrt{(al+bl')^2-(l^2+l'^2)(a^2+b^2)+d^2a^2+b^2)}\right]}{a^2+b^2}}$$

qui devient

$$t=\pm\sqrt{\frac{2\left[(al+bl')\pm\sqrt{d^2(a^2+b^2)-(al'-bl)^2}\right]}{a^2+b^2}}$$

Discussion. Pour que la valeur de t soit réelle, on doit avoir

$$d^2(a^2+b^2)-(al'-bl)^2\geqq 0$$

d'où

$$d^2\geqq\frac{(al'-bl)^2}{a^2+b^2}$$

Le minimum de d est donc

$$d=\frac{al'-bl}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Il arrive au bout d'un temps

$$t=\pm\sqrt{\frac{2(al+bl')}{a^2+b^2}}$$

La valeur négative de t ne saurait convenir à la question, elle provient de ce qu'en élevant au carré OA′ et OB′, on obtient la même équation que si l'on avait eu

$$OA'=\left(\frac{at^2}{2}-l\right)\quad\text{et}\quad OB'=\left(\frac{bt^2}{2}-l\right)$$

équations qui donneraient les positions A′ et B′ des mobiles marchant dans un sens contraire à celui de l'énoncé.

On a donc :

Valeur minimante de t, $t=\sqrt{\frac{2(al+bl')}{a^2+b^2}}$

» minimum de d, $d=\frac{al'-bl}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Position du mobile A, $OA'=\frac{b(bl-al')}{a^2+b^2}$

Position du mobile B, $OB'=\frac{a(bl-al')}{a^2+b^2}$

Pour les valeurs de d plus grandes que son minimum, on trouve quatre valeurs de t; on vient de voir qu'il faut laisser de côté celles qui correspondent au signe — devant le premier radical, il reste les deux valeurs

$$t=\sqrt{\frac{2\left[(al+bl')\pm\sqrt{(a^2+b^2)d^2-(al'-bl)^2}\right]}{a^2+b^2}}$$

La valeur négative du second radical est à rejeter lorsque l'on a

$$(al + bl')^2 < (a^2 + b^2)\, d^2 - (al' - bl)^2$$

ce qui donne, après réduction,

$$d^2 > l^2 + l'^2$$

c'est-à-dire d plus grand que AB.

Les deux valeurs de t ne sont donc réelles que pour

$$\sqrt{l^2 + l'^2} > d \geqq \frac{al' - bl}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

En supposant d compris entre ces limites, nous allons vérifier que les deux valeurs de t sont acceptables.

Pour abréger, désignons par R la valeur absolue du second radical.

La première valeur de t est

$$t^2 = \frac{2\left[(al + bl') + \mathrm{R}\right]}{a^2 + b^2}$$

par suite,

$$\mathrm{OA}' = l - \frac{at^2}{2} = l - \frac{a(al + bl') + a\mathrm{R}}{a^2 + b^2} = \frac{b(bl - al') - a\mathrm{R}}{a^2 + b^2}$$

et $$\mathrm{OB}' = l' - \frac{b'^2}{2} = l' - \frac{b(al + bl') + b\mathrm{R}}{a^2 + b^2} = \frac{-a(bl - al') - b\mathrm{R}}{a^2 + b^2}$$

La seconde valeur de t fournit

$$\mathrm{OA}'' = l - \frac{a(al + bl') - a\mathrm{R}}{a^2 + b^2} = \frac{b(bl - al') + b\mathrm{R}}{a^2 + b^2}$$

et $$\mathrm{OB}'' = l' - \frac{b(al + bl') - b\mathrm{R}}{a^2 + b^2} = \frac{-a(bl - al') + a\mathrm{R}}{a^2 + b^2}$$

Or il est facile de vérifier que

$$\overline{\mathrm{OA}'}^2 + \overline{\mathrm{OB}'}^2 = \overline{\mathrm{OA}''}^2 + \overline{\mathrm{OB}''}^2 = \frac{(a^2 + b^2)\left[(bl - al')^2 + \mathrm{R}^2\right]}{(a^2 + b^2)} = d^2$$

Pour que la rencontre ait lieu au point O, il faut que le minimum soit nul ; par suite, que l'on ait

$$al' = bl$$

ou

$$\frac{a}{b} = \frac{l}{l'}$$

condition facile à justifier.

Remarque. Si les accélérations a et b sont égales, les formules ci-dessus se simplifient, il vient

$$t = \sqrt{\frac{l + l' \pm \sqrt{2d^2 - (l - l')^2}}{a}}$$

Le minimum de $d = \frac{l - l'}{\sqrt{2}}$

Il arrive pour $t = \sqrt{\frac{l - l'}{a}}$

Alors $A'O = B'O = \frac{l - l'}{2}$

Application. L'énoncé donne

$$l = 20, \quad l' = 10, \quad a = b = 1$$

En mettant ces valeurs dans les formules que nous venons de trouver, on obtient $t = \sqrt{30 \pm \sqrt{2d^2 - 100}}$

Le minimum de $d = 5\sqrt{2} = 7{,}07$

arrive pour $t = \sqrt{30} = 5^s{,}47$

On a alors $OA' = OB' = 5$

Si l'on fait $d = 8$, on trouve

$$t' = \sqrt{30 + \sqrt{28}} = 5^s{,}94, \quad OA' = 2{,}36, \quad OB' = -7{,}64$$

$$t'' = \sqrt{30 - \sqrt{28}} = 4^s{,}97, \quad OA'' = 7{,}64, \quad OB'' = -2{,}36$$

Ces deux valeurs de t donnent la même valeur pour d, ce qui est conforme aux résultats de la discussion précédente.

Si l'on fait $d = AB = \sqrt{l^2 + l'^2} = \sqrt{500}$

on obtient $t = \sqrt{30 \pm \sqrt{900}} = \sqrt{30 \pm 30}$

$$t' = 0, \quad t'' = \sqrt{60}, \quad OA' = -10 \quad \text{et} \quad OB' = -20$$

Ce qui confirme les résultats de la discussion ci-dessus.

Chute des corps.

Problème 177

Quel temps mettra un corps pour tomber au fond d'un puits de 400^m *de profondeur ?* $g = 9^m80$.

La formule $e = \frac{gt^2}{2}$ (M., n° 197) fournit

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 400}{9{,}80}} = 9{,}04$$

Rép. $9^s{,}04$.

Problème 178

Quelle est la vitesse d'un corps tombé du haut de la flèche de la cathédrale de Rouen (150 m)? $g = 9{,}8088$.

La formule $v = \sqrt{2gh}$ (M., n° 197) donne

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8088 \times 150} = 54^{\text{m}}246$$

Rép. $54^{\text{m}}246$.

Problème 179

De quelle hauteur est tombé un corps dont la vitesse est 50^{m}?

La formule $v = \sqrt{2gh}$ fournit

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{50^2}{2 \times 9{,}8088} = 127^{\text{m}}43$$

Rép. $127^{\text{m}}43$.

Problème 180

Quel espace parcourt un corps pendant la 5e *seconde de chute?*

Traitons la question générale.

Quel espace parcourt un corps pendant la n^{e} *seconde de chute?*

Pendant n secondes il parcourt $\frac{gn^2}{2}$, et pendant les $(n-1)$ premières secondes, $\frac{g}{2}(n-1)^2$

Donc, pendant la n^{e} seconde, le corps parcourt

$$\frac{g}{2}n^2 - \frac{g}{2}(n-1)^2$$

ou

$$\frac{g}{2}\left[n^2 - (n-1)^2\right] = \frac{g}{2}(2n-1)$$

Rép. $\frac{g}{2}(2n-1)$.

Application. Pour $n = 5$, on a

$$\frac{9{,}8088}{2}(10-1) = 44^{\text{m}}1396.$$

Rép. $44^{\text{m}}14$.

Problème 181

De quelle hauteur est tombé un corps qui parcourt une distance l *pendant la dernière seconde de sa chute ?*

Soit t la durée de la chute entière.

L'espace total parcouru pendant les t secondes de chute est

$$e_1 = \frac{1}{2} gt^2$$

Pendant les $(t-1)$ secondes, l'espace est

$$e_2 = \frac{1}{2} g (t-1)^2$$

L'espace parcouru pendant la dernière seconde sera

$$l = e_1 - e_2 = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{2} g (t-1)^2 = \frac{1}{2} g (2t-1)$$

d'où on tire $$t = \frac{2l+g}{2g}$$

La hauteur de chute e_1 devient alors

$$e_1 = \frac{1}{2} g \left(\frac{2l+g}{2g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(2l+g)^2}{4g}$$

Rép. Hauteur de chute $e_1 = \frac{1}{8} \frac{(2l+g)^2}{g}$.

Durée de la chute $t = \frac{(2l+g)}{2g}$.

Discussion. Le problème n'est possible, dans le sens où on l'a posé, que si l'on a $t \geqq 1$, soit

$$\frac{2l+g}{2g} \geqq 1$$

d'où $$2l \geqq g$$

La valeur minimum de l est $\frac{g}{2}$. On conçoit qu'il doit en être ainsi, car $\frac{g}{2}$ est précisément l'espace parcouru par un corps *qui ne tombe que pendant une seconde ;* aussi, dans ce cas, la formule $l_1 = \frac{1}{8} \frac{(2l+g)^2}{g}$ donne $l_1 = \frac{g}{2}$.

Problème 182

Pendant combien de temps est tombé un corps, si l'espace parcouru pendant la dernière seconde est le tiers de l'espace total?

Si n est la durée de la chute, l'espace parcouru pendant la dernière seconde est (Probl. 180) :

$$\frac{g}{2}(2n-1)$$

et l'espace total $$\frac{g}{2}n^2$$

On doit avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{g}{2}(2n-1)=\frac{1}{3}\times\frac{g}{2}n^2$$

d'où $$n^2-6n+3=0$$

$$n=3\pm\sqrt{9-3}=3\pm\sqrt{6}$$

La racine positive convient seule ; l'autre fournirait une valeur de n inférieure à une seconde.

Rép. $n=3+\sqrt{6}=5{,}449$.

Problème 183

Un corps en tombant parcourt une longueur h *pendant les* t *dernières secondes de sa chute ; de quelle hauteur est-il tombé sans vitesse initiale?*

Soit x la hauteur de chute du corps, y la durée de cette chute,

on a $$x=g\,.\,\frac{y^2}{2} \qquad (1)$$

La hauteur $(x-h)$ ayant été parcourue dans le temps $(y-t)$,

on aura $$x-h=g\,.\,\frac{(y-t)^2}{2} \qquad (2)$$

En retranchant (2) de (1), il vient

$$h=\frac{g}{2}(2yt-t^2)$$

d'où $$y=\frac{2h+gt^2}{2gt}$$

La hauteur x de la chute sera

$$x = \frac{g}{2}\left(\frac{2h + gt^2}{2gt}\right)^2 = \frac{1}{8g}\left(\frac{2h + gt^2}{t}\right)^2$$

Rép. Hauteur de chute : $\frac{1}{8g}\left(\frac{2h + gt^2}{t}\right)^2$.

Remarque. Le problème 181 n'est qu'un cas particulier de cette question, dans laquelle on fait $t = 1$.

Problème 184

Un corps tombe du haut d'une tour qui a 60^m *de hauteur. Combien de temps met-il à parcourir une longueur égale aux* $\frac{2}{3}$ *de la hauteur de la tour et dont les extrémités sont à égale distance du pied de la tour et de son sommet ?*

Les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de la tour valent 40^m. Les 40^m indiqués dans l'énoncé commencent à 10^m du sommet.

Pour parcourir les 10 premiers mètres, le corps met un temps exprimé par $\sqrt{\frac{2 \times 10}{g}}$ (M., nº 197).

Pour parcourir 50^m, le temps employé sera

$$\sqrt{\frac{2 \times 50}{g}}$$

Le temps cherché est la différence de ces deux temps, soit

$$\sqrt{\frac{2 \times 50}{g}} - \sqrt{\frac{2 \times 10}{g}} = 1^s76$$

Rép. $1^s,76$.

Généralisation. Soit h la hauteur AB de la tour ; C et D les points équidistants l'un de A, l'autre de B, et soit $CD = Kh$, K étant plus petit que l'unité.

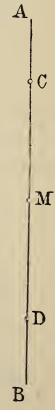


Fig. 286.

De $e = \frac{gt^2}{2}$, on tire $t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$

Le temps pour parcourir AD est $\sqrt{\frac{2AD}{g}}$

» » AC » $\sqrt{\frac{2AC}{g}}$.

Donc le temps mis pour parcourir CD est

$$\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{AD}-\sqrt{AC}\right) \qquad (1)$$

Or, M étant le milieu de AB,

$$AD = AM + MD = \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\,Kh = \frac{h}{2}(1+K)$$

et $$AC = AM - MC = \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\,Kh = \frac{h}{2}(1-K)$$

Dès lors l'expression (1) devient

$$\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{\frac{h}{2}(1+K)}-\sqrt{\frac{h}{2}(1-K)}\right)$$

Rép. $\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{1+K}-\sqrt{1-K}\right)$.

Cette formule se discute sans difficulté.

Application. L'application au cas donné fournit

$$\sqrt{\frac{60}{9{,}8088}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}}-\sqrt{1-\frac{2}{3}}\right)=1{,}76$$

Rép. $1^{s},76$.

Problème 185

Un corps tombe 3 *secondes avant un autre qui part du même point. Quel intervalle les séparera quand le second sera tombé pendant* 2 *secondes ?*

Le premier aura parcouru $g \times \frac{(2+3)^2}{2}$

et le second $g \times \frac{2^2}{2}$

La distance qui les séparera sera

$$\frac{g}{2}(5^2-2^2)=21\,\frac{g}{2}=102^{m}99$$

Rép. 103^{m}.

Problème 186

Deux corps partent d'un même point O *sans vitesse initiale à* t *d'intervalle ; à quel moment seront-ils séparés par une distance* h ?

Quel chemin aura-t-il parcouru?

1° Soit x le temps pendant lequel est tombé le premier corps, e l'espace qu'il a parcouru ; on a

$$e = \frac{gx^2}{2} \qquad (1)$$

Le second corps fournit la relation

$$e - h = \frac{g(x-t)^2}{2}. \qquad (2)$$

Soustrayant (2) de (1), il vient

$$h = \frac{g}{2}(2tx - t^2)$$

d'où l'on tire $$x = \frac{2h + gt^2}{2gt}$$

1° **Rép.** Le temps $x = \dfrac{2h + gt^2}{2gt}$.

2° Le chemin parcouru par le premier mobile s'obtient en remplaçant x par sa valeur dans (1)

$$e = \frac{g}{2}\left(\frac{2h + gt^2}{2gt}\right)^2$$

Le chemin parcouru par le second est

$$e_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{2h + gt^2}{2gt}\right)^2 - h = \frac{g}{2}\left(\frac{2h - gt^2}{2gt}\right)^2$$

Rép. $e = \dfrac{1}{8g}\left(\dfrac{2h + gt^2}{t}\right)^2$.

$e_1 = \dfrac{1}{8g}\left(\dfrac{2h - gt^2}{t}\right)^2$.

Problème 187

On laisse tomber deux corps dans le vide et du même point. Dix secondes après la chute du premier, ces deux corps sont éloignés de 229m10. *A quel moment a-t-on laissé tomber le second?* (Bordeaux. Brevet Ens. sup., 1879.)

Généralisation. *On a laissé tomber deux corps dans le vide et du même point. Au bout de* n *secondes après la chute du premier, ces deux corps sont éloignés de* d. *A quel moment a-t-on laissé tomber le second?*

Soit x le moment où on a laissé tomber le second corps.

Le premier a parcouru $\frac{g}{2} \cdot n^2$

et le second $\frac{g}{2} \cdot (n-x)^2$

La distance d qui les sépare est

$$d = \frac{g}{2}\left[n^2 - (n-x)^2\right]$$

qui donne $g \cdot x^2 - 2ngx + 2d = 0$

d'où $$x = \frac{ng \pm \sqrt{n^2g^2 - 2dg}}{g} = n \pm \sqrt{n^2 - \frac{2d}{g}}$$

La valeur négative du radical convient seule au problème, car x doit être inférieur à n.

Rép. $x = n - \sqrt{n^2 - \frac{2d}{g}}$.

Discussion. Pour que le problème soit possible, on doit avoir

$$n^2 - \frac{2d}{g} \geqq 0$$

d'où $$\frac{gn^2}{2} \geqq d$$

La seule condition de possibilité est donc que la différence d soit inférieure ou tout au plus égale à $g \cdot \frac{n^2}{2}$. Il en doit être ainsi, car $\frac{gn^2}{2}$ est précisément l'espace parcouru par le premier mobile. — Dans le cas où d égalerait $\frac{gn^2}{2}$, on aurait $x = n$. C'est-à-dire que le second mobile ne serait pas encore parti.

Application. L'application à la question numérique donnée fournit $$x = 10 - \sqrt{100 - \frac{2 \times 229{,}10}{9{,}8088}} = 2^s7$$

Rép. $2^s{,}7$.

Problème 188

Avec quelle vitesse faut-il lancer un corps verticalement de haut en bas pour qu'au bout de 3^s *il ait parcouru* 100^m ?

On a la relation (M., n° 188)

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

d'où l'on tire

$$v_0 = \frac{e - \frac{1}{2} gt^2}{t} = \frac{100 - \frac{1}{2} . 9{,}8088 \times 9}{3} = 18^{m}62$$

Rép. $18^{m}62$.

Problème 189

Quel espace parcourra, pendant la 19e *seconde de sa chute, un corps qui a parcouru* 200 *mètres pendant les six premières secondes ?*

Question générale. *Quel espace parcourra, pendant la* ne *seconde de sa chute, un corps qui a parcouru* l *mètres pendant les* n' *premières secondes ?*

On a, v_o étant la vitesse initiale de ce corps,

$$l = v_o n' + \frac{1}{2} g . n'^2 \qquad (1)$$

L'espace x parcouru pendant la n^e seconde est

$$x = \left[v_o (n) + \frac{1}{2} . g . (n^2)\right] - \left[v_o (n-1) + \frac{1}{2} g (n-1)^2\right]$$

$$= v_o + \frac{1}{2} g (2n - 1) \qquad (2)$$

En remplaçant dans (2), v_o par sa valeur tirée de (1), il vient

$$x = \frac{1}{n'} \left(l - \frac{1}{2} gn'^2\right) + \frac{1}{2} g (2n - 1)$$

$$x = \frac{l}{n'} + \frac{1}{2} g (2n - n' - 1)$$

Application. En faisant, ainsi que l'indique l'énoncé,

$$l = 200, \quad n' = 6, \quad n = 19$$

on obtient

$$x = \frac{200}{6} + \frac{1}{2} \times 9{,}8088 (38 - 6 - 1) = 185{,}397$$

Rép. $185^{m}397$.

Problème 190

Pendant combien de temps un corps abandonné à lui-même doit-il tomber pour parcourir 500^{m} *dans les deux secondes qui vont suivre ?* (Dijon, bacc., 1874.)

Question générale. *Pendant combien de temps un corps abandonné à lui-même doit-il tomber pour parcourir* l *mètres dans les* n *secondes qui vont suivre?*

Soit x ce temps, l'espace qui lui correspond est

$$g\frac{x^2}{2}$$

L'espace total correspondant au temps de chute $x + n$ est

$$g \cdot \frac{(n+x)^2}{2}$$

On aura donc

$$l = g \cdot \frac{(n+x)^2}{2} - g\frac{x^2}{2}$$

d'où

$$l = \frac{g}{2}(n^2 + 2nx)$$

qui donne

$$x = \frac{2l - gn^2}{2ng}$$

Rép. $x = \dfrac{2l - gn^2}{2gn}$.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il suffit que x soit positif, soit

$$2l - gn^2 \geqq 0$$

ou

$$l \geqq \frac{gn^2}{2}$$

Il suffit, en effet, que l soit plus grand que $\frac{gn^2}{2}$; mais cette condition est absolument nécessaire, car l'espace parcouru pendant n^s *consécutives* est au moins égal à l'espace $\frac{gn^2}{2}$, qui est celui parcouru pendant les *n premières secondes* de la chute.

Application. $x = \dfrac{2 \times 500 - 9{,}8088 \times 2^2}{2 \times 9{,}8088 \times 2} = 24^s48$

Problème 191

On lance une pierre du haut d'une falaise avec une vitesse de 2 *mètres par seconde; au bout de combien de temps atteindra-t-elle le niveau de l'eau, sachant que, si on la laisse tomber librement, elle l'atteint en* $2^s\frac{1}{2}$?

La hauteur de la falaise est

$$h = \frac{g \times \left(2\ \frac{1}{2}\right)^2}{2} \qquad (1)$$

Si x est le temps de chute, quand on lance le corps avec une vitesse de 2^m, on a

$$h = 2x + g \cdot \frac{x^2}{2} \qquad (2)$$

d'où, en égalant (1) et (2),

$$2x + g \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{g\left(2\ \frac{1}{2}\right)^2}{2}$$

ou $$4gx^2 + 16x - 25g = 0$$

d'où $$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 25g^2}}{2g} = 2{,}3$$

Le signe + du radical convient seul.

Rép. $x = 2^s{,}3$.

Problème 192

Un corps tombe librement d'une hauteur de 142^m ; *quand il a parcouru* 25^m, *on lance un autre corps de la même hauteur. Avec quelle vitesse a été lancé le second corps pour qu'il arrive au sol en même temps que le premier?* (Lille, bacc.)

Pour généraliser, remplaçons 142^m par h et 25^m par d.

Les temps mis par le 1er corps pour parcourir les distances h et d sont, d'après la formule $e = \frac{gt^2}{2}$,

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

Le second corps doit parcourir la hauteur h dans un temps représenté par la différence

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{h} - \sqrt{d}\right)$$

La formule $e = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ (M., n° 188) appliquée au se-

cond corps, lancé avec la vitesse que l'on cherche, devient

$$h = x\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{h} - \sqrt{d}) + \frac{1}{2}g \cdot \frac{2}{g}(\sqrt{h} - \sqrt{d})^2$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{h - (\sqrt{h} - \sqrt{d})^2}{\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{h} - \sqrt{d})} = \frac{\sqrt{d}\,(2\sqrt{h} - \sqrt{d})}{\sqrt{\frac{2}{g}}\,(\sqrt{h} - \sqrt{d})}$$

Rép. $x = \sqrt{\frac{gd}{2}} \times \frac{2\sqrt{h} - \sqrt{d}}{\sqrt{h} - \sqrt{d}}$.

Discussion. La valeur de x doit être positive, ce qui exige que d soit inférieur à h.

Cas particuliers. 1° Si $d = 0$, on trouve

$$x = \sqrt{\frac{g \times 0}{2}} \times \frac{2\sqrt{h} - 0}{\sqrt{h} - 0} = 0$$

C'est qu'en effet, si $d = 0$, le premier corps n'aurait rien parcouru quand on *lancerait* le second ; il ne faut donc pas *lancer* ce second corps, mais le laisser tomber, ce qui justifie cette vitesse nulle que l'on trouve.

2° Si $d = h$, la valeur de x devient *infinie*.

Dans ce cas, le 1er corps est au bas quand on lance le second ; celui-ci devrait donc être lancé avec une vitesse infinie, ce qui signifie que la question est impossible.

Application. En prenant les valeurs numériques de l'énoncé, on trouve $x = \frac{\sqrt{4{,}9044 \times 25}\,(2\sqrt{142} - 5)}{\sqrt{142} - 5}$

Rép. $30^{m}15$.

Problème 193

On laisse tomber deux corps, sans vitesse initiale, de deux points situés sur une même verticale à une distance d ; *le plus élevé est parti* ts *avant l'autre; pendant combien de temps le second sera-t-il tombé quand le premier le rencontrera?*

Soit x le temps employé par le second corps pour arriver au point de rencontre.

Le premier corps a parcouru un espace

$$\frac{g}{2}(t+x)^2$$

et le second B, un espace

$$\frac{g}{2}x^2$$

Or la différence de ces espaces étant d, on a

$$d=\frac{g}{2}(t+x)^2-\frac{g}{2}x^2=\frac{g}{2}(t^2+2tx)$$

d'où $$x=\frac{2d-gt^2}{2gt}$$

Rép. $x=\dfrac{2d-gt^2}{2gt}$.

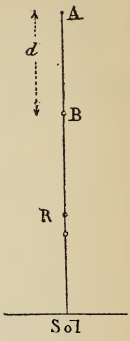


Fig. 287.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que x soit positif, c'est-à-dire que l'on ait

$$2d-gt^2 \geqq 0$$

ou $$d \geqq \frac{gt^2}{2}$$

Remarquons que $\dfrac{gt^2}{2}$ est l'espace parcouru pendant t^s ; il faut donc que la distance d des deux points soit supérieure à cet espace, ce qui doit être, sans quoi le premier corps aurait déjà dépassé le second, et ce second, qui part sans vitesse initiale, ne pourrait jamais l'atteindre.

Cas particuliers. Si $d=\dfrac{gt^2}{2}$, $x=0$

Ce résultat se justifie aisément si on remarque que le premier corps est juste vers le second après le temps t.

Problème 194

Deux corps tombent de deux points A *et* B *situés sur une même verticale à une distance* d ; *ils ont été lancés avec des vitesses initiales* a *et* a', *le plus haut part* t^s *avant l'autre.*

1° *Au bout de combien de temps se rencontreront-ils?*

2° *A quelle distance de* B *se trouvera le point de rencontre?*

1° Soit x le temps que mettra le second pour arriver au point de rencontre R ; on a

$$AR = a(t+x) + \frac{1}{2}g(t+x)^2$$

et

$$BR = a'x + \frac{1}{2}gx^2$$

d'où, en retranchant

$$AB = d = a(t+x) - a'x + \frac{1}{2}g(t^2+2tx)$$

on en tire

$$x = \frac{\frac{1}{2}gt^2 + at - d}{a' - a - gt} = \frac{d - \left(at + \frac{1}{2}gt^2\right)}{a + gt - a'}$$

Fig. 288.

Rép. Le temps auquel se fera la rencontre est

$$x = \frac{d - \left(at + \frac{1}{2}gt^2\right)}{a + gt - a'} \qquad (1)$$

2° Le point de rencontre R se trouve à une distance BR qui est

$$BR = a'x + \frac{1}{2}gx^2$$

Il suffit de remplacer x par la valeur trouvée précédemment.

2e Solution. Au moment du départ, nous pouvons considérer le second corps comme immobile, en donnant à tout le système un mouvement égal et de sens contraire à celui qu'aurait eu ce second mobile.

A ce moment la vitesse absolue du premier mobile est $a + gt$.

Sa vitesse relative est donc $(a + gt) - a'$ et son mouvement est devenu uniforme.

Il a déjà parcouru $at + \frac{1}{2}gt^2$

Il lui reste à parcourir $d - \left(at + \frac{1}{2}gt^2\right)$

Et comme le mouvement est uniforme, le temps x qu'il mettra à le parcourir sera

$$x = \frac{d - \left(a + \frac{1}{2}gt\right)t}{(a + gt) - a'}$$

Discussion. Nous discutons d'abord le problème en prenant l'énoncé à la lettre ; nous supposons que les corps *partent* des points A et B et qu'ils tombent. Par là, on écarte tout un ordre de solutions possibles.

La question ainsi posée, x doit être positif.

Remarquons d'abord que $at + \frac{1}{2} gt^2$ est l'espace parcouru par le mobile A pendant le temps d'avance t, et que $a + gt$ est la vitesse acquise au bout de ce même temps.

Désignons par e_t et v_t cet espace et cette vitesse ; la formule

(1) devient $$x = \frac{d - e_t}{v_t - a'}$$

Conditions de possibilité. x doit être positif, ce qui exige que l'on ait simultanément

$$\left.\begin{array}{l} d - e_t > 0 \\ \text{et} \quad v_t - a' > 0 \end{array}\right\} \quad (1) \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} d > e_t \\ a' < v_t \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ou bien} \quad d - e_t < 0 \\ \qquad\quad v_t - a' < 0 \end{array}\right\} \quad (2) \quad \text{d'où} \quad \begin{array}{l} d < e_t \\ a' > v_t \end{array}$$

1° Examinons les relations (1). L'inégalité $d > e_t$ indique que le mobile A n'a pas atteint B au bout du temps t ; pour qu'il l'atteigne dans la suite, il faut que sa vitesse à cet instant, c'est-à-dire v_t, soit supérieure à a' ; c'est ce qu'indique la deuxième inégalité.

2° Les relations (2) montrent que la distance d est inférieure à e_t, espace parcouru par le mobile A pendant le temps t ; il faut, pour que la rencontre ait lieu, que l'on ait $a' > v_t$.

Cas particuliers. En recherchant les conditions de possibilité, nous avons examiné les cas où d est différent de e_t ; il nous reste à faire l'hypothèse de $d = e_t$.

La valeur de x se présente alors sous la forme

$$x = \frac{0}{v_t - a'}$$

1° Si l'on a $v_t \gtrless a'$, on a $x = \frac{0}{m} = 0$

Cette valeur se justifie aisément si l'on remarque que l'égalité $d = e_t$ indique que A est en B au bout du temps t, et comme les vitesses a' et v_t sont différentes, les deux corps se séparent pour ne plus se rencontrer.

2° Si $v_t = a'$, alors $x = \frac{0}{0}$

Cette valeur indéterminée de x se conçoit ; au bout du temps t,

les mobiles A et B sont ensemble en B, et à partir de là ils cheminent avec la même vitesse.

Remarque. On peut encore, avec $d \lesseqgtr e_t$, examiner le cas où $a' = v_t$; la valeur de x devient $x = \frac{m}{0} = \infty$, et il doit en être ainsi; car, au bout du temps t, A n'est pas en B, et à partir de ce moment, chacun des corps cheminant avec la même vitesse, la rencontre n'aura jamais lieu.

Généralisation. Afin de compléter cette question, l'on pourrait y rattacher quelques cas intéressants que fournirait l'énoncé légèrement modifié.

Ainsi le problème indique que les corps *tombent*, ce qui suppose que les vitesses initiales a et a' sont dirigées de haut en bas, et l'on peut considérer ces vitesses dans l'autre sens; il est dit encore que les mobiles sont *lancés*, ce qui écarte les mouvements antérieurs à l'origine du temps : on peut aussi les considérer.

Afin de donner aux formules toute leur généralité, nous allons convenir que les vitesses de haut en bas sont positives, que les espaces comptés au-dessous de B sont également positifs, et que d est positif quand A est au-dessous de B.

On trouvera comme précédemment :

1° *Pour le temps auquel se fera la rencontre*

$$x = \frac{d - \left(at + \frac{1}{2}gt^2\right)}{(a + gt) - a'} = \frac{d - e_t}{v_t - a'} \qquad (1)$$

2° *Pour la distance de la rencontre au point* B

$$\mathrm{BR} = a'x + \frac{1}{2}gx^2 \qquad (2)$$

Discussion. La valeur du temps $x = \frac{d - e_t}{vt - a'}$ est susceptible de passer par tous les états de grandeur, et, dans tous les cas, il y aura une solution du problème.

La question précédente étudie un des cas du problème et en partie seulement; nous allons en examiner successivement quelques autres.

I. Supposons a' négatif, c'est-à-dire que les deux mobiles aillent l'un vers l'autre; nous aurons, en changeant a' en $-a'$ dans les formules (1) et (2),

$$x = \frac{d - e_t}{vt + a'}$$

et

$$\mathrm{BR} = \frac{1}{2}gx^2 - a'x$$

1° Si l'on a $d < e_t$, x est négatif, ce qui indique que la rencontre a déjà eu lieu; elle s'est faite pendant le mouvement ascendant du mobile B avant qu'il arrive au point B.

La figure 289 indique ce résultat. Nous donnerons ici quelques détails sur ces sortes de courbes, ce qui nous permettra d'être plus bref dans la suite.

La parabole R_1BST est la ligne représentative du mouvement du mobile B; la vitesse a' n'est autre que tg α'.

Le mobile A est lancé du point A, t secondes avant B, avec une vitesse a. En faisant $BN = t'$ et tg $\alpha = a$, la courbe représentative de son mouvement est la parabole JKA_1R_1.

Puisque l'on a $e < et$, et étant l'espace parcouru par le mobile A dans le temps t, ce mobile sera descendu pendant ce temps d'une hauteur A_1M' supérieure à A_1N ou d; dès lors les deux courbes se couperont en un point R_1 qui correspondra à un temps $R'B$ négatif, ce qui est conforme au résultat donné par la formule (3).

2° Si l'on a $d > et$, les deux courbes présentent la disposition de la fig. 290 qui montre que x est positif, résultat indiqué aussi par la formule (3).

3° Si $d = et$, on a $x = 0$; la rencontre se fait en B.

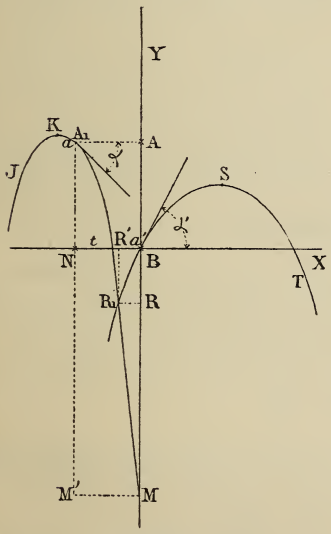


Fig. 289.

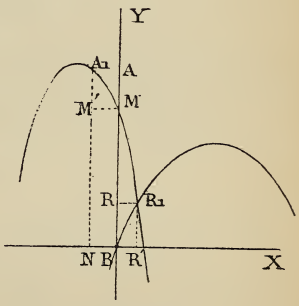


Fig. 290.

Cas particuliers. 1° Si l'on a $a = 0$, $a' = 0$, les formules deviennent celles du problème 193.

2° Avec $a = 0$, on a à résoudre une question analogue à celle du probl. 207.

3° Pour $t = 0$, on retombe sur la question du probl. 208; nous l'étudierons plus loin en discutant les résultats.

II. Supposons $a > 0$, $a' < 0$, et de plus d négatif; alors le mobile A est au-dessous du mobile B, le premier descend, le second monte.

Les formules (1) et (2) deviennent

$$x = \frac{-d - et}{v + a'}, \quad BR = \frac{1}{2} gx^2 - a'x$$

La valeur du temps x est toujours négative, ce qui prouve que la rencontre a toujours eu lieu avant le temps pris pour origine.

La figure 291 montre qu'il en est réellement ainsi.

Cette question se rapporte à celle du nº 208, dans laquelle on considérerait des mouvements antérieurs au temps pris pour origine.

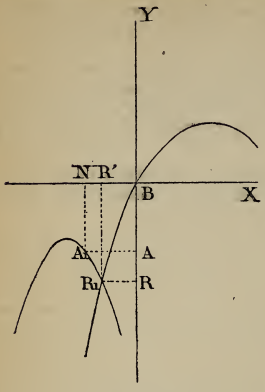


Fig. 291.

Remarque. On voit par ce que nous venons de dire combien est intéressante l'étude d'une question quand on l'envisage sous ses différents aspects. Nous n'avons signalé ici que quelques points principaux. Pour terminer l'étude de ce problème, on pourrait :

1º Reprendre le premier cas étudié, en considérant les valeurs négatives qui correspondent à des mouvements antérieurs au temps pris pour origine.

2º Compléter chacun des cas généraux par des cas particuliers, en faisant successivement diverses hypothèses sur d et sur t.

Problème 195

A quelle hauteur s'élèvera un corps lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse de 100m? *Combien aura-t-il parcouru de mètres pendant la première seconde de son mouvement?*

La hauteur h est donnée par la formule (M., nº 197)

$$h = \frac{a^2}{2g}$$

a étant la vitesse initiale.

Et l'espace parcouru pendant les t premières secondes est (M., nº 197)

$$h_1 = at - \frac{gt^2}{2}$$

Rép. 1º $h = \frac{a^2}{2g}$, $h = \frac{\overline{100}^2}{2 \times 9{,}8088} = 509^{m}68.$

2º $h_1 = at - \frac{gt^2}{2}$, $h_1 = 100 - \frac{9{,}8088}{2} = 95^{m}095.$

Problème 196

On demande avec quelle vitesse devrait être lancé verticalement un boulet de canon pour qu'il pût s'élever à une hauteur de 400 *mètres, abstraction faite de la résistance de l'air.*

Quel serait l'intervalle entre le départ et la chute? (Clermont, conc. acad., 1874.)

1° La hauteur h d'élévation d'un corps est liée à sa vitesse initiale par la relation (M., n° 197)

$$v_o = \sqrt{2gh}$$

2° Le temps de l'ascension est fourni par la formule

$$t = \frac{v_o}{g} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

Rép. 1° $v_o = \sqrt{2gh}$, $v_o = \sqrt{2 \times 9{,}8088 \times 400} = 88^m58.$

2° $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $t = \sqrt{\frac{2 \times 400}{9{,}8088}} = 18^s06.$

Problème 197

Un boulet de canon a été lancé verticalement avec une vitesse de 250 mètres; au bout de combien de temps sa vitesse sera-t-elle réduite à 50 mètres sous l'influence de la pesanteur? Quel est l'espace que le boulet aura parcouru?

1° La vitesse, dans un mouvement retardé (M., n° 187), est

$$v = v_o - gt$$

d'où

$$t = \frac{v_o - v}{g} \qquad (1)$$

C'est le temps nécessaire pour que la vitesse devienne v.

2° L'espace parcouru par le boulet est (M., n° 189)

$$h_1 = v_o t - \frac{gt^2}{2} = t\left(v_o - \frac{gt}{2}\right)$$

En remplaçant t par sa valeur (1), on obtient

$$h_1 = \frac{v_o - v}{g}\left(v_o - \frac{v_o - v}{2}\right) = \frac{(v_o^2 - v^2)}{2g}$$

Remarque. On peut observer que cette valeur de h_1 aurait pu être posée directement, puisque $\frac{v_o^2}{2g}$ est l'expression de la hauteur totale que peut parcourir le boulet, et $\frac{v^2}{2g}$ celle qu'il doit franchir pour acquérir la vitesse v.

Rép.

1° $t = \frac{v_o - v}{g}$, $t = \frac{250 - 50}{9{,}8088} = 20^s39.$

2° $h_1 = \frac{v_o^2 - v^2}{2g}$, $h_1 = \frac{(250^2 - 50^2)}{2 \times 9{,}8088} = 3058^m47.$

Problème 198

On lance un projectile verticalement; exprimer, en fonction de l'intensité g *de la pesanteur et de sa vitesse initiale* v_0, *le temps qu'il met pour atteindre la moitié de la hauteur du point le plus élevé de sa course.* (Dijon, bacc., 1879.)

La course entière est (M., nº 197)

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

Si x désigne le temps mis à parcourir la moitié de h, on aura (M., nº 197)

$$\frac{h}{2} = v_o x - g\frac{x^2}{2}$$

ou

$$\frac{g}{2}x^2 - v_o x + \frac{h}{2} = 0$$

d'où

$$x = \frac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 - gh}}{g}$$

Les deux valeurs conviennent. Si on prend la valeur correspondante au signe positif, on trouve le temps où le corps, après avoir atteint le point le plus élevé, est revenu au milieu de la course; mais, en réalité, c'est la valeur correspondant au signe négatif qui répond directement au problème.

On peut remarquer que x est toujours réel, car on a toujours

$$v_o^2 - gh > 0$$

puisque

$$h = \frac{v_o^2}{2g}$$

Rép. $x = \dfrac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 - gh}}{g} = \dfrac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 - g \cdot \frac{v_o^2}{2g}}}{g} = \dfrac{v_o(2 \pm \sqrt{2})}{2g}$

Problème 199

Une bombe lancée de bas en haut est revenue au point de départ au bout de t *secondes; quelle était sa vitesse initiale? A quelle hauteur s'est-elle élevée?*

La durée de l'ascension est $\frac{t}{2}$ secondes.

1º Si v_o désigne la vitesse initiale, on a (M., nº 197)

$$\frac{t}{2} = \frac{v_o}{g}\ ; \text{ d'où } v_o = \frac{gt}{2}$$

2° La hauteur h à laquelle s'est élevé le mobile est

$$h = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{\frac{g^2t^2}{4}}{2g} = \frac{1}{8}gt^2$$

Rép. $v_o = \frac{gt}{2}$, $h = \frac{1}{8}gt^2$.

Problème 200

Un individu placé à 60 mètres de hauteur voit passer devant lui un corps lancé de bas en haut, et 8 secondes plus tard il le voit de nouveau. A quelle hauteur s'est élevé le corps? Avec quelle vitesse a-t-il été lancé?

Soit x la hauteur d'élévation du corps au-dessus du sol, et v_o la vitesse initiale.

Le temps t_1 mis pour atteindre 60m est donné par

$$60 = v_o t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$$

d'où l'on tire $$\frac{g}{2}t_1^2 - v_o t_1 + 60 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 - 2 \times 60g}}{g}$$

Remarquons, ainsi que nous l'avons déjà dit dans le problème précédent, que la racine correspondant au signe négatif indique le temps mis pour atteindre 60m en montant, et la racine correspondant au signe positif, le temps mis pour aller jusqu'au haut et revenir à la hauteur de 60m.

Comme la différence de ces deux racines doit égaler 8 secondes, l'on aura $$8 = \frac{2\sqrt{v_o^2 - 2 \times 60 \,.\, g}}{g}$$

d'où l'on tire $$8^2 \,.\, g^2 = (v_o^2 - 2 \times 60g)$$

d'où $$v_o = \sqrt{\frac{8^2 \,.\, g^2 + 8 \times 60g}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{8^2 \,.\, g^2 + 8 \times 60g}$$

Rép. $v_o = 52^m12$, $h = 138^m47$.

En généralisant, soit h_1 la hauteur 60m, t_1 les 8 secondes, on a

$$v_o = \frac{1}{2}\sqrt{g^2t_1^2 + 8gh_1} = \frac{1}{2}\sqrt{g\,(gt_1^2 + 8h_1)}$$

Le corps s'élève à la hauteur

$$h = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{1}{8}(gt_1^2 + 8h_1) = h_1 + \frac{1}{8}gt_1^2$$

Rép. Hauteur $h = h_1 + \frac{1}{8}gt_1^2$.

Vitesse $v_o = \frac{1}{2}\sqrt{g(gt_1^2 + 8h_1)}$.

Problème 201

On lance un projectile de bas en haut avec une vitesse de 25 mètres par seconde. On demande au bout de combien de temps il se trouvera à 12 mètres au-dessus de son point de départ. (Angers, dipl. Ens. sp., 1879.)

On a la relation (M., n° 197, 2°)

$$h = at - \frac{gt^2}{2}$$

entre la hauteur h parcourue pendant un temps t et la vitesse initiale a.

En résolvant par rapport à t, il vient

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2gh}}{g}$$

Application. $t = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 2 \times 9{,}8088 \times 12}}{9{,}8088} = \frac{25 \pm 19{,}7}{9{,}8088}$

Les deux racines conviennent.

1re Rép. $x' = 0^s54$,

c'est le temps pour arriver à 12^m en montant.

2e Rép. $x'' = 4^s56$,

c'est le temps mis par le projectile pour atteindre le haut de sa course, puis redescendre à 12 mètres.

Remarque. La somme des deux temps $x' + x''$ n'est autre que le temps T mis par le projectile pour revenir au point de départ, c'est-à-dire deux fois le temps t' mis pour monter ; or ce dernier temps est $t' = \frac{a}{g}$

pour le cas donné $t' = \frac{25}{9{,}8088}$

d'où $$T = 2t' = \frac{50}{9,8088} = 5^s1$$

Or on a $$x' + x'' = 0^s54 + 4^s56 = 5^s10$$

Problème 202

Un corps est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse v ; *au bout de combien de temps sera-t-il à une hauteur* h ?

Discuter la formule.

Le corps, en s'élevant, a un mouvement uniformément retardé. On a donc (M., nº 189)

$$h = vt - \frac{1}{2} gt^2$$

ou $$gt^2 - 2vt + 2h = 0 \qquad (1)$$

d'où $$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{g}$$

Discussion. — *Conditions de possibilité.* La valeur de t ne sera réelle que si l'on a

$$v^2 - 2gh \geqq 0$$

d'où $$h \leqq \frac{v^2}{2g}$$

La hauteur donnée h ne peut donc être supérieure à $\frac{v^2}{2g}$, qui est le *maximum* de la hauteur que peut atteindre un mobile lancé verticalement avec une vitesse initiale v.

Le mobile atteint cette hauteur maximum au bout du temps

$$t = \frac{v}{g}$$

Ces résultats ont été obtenus dans les *Éléments* (M., nº 197), en se basant sur la formule de la vitesse.

Examen des deux valeurs. Pour toute valeur de h plus petite que le maximum, on trouve pour t deux valeurs. Nous allons examiner les divers cas qui se présentent.

1º $h > 0$. Les deux valeurs de t sont positives et conviennent toutes les deux ; la plus petite correspond à la montée du corps, l'autre à l'instant où, après être arrivé au point culminant, le

corps en descendant passe de nouveau au point déterminé par la hauteur h.

La somme de ces deux valeurs de t est égale à $\frac{2v}{g}$, ainsi que le montre l'équation (1) : c'est le temps qu'il faut au mobile pour revenir au point de départ.

2° $h = 0$. On trouve $t = \frac{v \pm v}{g}$

La valeur $t = 0$ correspond à l'instant du départ. L'autre $t = \frac{2v}{g}$ donne le temps que le mobile met pour revenir au point de départ. Cette valeur étant le double de $\frac{v}{g}$, temps que met le mobile pour arriver au point culminant, on voit que la durée de la montée est la même que celle de la descente.

2° $h < 0$. Le mobile descend alors au-dessous du point de départ. La formule devient, en faisant h négatif,

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 2gh}}{g}$$

On trouve pour t deux valeurs, l'une positive, l'autre négative. La valeur positive répond à la question ; elle est plus grande que $\frac{2v}{g}$; et, en effet, le mobile, revenu au point de départ, continue encore à descendre pour arriver au point donné.

La valeur négative ne répond pas à la question telle qu'elle est énoncée, mais à une question plus générale indiquant que le mobile était en mouvement avant de passer au point où il possède la vitesse v. Alors la solution négative indique à quel instant, avant d'arriver à ce point, le mobile se trouvait au point considéré.

Problème 203

Montrer qu'un mobile en chute libre a la même vitesse lorsqu'il est à la même hauteur, soit en montant, soit en descendant.

Quand le corps s'élève et qu'il arrive au point situé à une hauteur h au-dessus du point de départ, sa vitesse est donnée par la formule (M., n° 197)

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \qquad (1)$$

Le mobile arrivé à son point culminant, c'est-à-dire à une

hauteur $\frac{v_o^2}{2g}$, redescend sous l'action de la pesanteur seule ; arrivé au point considéré, il est tombé d'une hauteur

$$\frac{v_o^2}{2g} - h$$

La vitesse est donnée par la formule (M., nº 197)

$$v = \sqrt{2ge}$$

qui devient
$$v = \sqrt{2g\left(\frac{v_o^2}{2g} - h\right)}$$

ou
$$v = \sqrt{v_o^2 - 2gh} \qquad (2)$$

ce qui prouve que le mobile a la même vitesse en un point donné, soit en montant, soit en descendant.

Problème 204

A quelle distance du point de départ se rencontreront deux corps lancés de bas en haut, à 4 secondes d'intervalle, avec une vitesse de 100 mètres ?

Question générale. *Les deux corps sont lancés à* t *secondes d'intervalle, avec une vitesse* v_o.

Soit n secondes le temps qu'a mis le deuxième corps pour arriver au point de rencontre, distant de x du point de départ. On a (M., nº 197, 2º)

$$x = v_o n - g\frac{n^2}{2} \qquad (1)$$

Le premier mobile fournit la relation

$$x = v_o(n + t) - g\frac{(n + t)^2}{2} \qquad (2)$$

qui donne l'équation

$$v_o n - g\frac{n^2}{2} = v_o(n + t) - g\frac{(n + t)^2}{2} \qquad (3)$$

de laquelle on tire n; cette valeur mise dans (1) donne x.

La relation (3) devient, en effet,

$$v_o t - \frac{g}{2}(2nt + t^2) = 0 \qquad (4)$$

d'où
$$v_o - \frac{g}{2}(2n + t) = 0$$

et
$$n = \frac{v_o - \frac{gt}{2}}{g} = \frac{v_o}{g} - \frac{t}{2} \qquad (5)$$

La relation (1) donne

$$x = n\left(v_o - \frac{g}{2}n\right)$$

$$x = \left(\frac{v_o}{g} - \frac{t}{2}\right)\left[v_o - \frac{g}{2}\left(\frac{v_o}{g} - \frac{t}{2}\right)\right] = \left(\frac{v_o}{g} - \frac{t}{2}\right)\left(\frac{v_o}{2} + \frac{gt}{4}\right)$$

$$x = \frac{g}{2}\left(\frac{v_o^2}{g^2} - \frac{t^2}{4}\right)$$

Discussion. Avant de discuter cette question, remarquons que la division par t, que nous avons opérée dans la relation (4), n'est permise que si le temps n'est pas *nul*. Nous aurons occasion de profiter de cette remarque.

I. *Le point de départ est sur le sol.* — Si le point de départ est sur le sol, les valeurs négatives de x ne sont pas admissibles, et on doit avoir

$$\frac{v_o^2}{g^2} \geqq \frac{t^2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{v_o}{g} \geqq \frac{t}{2}$$

Or $\frac{v_o}{g}$ est le temps T que met chacun des corps pour atteindre le sommet de sa course ; il faut donc que l'on ait $t \leqq 2T$, c'est-à-dire que le temps qui doit s'écouler entre les départs des deux corps doit être plus petit que celui que met l'un d'eux pour revenir au point de départ, ce qui se conçoit très bien.

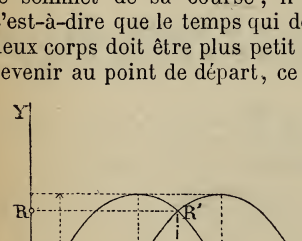


Fig. 292.

Pour rendre ce résultat plus sensible, représentons par OY la trajectoire verticale du mobile, et prenons OX pour axe des temps et traçons les courbes représentatives des deux mouvements. Leur point d'intersection R′ détermine le point de rencontre R.

Les deux courbes se coupent tant que l'on a

$$OD < OE \quad \text{ou} \quad t < 2T$$

ce qui est la condition trouvée.

Remarque. Les ordonnées maximum de ces courbes donnent la hauteur maximum H qu'atteignent les deux mobiles ; on a

$$H = \frac{v_o^2}{2g} \qquad \text{(M., n° 197, 2°)}$$

II. *Les corps passent au point donné avec la vitesse* v_0.

Dans ce cas, le point donné est au-dessus du sol, et toutes les valeurs de x sont acceptables.

Si x est positif, c'est-à-dire si l'on a $t \leqq 2T$, la rencontre se fait au-dessus du point de départ. Elle aura eu lieu dans un temps antérieur si n est positif.

Au contraire, si l'on a $t \geqq 2T$, x sera négatif, et la rencontre aura lieu au-dessous du point de départ et dans les mêmes conditions de temps que précédemment.

La fig. 293 donne la rencontre R alors qu'elle se fait au-dessous du point de départ ; on peut remarquer que l'on a

$$OD > OE \quad \text{ou} \quad t > 2T$$

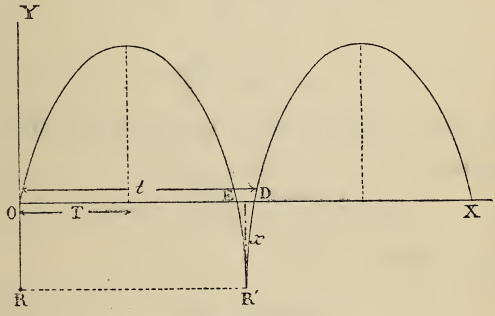


Fig. 293.

Cas particuliers. 1° $\mathbf{t = 0}$. Dans ce cas, les deux mobiles partant en même temps devraient constamment être ensemble, et la valeur de x devrait se présenter sous une forme indéterminée ; cependant elle fournit $x = \frac{v_0^2}{2g} = H$. Cette valeur de x convient, elle indique que les deux mobiles seront au point culminant en même temps ; mais comme elle n'est pas la seule, il y a une anomalie qui disparaît si l'on fait attention à la remarque déjà présentée en tête de cette discussion, que l'on n'avait pas le droit de diviser par t alors que $t = 0$.

2° $\mathbf{t = T}$, c'est-à-dire $\quad t = \frac{v_0}{g}$

Alors $$x = \frac{g}{2}\left(\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{v_0^2}{4g^2}\right) = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{2g} = \frac{3}{4}H$$

Ce résultat peut se déduire des considérations géométriques

faites sur la fig. 294, si l'on remarque que N est le milieu de MM′ et par suite que

$$N_1R' = \frac{1}{4} NN_1 \qquad \text{(G., n° 700.)}$$

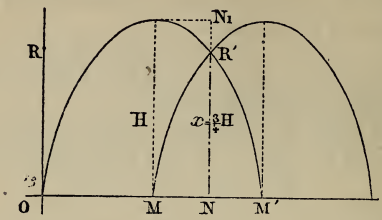


Fig. 294.

3° $$t = 2T = \frac{2v_o}{g}$$

Alors $x = 0$. Résultat qui se justifie très aisément.

Application. $v_o = 100^m$, $t = 4^s$

$$x = \frac{g}{2}\left(\frac{100^2}{g^2} - \frac{4^2}{4}\right) = 490^m13$$

Rép. 490^m13.

Problème 205

Un corps lancé verticalement t^s *après un autre, le rencontre à une hauteur* h ; *ils ont été lancés avec la même vitesse : quelle est cette vitesse?*

Soit A le premier corps lancé, B le second.

Il y a plusieurs cas à considérer :

1° Les deux corps n'ont pu être lancés vers le bas, à moins que t ne soit nul.

2° Tous les deux ont pu être lancés de bas en haut, c'est en particulier le cas de deux corps partant du sol.

3° L'un a pu être lancé vers le haut, l'autre vers le bas.

Nous allons examiner les cas 2° et 3° seuls possibles*.

---

* Nous supposons que les corps sont réellement *lancés*, c'est-à-dire n'ont pas de mouvement antérieur.

On aurait pu les considérer comme passant au point donné avec la vitesse

I. *Les corps sont lancés de bas en haut.*

Soit h la distance du point de rencontre au point de départ, n le temps qu'a mis B pour y parvenir, et x la vitesse initiale cherchée ; on aura, pour le corps B,

$$h = xn - g\frac{n^2}{2} \qquad (1)$$

pour le corps A,

$$h = x(n+t) - \frac{g}{2}(n+t)^2 \qquad (2)$$

De ces égalités on tire

$$n = \frac{x - \frac{gt}{2}}{g} = \frac{x}{g} - \frac{t}{2} \qquad (3)$$

En portant la valeur de n dans (1), il vient

$$h = n\left(x - \frac{gn}{2}\right) = \left(\frac{x}{g} - \frac{t}{2}\right)\left[x - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{g} - \frac{t}{2}\right)\right]$$

En simplifiant, $$h = \frac{g}{2}\left(\frac{x^2}{g^2} - \frac{t^2}{4}\right)$$

d'où $$x = \pm\sqrt{2gh + \frac{g^2t^2}{4}}$$

La valeur positive du radical convient seule.

II. *Un des corps est lancé vers le haut, l'autre vers le bas.*

Il est évident que ce n'est pas le premier corps qui peut être lancé vers le bas, le deuxième l'étant vers le haut, car la rencontre ne pourrait jamais avoir lieu.

Si le premier corps est lancé vers le haut, et le second vers le bas, le problème n'est possible que dans un seul cas, c'est lorsque la hauteur h est nulle, et alors la vitesse $x = \frac{gt}{2}$; le corps A revient au point de départ au bout du temps t, avec la vitesse $v = \frac{gt}{2}$ au moment où le corps B part avec cette même vitesse.

---

qu'il faut déterminer, en sorte qu'il y aurait lieu de s'occuper de ce qui se serait passé dans un temps antérieur à celui pris pour origine, ainsi qu'on l'a fait dans le problème précédent.

Problème 206

Deux mobiles sont lancés de bas en haut au même instant, l'un avec la vitesse a, *l'autre avec la vitesse* b. *On demande après combien de temps la somme des carrés de leur vitesse aura sa valeur minimum.* (Paris, bacc., 1877.)

Au bout du temps x les vitesses seront

$$v = a - gx$$
$$v' = b - gx$$

La somme m de leurs carrés est :

$$m = (v^2 + v'^2) = (a - gx)^2 + (b - gx)^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2gx(a + b) + 2g^2x^2$$

d'où $$2g^2x^2 - 2g(a + b)x + (a^2 + b^2) - m = 0$$

On en tire

$$x = \frac{g(a + b) \pm \sqrt{g^2(a + b)^2 - 2g^2(a^2 + b^2 - m)}}{2g^2}$$

d'où $$x = \frac{a + b \pm \sqrt{2m - (a - b)^2}}{2g}$$

Pour que x soit réel, on doit avoir

$$m \geq \frac{(a - b)^2}{2}$$

La valeur minimum de la somme des carrés des vitesses sera

$$\frac{(a - b)^2}{2}$$

Elle aura lieu pour le temps

$$x = \frac{a + b}{2g}$$

Problème 207

Au moment où un mobile tombe d'une hauteur de 200 *mètres, on lance un autre mobile de bas en haut suivant la même verticale. Quelle doit être la vitesse initiale du second mobile pour que la rencontre ait lieu à la hauteur de* 100 *mètres?* (Bordeaux, dipl. Ens. sp., 1879.)

Généralisons la question en désignant par H la hauteur de

laquelle tombe le corps, la rencontre devant avoir lieu à la hauteur $\frac{H}{2}$.

Pour parcourir $\frac{H}{2}$, le premier corps, tombant sans vitesse initiale, mettra un temps donné par la relation

$$\frac{H}{2} = \frac{gt^2}{2}$$

d'où

$$t^2 = \frac{H}{g}$$

Le second, lancé avec une vitesse initiale x, donnera l'equation

$$\frac{H}{2} = xt - \frac{gt^2}{2}$$

qui devient, en remplaçant t par sa valeur,

$$\frac{H}{2} = \sqrt{\frac{H}{g}} \times x - g\,\frac{H}{2g} = \sqrt{\frac{H}{g}} \times x - \frac{H}{2}$$

d'où

$$x = \sqrt{gH}$$

Application. La vitesse initiale $= \sqrt{g\,.\,200} = 44{,}29$.

Rép. 44^m29.

Problème 208

Deux mobiles M *et* N *situés sur la même verticale sont lancés sur cette verticale, le premier avec la vitesse* v_1 *de bas en haut, le deuxième avec la vitesse* v^2 *de haut en bas. On suppose* MN = d. *On demande le lieu et le temps de la rencontre. — Discussion.*

Application. $d = 100^m$, $v_1 = 20^m$, $v_2 = 30^m$. (Bordeaux, dipl. Ens. sp., 1877.)

Le problème pourrait se concevoir de deux manières :

1° Le mobile lancé de bas en haut part d'un point M situé au-dessous du point N (fig. 295).

2° Le point M, au contraire, est au-dessus du point N (fig. 295); mais il est aisé de voir que la rencontre est impossible ; nous n'avons donc à étudier que le premier cas.

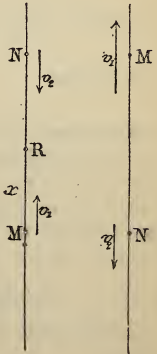


Fig. 295.

Soit x (fig. 296) la distance du point de rencontre au point M, et y le temps mis pour atteindre ce point.

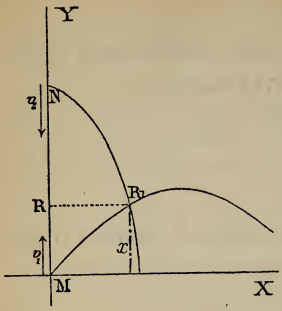


Fig. 296.

Le mouvement du mobile M donne l'équation

$$x = v_1 y - g\frac{y^2}{2} \qquad (1)$$

celui de N fournit

$$d - x = v_2 y + g\frac{y^2}{2} \qquad (2)$$

En éliminant x, on a

$$y = \frac{d}{v_1 + v_2}$$

Dès lors (1) devient

$$x = y\left(v_1 - \frac{gy}{2}\right) = \frac{d}{v_1 + v_2}\left(v_1 - \frac{gd}{2} \times \frac{1}{v_1 + v_2}\right)$$

et l'on a $$x = d\left(\frac{v_1}{v_1 + v_2} - \frac{\frac{gd}{2}}{(v_1 + v^2)^2}\right)$$

Réponses :

1° Distance du point de rencontre à M

$$x = d\left(\frac{v_1}{v_1 + v_2} - \frac{\frac{gd}{2}}{(v_1 + v_2)^2}\right) = \frac{d\left[2v_1(v_1 + v_2) - gd\right]}{2(v_1 + v_2)^2}$$

2° Temps $$y = \frac{d}{v_1 + v^2}$$

Remarque. La valeur du temps peut se trouver directement, en raisonnant ainsi : La pesanteur *seule* fait autant descendre M que N, il n'y a donc pas à s'en occuper dans la recherche du *temps* de la rencontre ; à chaque seconde les deux corps se rapprochent de $v_1 + v_2$; comme ils sont séparés par une distance d, il leur faudra, pour se rencontrer, un temps $\frac{d}{v_1 + v_2}$, résultat déjà trouvé.

Connaissant le temps, on trouve aisément l'espace parcouru.

Discussion. Les valeurs positives du temps y sont seules ad-

missibles, car nous n'examinons pas les mouvements *antérieurs* possibles ; elles seront d'ailleurs toutes positives, si nous nous bornons à considérer le *sens* des vitesses indiqué par l'énoncé.

Le problème *tel qu'il est posé* est donc toujours possible.

Seulement les valeurs de x passent par divers états qu'il importe d'examiner.

1° Pour que x soit positif, c'est-à-dire pour que la rencontre ait lieu au-dessus de M, on doit avoir

$$\frac{v_1}{v_1+v_2}-\frac{gd}{2(v_1+v_2)^2}\geqq 0$$

ou

$$v_1(v_1+v_2)\geqq\frac{gd}{2}$$

La fig. 296 se rapporte à ce cas.

2° Si l'on a $v_1(v_1+v_2)=\frac{gd}{2}$ (3), x sera nul, et la rencontre aura lieu en M ; justifions ce résultat.

Les équations (1) et (2) *deviennent, en supposant que la rencontre ait lieu en* M, c'est-à-dire si l'on a $x=0$,

$$0=v_1y-g\frac{y^2}{2}$$

et

$$d=v_2y+g\frac{y^2}{2}$$

Ces équations fournissent pour y :

la première,

$$y=\frac{2v_1}{g}$$

la seconde,

$$y=\frac{-v_2\pm\sqrt{v_2^2+2gd}}{g}$$

valeurs qui donnent, si on les égale,

$$\frac{2v_1}{g}=\frac{-v_2\pm\sqrt{v_2^2+2gd}}{g}$$

ou

$$2v_1+v^2=\pm\sqrt{v_2^2+2gd}$$

encore

$$4v_1^2+4v_1v_2+v_2^2=v_2^2+2gd$$

d'où

$$v_1(v_1+v_2)=\frac{gd}{2}$$

Or cette relation, qui a été obtenue en supposant la rencontre

en M, est précisément la relation (3) que nous avons supposée ; donc la rencontre a lieu en M, quand la relation est satisfaite.

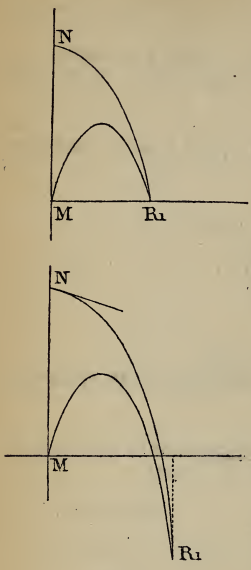


Fig. 297.

Alors les courbes se coupent sur l'axe des temps (fig. 297, partie supérieure).

3° Quand on a

$$v_1(v_1+v_2)<\frac{gd}{2}$$

la valeur de x est négative, et la rencontre a lieu au-dessous de M.

Dans ce cas, les courbes se coupent au-dessous de l'axe des temps (fig. 297, partie inférieure).

Cas particulier. I. $v_1=0$. Alors le corps M n'est pas lancé, il tombe simplement.

On a $x=d\left(\frac{0}{v_2}-\frac{gd}{2}\times\frac{1}{v_2^2}\right)$

$$x=-\frac{g}{2}\left(\frac{d}{v_2}\right)^2$$

La rencontre a lieu au-dessous de M, ainsi que l'indique la valeur négative de x, et qu'on le conçoit aisément.

II. $v_2=0$. C'est alors le corps N qui n'est pas lancé.

$$x=d\left(1-\frac{gd}{2}\times\frac{1}{v_1^2}\right)$$

Ce cas particulier pourrait être l'objet d'une discussion intéressante à laquelle le lecteur fera bien de s'exercer.

Problème 209

(Voir les *Exercices d'Algèbre*, n° 905.)

Problème 210

Un corps élastique et pesant, de dimensions insensibles, est abandonné à lui-même dans le vide, sans impulsion initiale ; il vient frapper contre un plan horizontal fixe qui le réfléchit verticalement, et on admet :

1° *Que la durée de son contact avec le plan est insensible ;*

2° *Qu'en le quittant, sa vitesse n'est plus que les* $\frac{2}{3}$ *de celle qu'il possédait en l'atteignant.*

Cela posé, on demande de quelle hauteur, au-dessus du plan fixe, il faut laisser tomber ce corps pour qu'il s'écoule 10 *secondes entre le commencement de sa chute et l'instant où, après sa réflexion, il atteint le point le plus élevé de sa course ascendante. On prendra pour mesure de l'intensité de la pesanteur* 9,8088. (Dijon, bacc., 1875.)

Soit x la hauteur demandée.

La vitesse du corps, au moment du contact, est

$$v = \sqrt{2gx}$$

et le temps mis pour parcourir x est donné par

$$x = \frac{gt^2}{2}; \quad \text{d'où} \quad t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

Le corps remonte avec la vitesse

$$v_1 = \frac{2}{3}\, v = \frac{2}{3}\sqrt{2gx}$$

et la hauteur x' qu'il atteint est fournie par la relation

$$v_1 = \sqrt{2gx'}$$

ou

$$\frac{2}{3}\sqrt{2gx} = \sqrt{2gx'} \quad \text{ou} \quad x' = \frac{4}{9}\, x$$

Le temps t', employé pour parcourir x', est

$$t' = \sqrt{\frac{2x'}{g}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, \frac{4}{9}\, x}{g}} = \sqrt{\frac{8}{9} \times \frac{x}{g}}$$

Or l'on doit avoir $\qquad t + t' = 10^s$

ou

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \sqrt{\frac{8}{9} \times \frac{x}{g}} = 10$$

et encore

$$\sqrt{\frac{x}{g}}\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{8}{9}}\right) = 10$$

d'où

$$x = \frac{100g}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2} = 176{,}55$$

Rép. 176^m55.

Généralisation. Si T est le temps donné, et si α désigne la fraction qui représente dans quel rapport la vitesse est réduite, on a

$$t + t' = T$$

ou

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \sqrt{\frac{2x'}{g}} = T$$

Or

$$x' = \alpha^2 x$$

donc

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \sqrt{\frac{2x}{g}}\,\alpha^2 = T$$

d'où

$$x = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{gT^2}{2}$$

En faisant $\alpha = \frac{2}{3}$ et $T = 10^s$, on trouve comme ci-dessus 176^m55.

Composition des mouvements.

Problème 211

Un bateau à vapeur qui a une vitesse de 6^{km} *à l'heure est sur une rivière dont la vitesse est* 1^m *par seconde. Combien de* ^{km} *le bateau aura-t-il parcourus dans une heure :*

1° *S'il descend la rivière ?*
2° *S'il la remonte ?*

Dans le premier cas, les vitesses sont de même sens, elles s'ajoutent, et, dans le second, elles se retranchent.

La vitesse de la rivière étant de 1^m par seconde, elle est de 3^k600 par heure.

1re Rép. $9^{km}600$.

2e Rép. $2^{km}400$.

Problème 212

Un bateau à vapeur remontant le Rhône parcourt 2160^m *en* 432^s ; *quand il descend ce fleuve, il met* 240^s *pour parcourir le même chemin, la machine imprime la même vitesse dans ces deux cas. Trouver cette vitesse et celle du courant.*

Désignons par v la vitesse imprimée par la machine et par v' la vitesse du Rhône.

On a les équations

$$432\,(v - v') = 2160$$
$$240\,(v + v') = 2160$$

On en tire

$$v - v' = 5$$
$$v' + v' = 9$$

Rép. $v = 7^{m}$, $v = 2^{m}$.

Problème 212 bis.

Deux trains vont en sens contraire l'un de l'autre, le premier avec une vitesse de 18^{k} *par heure, et l'autre avec une vitesse de* 24^{km}. *Un voyageur, placé dans le premier train, observe qu'il a fallu au second* 13^{s} *pour passer. Quelle était la longueur du second train ?* (Belgique, École militaire, 1881.)

Les trains marchant en sens contraire, la vitesse relative est la somme des vitesses des deux mouvements (M., n° 216, 2°).

On a donc, en désignant par v et v' les vitesses des trains, et v_1 leur vitesse relative,

$$v_1 = v + v'$$

Or

$$v = \frac{18000}{3600} = 5^{m} \text{ par seconde}$$

$$v' = \frac{24000}{3600} = 6^{m}\,\frac{2}{3}$$

donc

$$v_1 = 11^{m}\,\frac{2}{3}$$

La longueur cherchée est

$$11^{m}\,\frac{2}{3} \times 13 = 151^{m}\,\frac{2}{3}$$

Rép. $151\,\frac{2}{3}$.

Problème 213

Une barque aurait une vitesse de 2^{m} *par seconde sur une eau tranquille, elle traverse une rivière de* 40^{m} *de large dont la vitesse est de* $0^{m}50$ *par seconde, la barque est dirigée perpendiculairement à la rive :*

1° *En quel point abordera-t-elle ?*

2° *Longueur du chemin parcouru ;*

3° *Comment aurait-on dû la diriger pour qu'elle traversât la rivière perpendiculairement à la rive ; dans ce cas, quelle aurait été la vitesse ? la durée de la traversée ?*

4° *Direction pour atterrir en un point donné.*

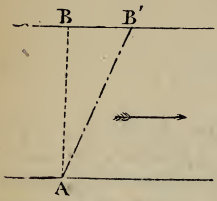


Fig. 298.

1° *En quel point abordera-t-elle ?*

Si l'eau était immobile, la barque aurait parcouru la perpendiculaire AB en $\frac{40}{2} = 20$ secondes.

Pendant ces 20^s la rivière a fait descendre la barque de

$$0^m50 \times 20 = 10^m$$

Au lieu d'aborder en B, la barque atterrira 10^m plus bas en B'.

2° *Longueur du chemin parcouru.*

Cette longueur est AB'.

Or $$AB' = \sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{1700} = 41^m23$$

Si l'on voulait connaître la vitesse réelle de la barque, on aurait $$\frac{41,23}{20} = 2^m061$$

On arrive au même résultat en se servant de la formule de la composition des vitesses (M., n° 203)

$$V^2 = v^2 + v_1^2$$

qui donne $$V = \sqrt{2^2 + 0,5^2} = 2^m,061$$

3° *Direction à donner à la barque pour traverser la rivière perpendiculairement à la rive.*

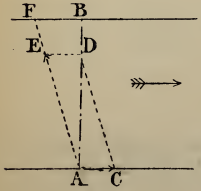


Fig. 299.

La vitesse dirigée suivant AB doit être la résultante de la vitesse de la rivière, représentée par AC, et de celle de la barque qui est quatre fois plus grande, mais dont nous cherchons la direction.

Il suffit, du point C comme centre, de couper AB avec un arc de rayon CD = 4AC ; en achevant le parallélogramme, on trouve AE pour la direction cherchée.

Il y a une solution, tant que la vitesse propre de la barque est

plus grande que celle de la rivière ; le point F est d'autant plus en amont, que la vitesse du courant est plus grande.

Si l'on désigne par α l'angle de la direction AF avec AB, on a

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AE} = \frac{0,50}{2} = \frac{1}{4}$$

d'où $$\alpha = 14^{\circ}28'$$

La vitesse réelle de la barque est représentée par AD ; or

$$AD = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{2^2 - 0,50^2} = 1^{m}93$$

La traversée a duré $$\frac{40}{1,93} = 20,7$$

Rép. La direction de la barque fait avec la perpendiculaire un angle de $14^{\circ}28'$.
La vitesse est de $1^{m}93$.
La durée de la traversée est de $20^{s}7$.

4° *Direction pour atterrir en un point donné.*

Soit B le point où l'on veut aborder.

Représentons par AC la vitesse de la rivière ; du point C, avec un rayon égal à la vitesse de la barque, coupons AB par un arc de cercle ; on obtient ainsi les points D et D', qui donnent les directions cherchées CD, CD'.

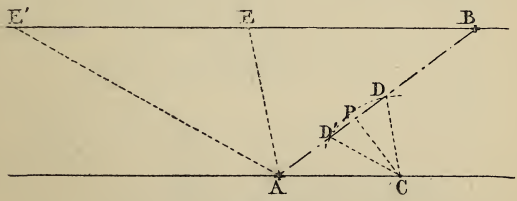


Fig. 300.

La barque pourra donc se diriger suivant AE parallèle à CD, ou, suivant AE' parallèle à CD', elle abordera dans les deux cas en B, puisque dans l'un des cas comme dans l'autre la résultante des vitesses sera dirigée suivant AB.

Lorsqu'on suit la direction AE, la vitesse réelle de la barque est AD ; lorsqu'on se dirige suivant AE', cette vitesse n'est plus que AD' ; la première direction est donc préférable, puisqu'elle donne une traversée de moindre durée.

Discussion. Il y a deux solutions, tant que l'arc de cercle coupe

AB en deux points situés entre A et B, c'est-à-dire tant que la vitesse de la barque est plus petite que celle du courant.

Il n'y en a qu'une, si l'un des points est sur le prolongement de BA, ou encore si la vitesse de la barque est CP, perpendiculaire à AB.

Il n'y a pas de solution pour une vitesse inférieure à CP.

Remarque. Voir la discussion plus complète d'une question analogue aux nos 164 et 218.

Problème 214

Un navire avance dans la direction E *avec une vitesse de* 6km *par heure, le vent souffle du* S.-O. *avec une vitesse de* 9m *par seconde: quelle sera la direction de la girouette du navire?*

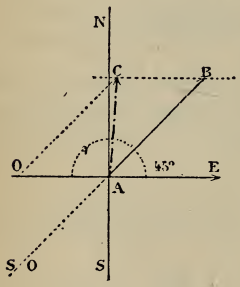


Fig. 301.

Si l'air était tranquille, le mouvement du navire produirait un vent AO dirigé de l'est à l'ouest dont la vitesse serait

$$\frac{6000^m}{60 \times 60} = \frac{5}{3}$$

Le vent du S.-O. est dirigé dans le sens AB avec une vitesse de 9m; la résultante AC de ces deux vitesses donnera la direction de la girouette.

On a (M., no 203)

$$\frac{v'}{\sin \alpha} = \frac{V}{\sin 135^\circ}$$

d'où $$\sin \alpha = \frac{v' \sin 135^\circ}{V} = \frac{9\sqrt{2}}{2V}$$

Mais $$V^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cos 135^\circ$$

Or $$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où $$V^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 9^2 - 15\sqrt{2} = 62{,}564$$

par suite, $$V = 7{,}910$$

et $$\sin \alpha = \frac{12{,}727}{14{,}820}$$

Rép. $\alpha = 53^\circ 31'$.

Problème 215

Un navire avance dans une direction AB *avec une vitesse* v. *Le vent a une direction* CD *et une vitesse* v'. AB *et* CD *font un angle* α. *Quel angle fait la direction apparente du vent avec sa direction réelle ?*

Ce problème est la généralisation du problème précédent; nous allons le traiter en nous servant des principes des mouvements relatifs.

Donnons à tout le système une vitesse AB' égale et directement opposée à la vitesse d'entraînement AB, le navire sera immobile, et la vitesse apparente du vent sera AR ; il faut calculer l'angle x.

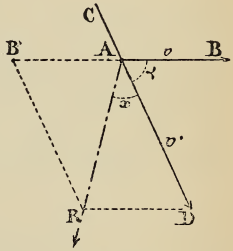


Fig. 302.

En désignant par u la vitesse apparente, on a les équations (M., n° 203)

$$\frac{u}{\sin B'AD} = \frac{v}{\sin x} = \frac{v'}{\sin B'AR}$$

et
$$u^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cos B'AD$$

qui deviennent
$$\frac{u}{\sin \alpha} = \frac{v}{\sin x} = \frac{v'}{\sin (\alpha + x)} \qquad (1)$$

et
$$u^2 = v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \alpha \qquad (2)$$

On tire de la seconde

$$u = \sqrt{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \alpha}$$

et de la première

$$\sin x = \frac{v \sin \alpha}{u} = \frac{v \sin \alpha}{\sqrt{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \alpha}}$$

Discussion. Si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si le vent souffle suivant la direction du navire,

$$\sin x = \frac{0}{\sqrt{v^2 + v'^2 - 2vv'}}$$

$$\sin x = \frac{0}{v - v'}$$

L'angle x est nul, en sorte que la direction apparente est AB ou BA, suivant que v' est plus grande ou plus petite que v; mais,

si $v = v'$, on a $\sin x = \frac{0}{0}$; dans ce cas, on ne sent point de vent sur le navire, la fumée de la machine s'élève verticalement.

Si $\alpha = 90^\circ$, on a $\sin x = \frac{v}{\sqrt{v^2 + v'^2}}$

Si $\alpha = 180^\circ$, le vent souffle en sens inverse de la direction du navire, et l'on a $\sin x = \frac{0}{v + v'}$

par suite, $x = 0$, quelles que soient les valeurs relatives de v et de v', ce qui se justifie aisément.

Si l'on suppose $v = v'$, la formule devient

$$\sin x = \frac{v \sin \alpha}{\sqrt{2v^2 - 2v^2 \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

d'où
$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

Donc
$$\sin x = \cos \frac{\alpha}{2}$$

ce qui donne

$$x = 90 - \frac{\alpha}{2} = \frac{180 - \alpha}{2} = \frac{B'AD}{2}$$

C'est-à-dire que la direction apparente est alors bissectrice de l'angle B'AD.

Problème 216

Deux locomotives vont dans une direction AB *avec des vitesses* v *et* v'. *Le vent, dont la direction fait un angle* α *avec* AB, *a une vitesse* v''. *Quel sera l'angle des directions que suivront les fumées de ces deux locomotives ?*

Soient AB, AC les vitesses v et v' des deux locomotives, AD la vitesse v'' du vent.

Les fumées suivront les directions AE, AF ; on demande l'angle EAF $= x$.

Désignons par β l'angle DAE et par β' l'angle DAF.

On a
$$x = \beta' - \beta$$

d'où
$$\sin x = \sin \beta' \cos \beta - \cos \beta' \sin \beta \qquad (1)$$

Or le triangle DAF donne

$$\frac{\sin \beta'}{DF} = \frac{\sin ADF}{AF}$$

d'où
$$\sin \beta' = \frac{v' \sin \alpha}{\sqrt{v'^2 + v''^2 + 2v'v'' \cos \alpha}}$$

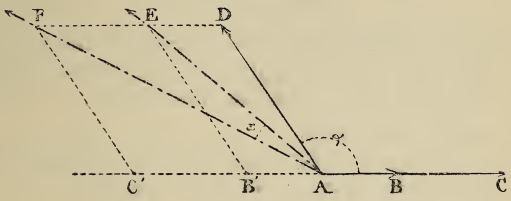


Fig. 303.

On trouve de même

$$\sin \beta = \frac{v \sin \alpha}{\sqrt{v^2 + v''^2 + 2vv'' \cos \alpha}}$$

par suite,

$$\cos^2 \beta' = 1 - \sin^2 \beta' = \frac{(v' \cos \alpha + v'')^2}{v'^2 + v''^2 + 2v'v'' \cos \alpha}$$

d'où
$$\cos \beta' = \frac{v' \cos \alpha + v''}{\sqrt{v'^2 + v''^2 + 2v'v'' \cos \alpha}}$$

de même
$$\cos \beta = \frac{v \cos \alpha + v''}{\sqrt{v^2 + v''^2 + 2vv'' \cos \alpha}}$$

En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

Rép. $\sin x = \dfrac{v''(v' - v) \sin \alpha}{\sqrt{(v^2 + v''^2 + 2vv'' \cos \alpha)(v'^2 + v''^2 + 2v'v'' \cos \alpha)}}$.

Remarque. On arrive plus rapidement au même résultat en considérant le triangle AEF, qui donne

$$\frac{\sin x}{EF} = \frac{\sin AEF}{AF}$$

d'où
$$\sin x = \frac{EF \times \sin AEF}{AF}$$

Mais on a
$$\sin AEF = \sin AED$$

Or le triangle ADE donne

$$\sin AED = \frac{AD \sin \alpha}{AE}$$

d'où $$\sin x = \frac{AD \times EF \times \sin \alpha}{AE \times AF}$$

En remplaçant les lignes par leur valeur en fonction des données, on trouve pour $\sin x$ la même valeur que ci-dessus, ce qui vérifie les calculs.

Problème 217

Quelle est la meilleure direction à donner à son parapluie?

Nous supposons que les gouttes de pluie et le voyageur se déplacent parallèlement à un même plan vertical.

I. *Le voyageur est arrêté.*

L'axe du parapluie doit évidemment être dans la direction de la pluie, afin que le voyageur soit mieux couvert.

II. *Le voyageur se déplace.*

A cause de la résistance de l'air, le mouvement des gouttes de pluie peut être considéré comme sensiblement uniforme.

Soit AB la vitesse de la pluie et AC celle du voyageur ; pour avoir la vitesse relative, prenons AC′ égale AC et construisons le parallélogramme qui donne AD pour vitesse relative cherchée et, par suite, pour la direction de l'axe du parapluie.

On voit qu'il faut, dans ce cas, incliner d'autant plus le parapluie qu'on marche plus rapidement.

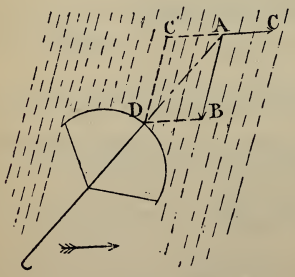


Fig. 304.

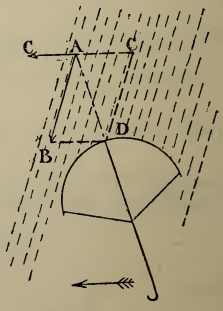


Fig. 305.

Si le voyageur allait en sens contraire du mouvement précédent, la direction du parapluie devrait être différente ; il faudrait d'autant plus le redresser, que la marche du piéton serait plus rapide.

Problème 218

Quelle direction doit prendre un mobile dont la vitesse est v, *et qui part d'un point* A *pour rencontrer un autre mobile* M *qui se meut dans la direction* MN *avec une vitesse* v'?

Cette question a déjà été traitée par le calcul au problème 164. La considération du mouvement relatif va nous permettre de la résoudre et de la discuter par une construction très simple.

Soit M le point où se trouve le mobile M au moment où part le mobile A.

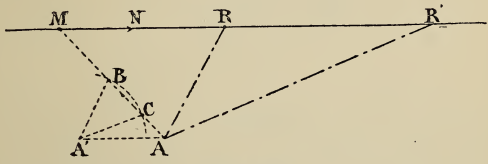


Fig. 306.

Pour immobiliser le point M, donnons à tout le système un mouvement égal et de sens contraire à celui de ce point M.

Le point A sera alors animé de deux mouvements, l'un suivant AA' avec une vitesse v', l'autre dont on connaît la vitesse v, mais dont on cherche la direction ; ces deux mouvements doivent avoir une résultante dirigée suivant AM.

Pour obtenir la direction cherchée, du point A', avec une longueur égale à v, on décrit un arc qui coupe AM aux points B et C, ce qui donne les droites A'C et A'B.

En menant par le point A les droites AR et AR' parallèles à A'B et A'C, on a les points de rencontre R et R'.

C'est, en effet, ce que l'on peut vérifier ; car, à cause des triangles semblables A'BA et MAR, on a

$$\frac{MR}{AR} = \frac{AA'}{A'B} = \frac{v'}{v}$$

d'où

$$\frac{MR}{v'} = \frac{AR}{v}$$

Or $\frac{MR}{v'}$ et $\frac{AR}{v}$ sont les temps mis par les mobiles pour parcourir les espaces MR et AR ; il y a donc rencontre en R. Il en est de même pour R'.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que la

vitesse v soit au moins égale à A'P (fig. 307), et, si elle lui est égale, il n'y a qu'une seule direction AR parallèle à A'P, elle détermine le point de rencontre R.

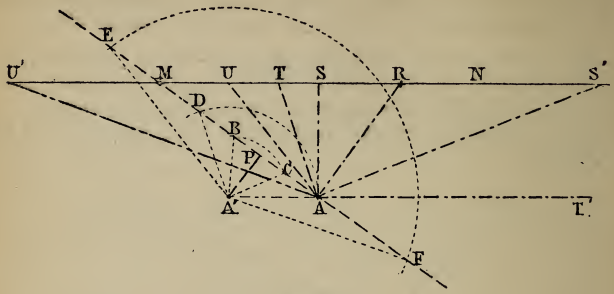


Fig. 307.

Si la vitesse v grandit, l'arc de cercle coupe AM en deux points B et C qui fournissent les deux solutions AS et AS'.

Si $v = v'$, l'arc coupe AM aux points D et A, le point D donne la solution AT, l'autre correspond à la direction AT', qui ne donne pas de rencontre, les deux routes étant parallèles.

Il n'y a alors qu'une solution.

Si l'on a $v > v'$, l'arc coupe en deux points E et F. La première E correspond à la direction AU, qui donne le point de rencontre U.

L'autre point F donne la direction AU' qui ne convient pas à la question proposée, puisque l'on a admis que le premier mobile part de A lorsque le deuxième est en M. Mais si l'on suppose que le premier mobile était en marche avant de passer au point A, il a pu rencontrer le mobile M en U' avant d'arriver au point A, et la deuxième solution peut être acceptée.

On pourrait encore examiner les cas où l'angle AMN est droit ou obtus ; la construction s'appliquerait sans dificulté, et l'on retrouverait les résultats obtenus par le calcul au problème 164.

Remarque. On peut encore donner la solution suivante :

Le point cherché doit satisfaire à la relation

$$\frac{MR}{AR} = \frac{v'}{v}$$

Il appartient donc au *lieu des points dont les distances à*

deux points donnés sont dans un rapport constant, c'est-à-dire à la circonférence O (G., nº 307) décrite sur BB′ comme diamètre, B et B′ étant les points qui divisent AM dans le rapport $\frac{v'}{v}$.

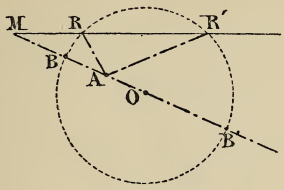


Fig. 308.

Le point cherché est aussi sur la droite MR ; il se trouve donc à l'intersection R ou R′ de cette droite et de la circonférence.

On peut discuter la question au moyen de cette construction et retrouver les résultats précédents.

Problème 219

Un point décrit un polygone : quel est le mouvement apparent d'un point fixe par rapport à ce point mobile?

Application au mouvement apparent du soleil.

Soient A le point qui décrit le polygone ABCDE, et A′ le point dont on cherche le mouvement relatif.

Pendant que le mobile A décrit le côté AB, si l'on regarde ce point comme immobile, le point A′ semblera décrire une droite A′B′ égale et parallèle à AB, mais dirigée en sens contraire (M., nº 215).

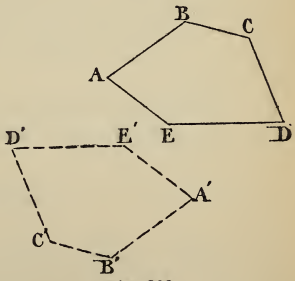


Fig. 309.

Il en sera de même pour les autres côtés, de sorte que le point A′ paraîtra décrire un polygone A′B′C′D′E′ égal au polygone ABCDE et qui lui sera symétrique. A chaque instant les deux points A et A′ ont des vitesses égales, mais de sens contraire.

Application au mouvement apparent du soleil.

En un an, la terre T décrit, dans le sens *direct*, c'est-à-dire

de l'ouest à l'est, une ellipse TT_1A dont le soleil S occupe l'un des foyers.

Mais la terre nous paraissant immobile, le soleil, ainsi que nous venons de le voir, semble décrire, dans le sens *rétrograde*, une ellipse SS_1A', symétrique de celle que parcourt la terre.

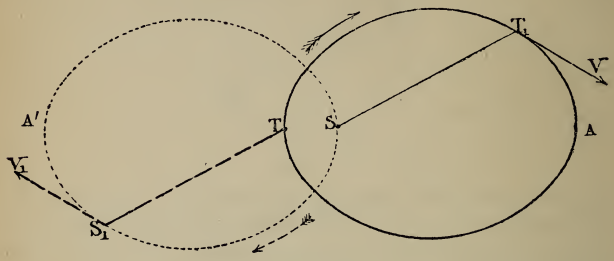


Fig. 310.

Lorsque la terre est en T_1, le soleil nous paraît en S_1, les rayons vecteurs ST_1 et TS_1 étant égaux et parallèles. En T_1 la vitesse de la terre est dirigée suivant la tangente T_1V ; celle du soleil paraît l'être suivant la tangente S_1V_1, en sens contraire de celle de la terre et de même intensité.

Quand la terre est à son *aphélie*, c'est-à-dire le plus loin du soleil, en A, le soleil nous paraît être à son *apogée* A', et quand la terre est à son *périhélie* en T, nous voyons le soleil en S, à son *périgée*.

En étudiant le mouvement apparent du soleil, nous connaissons donc parfaitement le mouvement réel de la terre.

Problème 220

Un cylindre tourne uniformément autour de son axe avec une vitesse V ; *il est frappé en un point* A *par un mobile qui se meut dans la direction* CA *avec une vitesse* V' : *quelles sont relativement au cylindre la direction et la vitesse que paraît posséder ce mobile au moment du choc?*

Soit O le cylindre, AB la vitesse V du point A dirigée suivant la tangente et AD la vitesse V' du mobile.

Pour immobiliser le cylindre, donnons au système une vitesse

AB′ égale et de sens contraire à AB ; le mobile sera alors animé de deux vitesses AD et AB′, qui ont AE pour résultante.

La vitesse relative du mobile, par rapport au cylindre, est donc représentée en grandeur et en direction par AE.

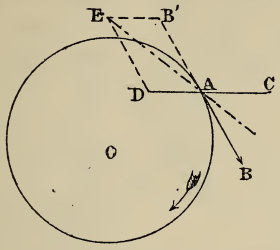


Fig. 311.

Remarque. Cette droite indique la direction que l'on doit donner au premier élément de l'aube d'une roue hydraulique pour que l'eau entre sans choc.

Problème 221

Dans le problème précédent, quel serait le mouvement relatif du mobile par rapport au cylindre, si ce mobile pénétrait dans le cylindre tout en conservant la même vitesse ?

En conservant les mêmes notations que dans le problème précédent, on trouve AE pour vitesse relative du mobile lorsqu'il touche le point A. Cette vitesse relative resterait constante si tous les points du cylindre avaient la même vitesse.

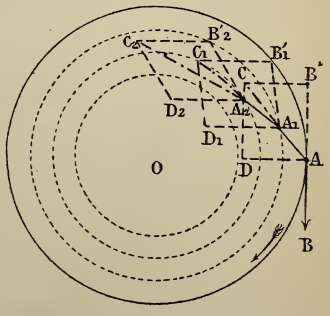


Fig. 312.

Mais le point A_1, par exemple, a une vitesse dont l'intensité est à celle du point A comme le rayon OA_1 est au rayon OA ; elle est dirigée suivant la tangente en ce point.

Pour avoir le mouvement relatif par rapport au point A_1, il

faut donc composer la vitesse A_1D_1 du mobile, qui reste constante, avec la vitesse $A_1B'_1$, égale et de sens contraire à la vitesse du point A_1, on obtient A_1C_1 pour résultante.

Fig. 313.

De même au point A_2, la vitesse relative A_2C_2 résulte de A_2D_2, vitesse du mobile, et de $A_2B'_2$, vitesse d'entraînement.

Si les points A, A_1, A_2... se rapprochent indéfiniment, la ligne AA_1A_2... devient une courbe qui sert à déterminer la forme des aubes d'une roue hydraulique.

Remarque. Nous nous bornons à cette simple indication, en renvoyant aux traités spéciaux pour l'importante question des roues hydrauliques.

Mouvements des projectiles.

Problème 222

Une tour haute de 45^m *est construite au-dessus d'un sol horizontal. On lance horizontalement du haut de la tour une balle de plomb, et elle va toucher le sol à une distance du pied de la tour égale à* 70^m. *Quelle est la vitesse initiale imprimée à la balle?* (Lille, bacc., 1879.)

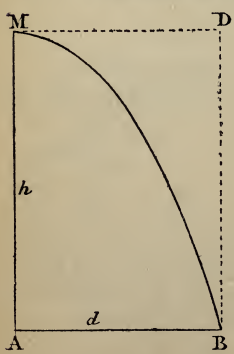


Fig. 314.

Désignons par h la hauteur de la tour et par d la distance du pied de la tour, au point où tombe la balle.

Soit v_0 la vitesse initiale cherchée.

Pendant que le mobile, sous l'action de la pesanteur, s'abaisse d'une hauteur h, avec un mouvement uniformément accéléré, il s'écarte de la tour d'une distance d, avec un mouvement uniforme, dont la vitesse est v_0.

En désignant par t le temps que le mobile a mis pour

arriver au point B, le mouvement dans le sens vertical donne

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

et le mouvement dans le sens horizontal,

$$d = v_o t \qquad (2)$$

En remplaçant, dans l'équation (1), t par la valeur $t = \frac{d}{v_o}$, on obtient

$$h = \frac{1}{2} g \frac{d^2}{v_o^2}$$

d'où

$$v_o = \sqrt{\frac{gd^2}{2h}}$$

Rép. $v_o = d\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

Application. En mettant dans la formule ci-dessus les valeurs numériques de l'énoncé, on obtient

$$v_o = 70\sqrt{\frac{9,8088}{2 \times 45}} = 23,11$$

Rép. 23m11.

Problème 222 bis.

Un projectile est lancé sous un angle α *avec une vitesse* a ; *quelles seront, au bout du temps* t, *l'intensité et la direction de la vitesse de ce mobile?*

1re méthode. I. *Intensité de la vitesse.* Nous allons calculer la vitesse V que possède le mobile au bout du temps t.

La vitesse initiale AR se décompose en deux autres, l'une horizontale

$$AP = a \cos \alpha$$

l'autre verticale de bas en haut

$$AQ = a \sin \alpha$$

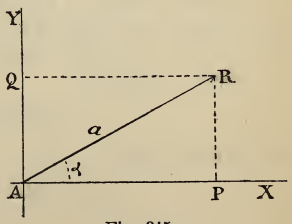


Fig. 315.

La pesanteur donne au mobile, au bout du temps t, une vitesse gt, dirigée de haut en bas, qui se retranche de AQ.

En désignant par v la vitesse de la projection horizontale du mobile, et par v_1 la vitesse de la projection verticale, on a donc

$$v = a \cos \alpha \qquad (1)$$

$$v_1 = a \sin \alpha - gt \qquad (2)$$

La vitesse cherchée V, étant la résultante des vitesses v et v_1, sera donnée par la relation (M., nº 203)

$$V^2 = v^2 + v_1^2$$

qui donne $V^2 = (a \cos \alpha)^2 + (a \sin \alpha - gt)^2$

Elle devient $V^2 = a^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2gat \sin \alpha + g^2t^2$

d'où $$V^2 = a^2 - 2gat \sin \alpha + g^2t^2 \qquad (3)$$

Discussion. Pour trouver entre quelles limites varie la vitesse V, résolvons l'équation (3) par rapport à t :

$$t = \frac{ag \sin \alpha \pm \sqrt{V^2g^2 - a^2g^2 (1 - \sin^2\alpha)}}{g^2}$$

d'où $$t = \frac{a \sin \alpha \pm \sqrt{V^2 - a^2 \cos^2\alpha}}{g} \qquad (4)$$

D'où l'on voit que V a pour minimum $V = a \cos \alpha$; c'est la composante horizontale de la vitesse initiale a.

Ce minimum a lieu pour le temps $t = \frac{a \sin \alpha}{g}$; on sait qu'à cet instant le mobile est arrivé au point culminant de sa trajectoire (M., nº 211).

Lorsque V est compris entre $a \cos \alpha$ et a, le radical est plus petit que $\sqrt{a^2 - a^2 \cos^2\alpha}$, c'est-à-dire plus petit que $a \sin \alpha$; par suite, les deux valeurs de t sont positives et équidistantes du temps $$t = \frac{a \sin \alpha}{g}$$

qui correspond au point culminant.

Le mobile est alors à la même hauteur, car, sa trajectoire étant une parabole, les ordonnées équidistantes de la flèche sont égales (M., nº 211) ; il est du reste facile de le montrer par le calcul.

Si dans la formule

$$y = at \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

on remplace t par

$$t' = \frac{a \sin \alpha + \sqrt{V^2 - a^2 \cos^2\alpha}}{g}$$

ou par $$t'' = \frac{a \sin \alpha - \sqrt{V^2 - a^2 \cos^2 \alpha}}{g}$$

on trouve chaque fois $$y = \frac{a^2 - V^2}{2g}$$

Donc le mobile a la même vitesse lorsqu'il occupe des positions symétriques par rapport à l'ordonnée du point culminant.

Lorsque $V = a$, le mobile a la vitesse initiale, on trouve

$$t' = \frac{2a \sin \alpha}{g} \quad \text{et} \quad t'' = 0$$

La valeur $t'' = 0$ corespond au moment du départ, le mobile alors possède évidemment la vitesse initiale a. La valeur t' correspond à l'instant où le mobile atteint de nouveau l'horizontale du point A (M., nº 210), sa vitesse est la même qu'au départ; du reste, ces deux points sont symétriquement placés sur la trajectoire.

Pour $V > a$, on trouve

$$t' > \frac{2a \sin \alpha}{g} \quad \text{et} \quad t'' < 0$$

Au bout du temps t' le mobile est au-dessous de l'horizontale du point A, sa vitesse est plus grande que la vitesse initiale, et elle croît constamment.

La valeur t'' est négative et ne convient pas si le mobile a été lancé du point A; mais elle conviendrait si l'on supposait que le mobile fût déjà en mouvement avant de passer au point A.

II. *Direction de la vitesse.* Pour avoir la direction de la vitesse, à un instant donné, par exemple lorsque le mobile est en A_1, faisons $A_1P_1 = AP = a \cos \alpha$, puisque la composante horizontale ne change pas; la composante verticale A_1Q_1 est égale à $a \sin \alpha - gt$; en achevant le parallélogramme, on obtient A_1R_1 pour la vitesse du mobile au point A_1, et l'angle $R_1A_1P_1$ ou β donne la direction cherchée.

Le triangle $A_1P_1R_1$ donne

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A_1Q_1}{A_1P_1} = \frac{a \sin \alpha - gt}{a \cos \alpha} \qquad (5)$$

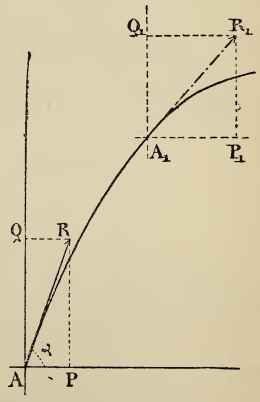


Fig. 316.

Discussion. Tant que l'on a

$$t < \frac{a \sin \alpha}{g},$$

c'est-à-dire tant que le mobile n'est pas arrivé au point culminant de sa trajectoire, tg β est positive; par suite, la vitesse est dirigée au-dessus de l'horizontale, ce qui est évident puisque le mobile continue à s'élever.

Lorsque $t = \frac{a \sin \alpha}{g}$, la vitesse est horizontale.

Pour $t > \frac{a \sin \alpha}{g}$, la vitesse est dirigée vers le bas, le mobile descend.

La vitesse n'a donc qu'une seule fois la même direction.

Remarque. La simple inspection des formules (1) et (2) montre que la projection horizontale du mobile a un mouvement uniforme dont la vitesse est $a \cos \alpha$.

La projection verticale, au contraire, a une vitesse qui décroît constamment. D'abord égale à $a \sin \alpha$, elle diminue et s'annule au bout du temps $t = \frac{a \sin \alpha}{g}$; le mobile est alors à son point culminant ; cette vitesse devient ensuite négative, le mobile descend, et la vitesse négative de la projection verticale croît de plus en plus en valeur absolue.

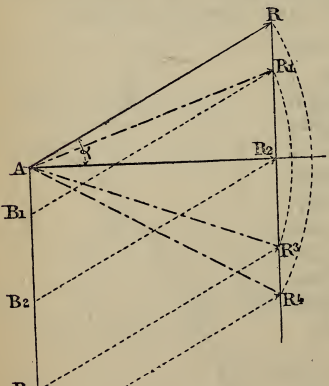


Fig. 317.

2e méthode. Une construction très simple donne tous les résultats que nous venons d'indiquer.

Soit AR la direction et l'intensité de la vitesse initiale a. Pour avoir la vitesse au bout du temps t, prenons $AB_1 = gt$. Le mobile est alors animé des vitesses AR et AB_1, leur résultante AR_1 est la vitesse cherchée.

Cette figure permet de trouver très simplement les résultats des deux discussions précédentes.

On voit que pour $t > 0$, la vitesse AR_1 devient plus petite que la vitesse initiale a, qu'elle continue à diminuer jusqu'à ce qu'elle atteigne sa valeur *minimum* $AR_2 = a \cos \alpha$, ce qui arrive lorsque

$$gt = AB_2 = RR_2 = a \sin \alpha$$

d'où $$t = \frac{a \sin \alpha}{g}$$

la vitesse est alors horizontale.

Le temps continuant à croître, la vitesse augmente et reprend les mêmes valeurs que précédemment ; mais elle est dirigée vers le bas.

Elle redevient égale à la vitesse initiale a, lorsque

$$gt \text{ ou } AB_4 = 2RR_2 = 2a \sin \alpha$$

c'est-à-dire au bout du temps $t = \frac{2a \sin \alpha}{g}$, double de celui qui a donné le minimum; elle fait alors avec l'horizontale un angle $-\alpha$.

Elle grandit ensuite indéfiniment en s'inclinant de plus en plus, à mesure que t augmente.

Problème 223

Du sommet d'une tour de 50^m *de hauteur, on lance horizontalement une balle avec une vitesse de* 200^m :

1° *Au bout de quel temps atteindra-t-elle le sol ?*

2° *A quelle distance du pied de la tour ?*

3° *Quelle sera alors sa vitesse ?*

4° *Avec quelle vitesse aura-t-elle été lancée si elle atteint le sol à une distance* d *du pied d'une tour dont la hauteur est* h ?

1° *Au bout de quel temps la balle atteindra-t-elle le sol ?*

La balle atteindra le sol lorsque, sous l'action de la pesanteur, elle sera descendue de 50^m ; on a donc (M., n° 197)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{100}{9,8}} = 3^s19$$

Rép. 3^s2.

2° *A quelle distance du pied de la tour atteindra-t-elle le sol ?*

Cette distance est l'espace parcouru avec une vitesse de 200^m pendant le temps $\sqrt{\frac{100}{9,8}}$ que la balle a mis pour atteindre le sol.

On a donc $$d = 200 \times \sqrt{\frac{100}{9,8}} = 638^m$$

Rép. 638 mètres.

3° *Quelle sera alors la vitesse de la balle ?*

Cette vitesse V est la résultante de la vitesse horizontale $v = 200$ et de la vitesse verticale $v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 50}$.

On a $$V^2 = v^2 + v_1^2 = 40\,000 + 980$$

$$V = \sqrt{40\,980} = 202^m$$

La direction est donnée par l'angle α fait avec l'horizontale

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1}{v} = \frac{\sqrt{980}}{200}$$

d'où $$\alpha = 8°54'$$

Rép. $V = 202$ mètres

$\alpha = 8°54'$.

4° *Avec quelle vitesse aura-t-elle été lancée?*

On a trouvé, au problème 202,

Rép. $v = d\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

Problème 223 bis.

Du haut d'une tour haute de 100m, *on tire une balle sous un angle* $\alpha = 45°$, *avec une vitesse de* 327m. *A quelle distance, au bout de quel temps, sous quel angle et avec quelle vitesse atteindra-t-elle le sol?* (Berlin, dipl. du Realschulen, 1880.)

Cherchons d'abord ce que deviennent les formules du mouvement des projectiles, lorsque l'angle α est égal à 45°.

1° *Durée du trajet.* La formule (M., n° 211)

$$t = \frac{a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2gy}}{g}$$

devient, en y remplaçant $\sin \alpha$ par $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4gy}}{g\sqrt{2}} \qquad (1)$$

2° *Distance.* On l'obtient en mettant dans la formule

$$x = at \cos \alpha$$

la valeur obtenue pour t, et en faisant $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui donne

$$x = \frac{a(a \pm \sqrt{a^2 - 4gy})}{2g} \qquad (2)$$

3° *Angle.* Dans le problème 222 *bis*, II, nous avons trouvé pour l'angle β, au bout du temps t,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \alpha - gt}{a \cos \alpha}$$

En remplaçant α et t par leur valeur, on a

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4gy}}{a} \qquad (3)$$

4° *Vitesse.* Pour trouver l'intensité V de la vitesse, on peut se servir de la formule (Probl. 222 *bis*, I)

$$V^2 = (a \cos \alpha)^2 + (a \sin \alpha - gt)^2$$

dans laquelle on remplace α et t par leur valeur, ce qui donne

$$V^2 = a^2 - 2gy$$

d'où
$$V = \pm\sqrt{a^2 - 2gy} \qquad (4)$$

Application. En prenant les chiffres fournis par l'énoncé, il faut remarquer que y est négatif et vaut -100. Par suite,

$$\sqrt{a^2 - 4gy} \quad \text{devient} \quad \sqrt{327^2 + 400g}$$

De plus, la valeur positive de t convient seule à la question.

Rép. Distance 11 000m. Angle $-45°30'$.
Durée 47^s15. Vitesse 330m.

Problème 224

Sous quel angle faut-il lancer un projectile avec une vitesse de 300m *pour qu'il atteigne à* 1200m *d'amplitude ? — Au bout de quel temps atteindra-t-il le but ?*

1° *Angle sous lequel il faut lancer le projectile.*

L'amplitude x du point est donnée par la formule (M., n° 210)

$$x = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g}$$

On en tire
$$\sin 2\alpha = \frac{gx}{a^2} = \frac{9{,}8088 \times 1200}{300^2}$$

ce qui donne
$$2\alpha = 7°31' \quad \text{ou} \quad 172°29'$$

Rép. $\alpha = 3°45'$ ou $86°15'$.

Remarque. On voit que les directions qui correspondent à une même amplitude sont symétriques par rapport à la direction à 45° à laquelle correspond la portée maximum (M., n° 210). Cette propriété sera établie plus loin. (Probl. 224 *bis*, Remarque I.)

2° *Au bout de quel temps atteindra-t-il le but ?*

La durée t du mouvement du mobile est donnée (M., n° 210) par la formule
$$t = \frac{2a \sin \alpha}{g}$$

Dans le cas du tir tendu, $a = 3°45'$, on a

$$t = \frac{2 \times 300 \times \sin 3°45'}{g} = 4^s$$

Dans le cas du tir plongeant, $\alpha = 86^\circ 15'$, on trouve

$$t = \frac{2 \times 300 \times \sin 86^\circ 15'}{g} = 61^s$$

Rép. $t = 4$ secondes par le tir tendu.

$t = 61$ secondes par le tir plongeant.

Remarques. I. On obtiendrait plus simplement la durée du trajet en se servant de la formule (1) du n° 209,

$$x = at \cos \alpha$$

qui donne
$$t = \frac{x}{a \cos \alpha}$$

d'où
$$t = \frac{1\,200}{300 \cos \alpha} = \frac{4}{\cos \alpha}$$

ce qui fournit les résultats trouvés plus haut.

II. Cette question n'est qu'un cas particulier de celle qui est résolue et discutée dans le problème suivant (224 *bis*) :

Problème 224 bis.

Sous quel angle faut-il lancer un mobile, avec une vitesse a, *pour qu'il atteigne un point dont les coordonnées sont* p *et* q ? *— Limite des points du plan qui peuvent être atteints par un mobile. — Parabole de sûreté.*

La trajectoire d'un mobile lancé sous un angle α, avec une vitesse a, est fournie par l'équation (M., n° 209)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2a^2 \cos^2 \alpha} \qquad (1)$$

Les coordonnées p et q du point donné doivent satisfaire à cette relation ; donc

$$q = p \operatorname{tg} \alpha - \frac{gp^2}{2a^2 \cos^2 \alpha} \qquad (2)$$

Dans cette équation, l'angle α est seul inconnu ; pour le déterminer, remplaçons $\cos^2 \alpha$ par sa valeur en fonction de $\operatorname{tg} \alpha$ (Trig., n° 27)

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

l'équation (2) devient

$$q = p \operatorname{tg} \alpha - \frac{gp^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2a^2}$$

qui donne $gp^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2a^2 p \operatorname{tg} \alpha + 2a^2 q + gp^2 = 0$ (3)

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2 gq - g^2 p^2}}{gp} \quad (4)$$

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait $a^4 - 2ga^2 q - g^2 p^2 \geqq 0$

Par conséquent, les points dont les coordonnées p et q sont reliées par la relation $a^4 - 2ga^2 q - g^2 p^2 < 0$ ne peuvent être atteints par un mobile lancé avec la vitesse a.

Lorsque p et q satisfont à la relation $a^4 - 2ga^2 q - g^2 p^2 > 0$, on trouve pour tg α deux valeurs ; la plus petite donne la trajectoire ACB, c'est la *parabole pour abattre* ou *trajectoire tendue*.

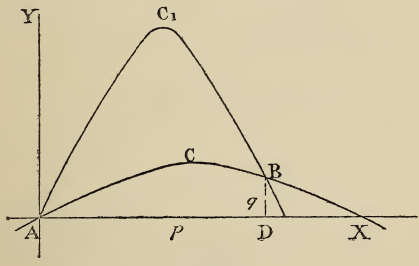


Fig. 318.

Le plus grand angle donne la trajectoire AC_1B, c'est la *parabole pour écraser* ou *tir plongeant*. Les directions du mobile dans chacun de ces cas donnent la raison de ces dénominations.

Tant que l'on a $q > 0$, les deux valeurs de tg α sont de même signe, il faut tirer au-dessus de AD.

Lorsque l'on a $q < 0$, les deux valeurs de tg α peuvent être de signe contraire ; c'est qu'alors le point donné se trouvant au-dessous de l'horizontale du point A, on peut avoir à tirer au-dessous de cette droite pour la trajectoire tendue et au-dessus pour le tir plongeant.

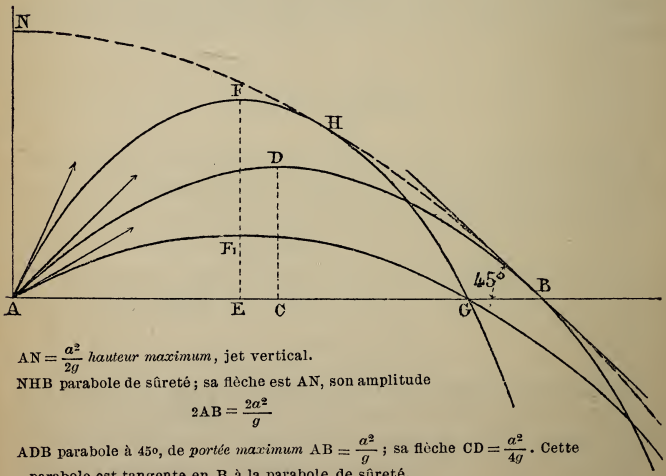
Durée du trajet. Dans le tir tendu comme dans le tir plongeant, pour atteindre un point B, la projection horizontale du mobile décrit le même chemin $AD = p$, d'un mouvement uniforme (Probl. 222 *bis*), mais avec des vitesses différentes dans les deux cas. La vitesse horizontale est en effet exprimée par $a \cos \alpha$, la durée t du trajet est donc

$$t = \frac{p}{a \cos \alpha}$$

Mais dans le tir tendu, α est plus petit que dans le tir plongeant ; par suite, $\cos \alpha$ est plus grand dans le premier cas que dans le second ; le mobile arrive donc plus rapidement au but par le tir tendu que par le tir plongeant.

Parabole de sûreté. Nous avons vu qu'un point n'est atteint par le projectile que si ses coordonnées p et q satisfont à la relation

$$a^4 - 2ga^2q - g^2p^2 \geqq 0$$



$AN = \frac{a^2}{2g}$ *hauteur maximum*, jet vertical.

NHB parabole de sûreté ; sa flèche est AN, son amplitude

$$2AB = \frac{2a^2}{g}$$

ADB parabole à 45°, de *portée maximum* $AB = \frac{a^2}{g}$; sa flèche $CD = \frac{a^2}{4g}$. Cette parabole est tangente en B à la parabole de sûreté.

AFG et AF_1G paraboles de même portée AG ; la première est tangente en H à la parabole de sûreté ; l'autre au-dessous de AB, hors des limites de la figure.

Fig. 319.

Par conséquent, les points pour lesquels on a

$$a^4 - 2ga^2q - g^2p^2 = 0$$

séparent la partie qui peut être atteinte de celle qui ne peut l'être ; or cette relation, qui peut s'écrire

$$g^2p^2 + 2ga^2q - a^4 = 0$$

est l'équation d'une parabole (Ex. 85 *bis*) ; elle a reçu le nom caractéristique de *parabole de sûreté.*

Elle a pour axe de symétrie la verticale AN, sa flèche égale $\frac{a^2}{2g}$; elle est tangente à toutes les trajectoires, ce qu'on exprime en disant qu'elle est l'*enveloppe* des paraboles décrites par les mobiles lancés du point A, dans les différentes directions, avec la même vitesse a.

Remarques. I. On peut établir que les deux directions pour atteindre le même but B sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle YAB.

Désignons par α' et α'' les angles de ces deux directions.

L'équation (3) montre que ces angles sont liés par la relation

$$\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{2a^2}{gp}$$

et

$$\operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha'' = \frac{2a^2q + gp^2}{gp^2} = \frac{2a^2q}{gp^2} + 1$$

Si l'on introduit ces valeurs dans la formule

$$\operatorname{tg}(\alpha' + \alpha'') = \frac{\operatorname{tg} \alpha' + \operatorname{tg} \alpha''}{1 - \operatorname{tg} \alpha' \operatorname{tg} \alpha''}$$

on obtient

$$\operatorname{tg}(\alpha' + \alpha'') = \frac{\frac{2a^2}{gp}}{-\frac{2a^2q}{gp^2}} = -\frac{p}{q}$$

Mais

$$\frac{p}{q} = \frac{AD}{BD} = \cot \beta$$

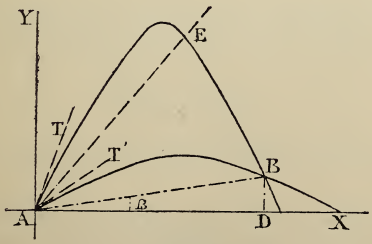


Fig. 320.

en désignant par β l'angle que fait, avec l'axe des x, la droite qui joint le point A au but B.

On a donc $\operatorname{tg}(\alpha' + \alpha'') = -\cot\beta = \operatorname{tg}(90^\circ + \beta)$

qui donne $\alpha' + \alpha'' = 90^\circ + \beta$

d'où $\alpha' - \beta = 90^\circ - \alpha''$

Ce qui exprime que la direction de la parabole tendue fait avec AB le même angle que la parabole pour abattre fait avec la verticale, ou encore que les deux directions font des angles égaux avec la bissectrice AE de l'angle YAB.

Dans le cas où le point B est sur l'axe des X, la bissectrice fait des angles de 45° avec les deux axes, et l'on a

$$45^\circ - \alpha' = \alpha'' - 45^\circ$$

Les deux directions sont symétriques par rapport à la direction à 45°, résultat qui concorde avec ce qui a été trouvé au problème 224.

II. Zone dangereuse. Supposons le but sur l'horizontale du point A; les deux paraboles ont alors même amplitude AB, et les projectiles arrivent au but avec des vitesses de même intensité a, mais de directions différentes. Si l'on

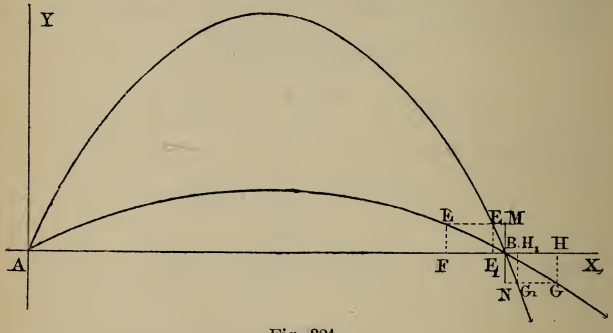


Fig. 321.

prend pour but B le milieu du corps d'un fantassin MN, vers la ceinture, par exemple, on voit que l'homme sera atteint par le tir tendu, tant qu'il se trouvera dans la zone FH, et par le tir plongeant, seulement dans la zone F_1H_1; la zone dangereuse est donc plus étendue dans le premier cas que dans le second.

Problème 225

Un corps est lancé sous un angle de 10° *avec une vitesse de* 400m.

1° *Quelle distance horizontale atteindra-t-il ?*

2° *Au bout de combien de temps y arrivera-t-il ?*

3° *Où serait-il deux secondes plus tard s'il avait continué son mouvement ?*

4° *A quelle hauteur s'est-il élevé ?*

5° *Quelle sera sa vitesse en atteignant l'horizontale du point de départ ?*

6° *Quelle était sa vitesse au point culminant ?*

7° *En quel point sa vitesse serait-elle double de la vitesse initiale ?*

1° *Quelle distance horizontale atteindra-t-il ?*

On applique la formule (4) (M., n° 210)

$$x = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{400^2 \times \sin 20^\circ}{9{,}8088} = 5580$$

Rép. 5580 mètres.

2° *Durée du trajet.*

La formule est

$$t = \frac{2a \sin \alpha}{g} = \frac{2 \times 400 \times \sin 10^\circ}{g} = 14^s16$$

Rép. 14^s16.

3° *Où serait-il deux secondes plus tard ?*

Le mobile serait au-dessus de l'horizontale du point de départ, en un point dont nous allons déterminer les coordonnées x et y.

On a (M., n° 209)

$$x = at \cos \alpha = 400 \times 16 \times \cos 10^\circ = 6366$$

$$\text{et } y = at \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 14{,}16\left(400 \sin \alpha - \frac{g}{2} \times 14{,}16\right) = -158$$

Rép. $x = 6366$ mètres.
$y = -158$ »

Remarque. On sait (M., n° 211) que l'on trouverait la même valeur pour y, en faisant $t = -2$, ce qui donnerait des calculs plus courts.

4° *A quelle hauteur s'est-il élevé ?*

La flèche est donnée par la formule (M., n° 211)

$$y = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{400^2 \sin^2 10^\circ}{2g} = 245{,}93$$

Rép. 246 mètres.

5° *Quelle sera sa vitesse en atteignant l'horizontale du point de départ ?*

Les variations de la vitesse du projectile ont été étudiées dans le

problème 222 *bis;* on y voit que, pour des poids de même ordonnée donnée, les vitesses ont la même intensité, mais elles n'ont pas la même direction.

Rép. La vitesse est de 400 mètres.
Elle fait un angle de 170° avec l'horizontale.

6° *Quelle était sa vitesse au point culminant?*

D'après l'Ex. 104, on a

$$v = a \cos \alpha = 400 \cos 10° = 393{,}9$$

Rép. La vitesse était horizontale, son intensité était de 394m.

7° *En quel point sa vitesse serait-elle double de la vitesse initiale?*

L'Ex. 104 nous a donné pour V, intensité de la vitesse au bout du temps t,

$$V^2 = a^2 - 2agt \sin \alpha + g^2t^2$$

En faisant $V = 2a$, on trouve le temps au bout duquel la vitesse aura la valeur donnée; il sera facile ensuite d'en déduire les coordonnées du point cherché.

On a $$4a^2 = a^2 - 2gat \sin \alpha + g^2t^2$$

d'où $$g^2t^2 - 2gat \sin \alpha - 3a^2 = 0$$

par suite, $$t = \frac{a}{g}(\sin \alpha \pm \sqrt{3 + \sin^2 \alpha})$$

ce qui donne pour t

$$t' = 78^s \quad \text{ou} \quad t'' = -63^s9$$

La première valeur t' convient seule à l'énoncé; l'autre t'' suppose que le mobile était en mouvement avant de passer au point de départ A.

On voit que le mobile a la vitesse donnée, soit 63s9, avant d'arriver au point A, ou 63s9 après avoir atteint de nouveau l'horizontale du point A.

En mettant les valeurs t' et t'' dans la formule $x = at \cos \alpha$ (M., n° 209), on obtient

$$x = 72770^m \quad \text{et} \quad x = -67190^m$$

Si l'on met les valeurs de t' et de t'' dans la formule

$$y = at \sin \alpha = \frac{gt^2}{2}$$

on trouve, dans les deux cas, pour y la même valeur

$$y = -24468^m$$

ce qui vérifie la formule $y = \frac{a^2 - V^2}{2g}$ et les résultats trouvés au problème 222 *bis*. Cette valeur de y peut encore s'obtenir par la formule $e = \frac{1}{2} gt^2$, en remplaçant t par la valeur t''.

Rép. Les coordonnées du point cherché sont

$$x = 72770^{m} \quad \text{et} \quad y = -24468^{m}$$

Problème 225 bis.

Une sphère tombe sur un plan incliné à 30° sur l'horizon et rebondit, son élasticité étant supposée parfaite. En quel moment et en quel point la sphère touche-t-elle le plan horizontal, en supposant qu'elle touche le plan incliné à 5 mètres de l'arête? (Berlin, dipl. du Realschulen, 1880.)

Pour généraliser la question, désignons par θ l'angle du plan incliné, par h la hauteur de la chute de la sphère avant son contact avec le plan, et par d la distance BC de l'arête C au point de contact.

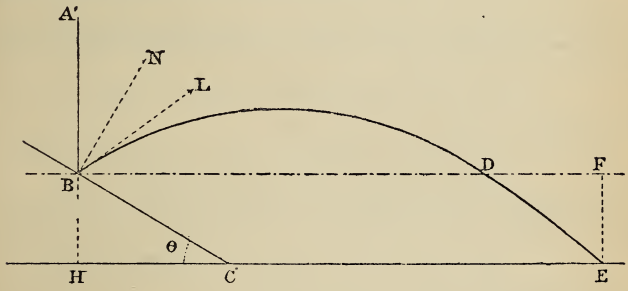


Fig. 322.

Le mobile fait un angle de réflexion LBN égal à l'angle d'incidence ABN $= \theta$; ce mobile est donc lancé sous un angle LBD $=$ ABD $-$ ABL $= 90° - 2\theta$.

Dans les formules du mouvement des projectiles, il faudra faire

$$\alpha = 90° - 2\theta$$

L'élasticité étant parfaite, le mobile est lancé suivant BL avec la vitesse qu'il avait en touchant ce plan; cette vitesse a est donc

$$a = \sqrt{2gh}$$

Durée du trajet. Le mobile arrivé en E se trouve au-dessous de l'horizontale du point de départ. L'ordonnée du point E est négative, elle est

$$EF = BH = -d \sin \theta$$

Le temps t que la sphère a mis pour arriver à ce point est donné par la formule (M., n° 211)

$$t = \frac{a \sin \alpha + \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2gy}}{g}$$

dans laquelle $a = \sqrt{2gh}$, $\alpha = 90^\circ - 2\theta$, $y = -d \sin \theta$; ces substitutions donnent

$$t = \frac{\cos 2\theta \sqrt{2gh} + \sqrt{2g\,(h \cos^2 2\theta + d \sin \theta)}}{g} \qquad (1)$$

Distance. La distance demandée CE est égale à HE ou BF, abscisse du point E, diminuée de HC; on a donc

$$\mathrm{CE} = \mathrm{BF} - \mathrm{HC}$$

L'abscisse BF se tire de la formule (M., n° 209)

$$x = at \cos \alpha$$

dans laquelle on fait $a = \sqrt{2gh}$ et $\alpha = 90^\circ - 2\theta$

ce qui fournit $\mathrm{BF} = t \sin 2\theta \sqrt{2gh}$

En remplaçant t par sa valeur (1), on obtient, après simplification,

$$\mathrm{BF} = h \sin 4\theta + \sqrt{h\,(h \sin^2 4\theta + 4d \sin^2 2\theta \sin \theta)}$$

Et puisque $\mathrm{HC} = d \cos \theta$, on a

$$\mathrm{CE} = h \sin 4\theta - d \cos \theta + \sqrt{h\,(h \sin^2 4\theta + 4d \sin^2 2\theta \sin \theta)} \qquad (2)$$

Discussion. Pour que la sphère tombe sur le plan horizontal et non pas sur le plan incliné, il faut que l'on ait $\mathrm{CE} \geqq 0$; la plus grande valeur de h arrive donc pour $\mathrm{CE} = 0$, alors on a

$$\sqrt{h\,(h \sin^2 4\theta + 4d \sin^2 2\theta \sin \theta} = d \cos \theta - h \sin 4\theta$$

ou, en élevant au carré,

$$h^2 \sin^2 4\theta + 4dh \sin^2 2\theta \sin \theta = d^2 \cos^2 \theta - 2dh \sin 4\theta \cos \theta + h^2 \sin^2 4\theta$$

d'où $dh\,(4 \sin^2 2\theta \sin \theta + 2 \sin 4\theta \cos \theta) = d^2 \cos^2 \theta$

En divisant par d, développant $\sin 4\theta$ et mettant $4h \sin 2\theta$ en facteur commun, on obtient

$$4h \sin 2\theta\,(\sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta) = d \cos^2 \theta$$

Développant encore $\sin 2\theta$, on a

$$8h \sin \theta \cos \theta\,(2 \sin^2 \theta \cos \theta + \cos 2\theta \cos \theta) = d \cos^2 \theta$$

On peut tout diviser par $\cos^2 \theta$, et l'on trouve

$$8h \sin \theta\,(2 \sin^2 \theta + \cos 2\theta) = d$$

qui devient, en developpant $\cos 2\theta$,

$$8h \sin \theta\,(2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = d$$

La parenthèse se réduit à 1; par suite,

$$8h \sin \theta = d$$

d'où

$$h = \frac{d}{8 \sin \theta} \qquad (4)$$

C'est le minimum de la hauteur de chute, la sphère alors tombe au pied du plan incliné; pour toute valeur de h plus petite, elle retomberait sur le plan incliné, question qui sera traitée dans le problème suivant. On voit que la hauteur minimum augmente, lorsque la distance d augmente ou que l'angle θ diminue.

Cas particuliers. Il est intéressant de voir ce que les formules trouvées deviennent dans certains cas remarquables; on a de plus l'avantage de vérifier l'exactitude de ces formules et, par suite, des calculs assez laborieux qui y ont conduit.

I. *Supposons* $d = 0$

Les formules (1) et (2) deviennent

$$t = \frac{2 \cos 2\theta \sqrt{2gh}}{g} \quad \text{et} \quad CE = 2h \sin 4\theta$$

Ces valeurs conviennent parfaitement, le plan horizontal passe alors par le point de départ B, les formules se rapportent à l'amplitude BD du jet et sont identiques avec celles qu'on obtiendrait en faisant

$$a = \sqrt{2gh} \quad \text{et} \quad \alpha = 90^\circ - 2\theta$$

dans les formules (M., n° 210)

$$t = \frac{2a \sin \alpha}{g} \quad \text{et} \quad x = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g}$$

On a aussi, formule (4), $h = 0$ pour minimum de h, ce qui est évident.

Si, dans ce cas, on suppose encore $h = 0$, les valeurs de t et de CE s'annulent, la bille est alors simplement posée; elle reste au point B.

II. *Supposons* $\theta = 0$

On a $$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Le plan est alors horizontal, et la formule exprime deux fois le temps que met un mobile pour tomber de la hauteur h; c'est qu'en effet la sphère rebondit verticalement jusqu'à la hauteur h et retombe au point B.

La formule (2) devient $CE = -d$

C'est qu'en effet le corps retombe au point B, à gauche du point C.

La formule (4) donne l'infini pour le minimum de h, ce qui indique une impossibilité : le mobile tombant toujours au point B ne pourra atteindre le point C.

III. *Supposons* $\theta = 30^\circ$

Les formules (1), (2) et (4) donnent

$$t = \frac{\sqrt{h} + \sqrt{h + 2d}}{\sqrt{2g}}, \quad CE = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[h - d + \sqrt{h(h + 2d)}\right]$$

et le minimum de $$h = \frac{d}{4}$$

résultats identiques à ceux que donnent les formules du mouvement des projectiles (M., n° 209 et suiv.) quand on fait

$$\alpha = 30^\circ, \quad a = \sqrt{2gh} \quad y = -\frac{d}{2}$$

III. *Supposons* $\theta = 45^\circ$

On trouve $t = \sqrt{\frac{d\sqrt{2}}{g}}$, $CE = -d\frac{\sqrt{2}}{d} + \sqrt{2dh\sqrt{2}}$

Le mobile est alors lancé horizontalement; en se reportant au problème 222, on voit que les valeurs obtenues satisfont à la question.

Le minimum de h est alors $h = \frac{d}{4\sqrt{2}}$, résultat facile à vérifier.

Application. Dans la question proposée, le plan est incliné de 30°, et la distance d est de 5 mètres.

En faisant $d = 5$ dans les formules trouvées plus haut pour $\theta = 30^\circ$, on obtient

$$t = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{h + 10}}{\sqrt{2g}}$$

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[h - 5 + \sqrt{h(h + 10)}\right]$$

On ne donne pas la valeur numérique de d; si nous la faisons égale aussi à 5 mètres, on trouve

$$t = \sqrt{\frac{5}{2g}}(1 + \sqrt{3}) = 0^s\,75$$

$$CE = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{5 \times 15} = 7^m\,5$$

Problème 225 ter.

Une sphère en ivoire tombe librement d'une hauteur h *et rencontre un plan incliné résistant, dont l'angle avec l'horizon est* α. *A cause de son élasticité imparfaite, elle ne rebondit qu'avec une fraction* f *de la vitesse. A quelle distance du premier point de rencontre rencontre-t-elle de nouveau le plan incliné, après avoir rebondi une fois?*

Application. $h = \frac{1}{2}m.$, $f = \frac{2}{3}$, $\alpha = 10^\circ$

On pourra en outre déterminer l'angle d'incidence à la fin du premier bond, et la vitesse au moment de l'incidence, l'amplitude du second bond, et ainsi de suite. (Realschulen, Berlin, sept. 1880.)

Dans les formules du mouvement des projectiles, l'angle du jet étant désigné par α, afin d'éviter toute confusion, nous nommerons θ l'angle du plan incliné. Pour établir les for-

mules, nous désignerons par a la vitesse avec laquelle rebondit la sphère.

Nous allons d'abord déterminer la distance $BB_1 = z$, ou l'amplitude du 1er bond.

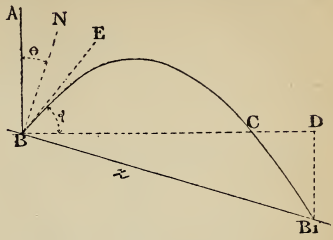


Fig. 323.

Amplitude du 1er bond. Le point B_1, étant sur la trajectoire, doit satisfaire la relation (M., n° 209)

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2a^2 \cos^2 \alpha}$$

ou
$$2a^2 y \cos^2 \alpha = 2a^2 x \sin \alpha \cos \alpha - gx^2 \qquad (1)$$

L'abscisse $x = BD = z \cos \theta$, l'ordonnée $y = B_1D$ est négative; on a
$$y = -z \sin \theta$$

L'angle α du jet est l'angle EBC qui égale ABD — 2ABN d'où
$$\alpha = 90^\circ - 2\theta$$

En mettant ces valeurs dans la formule (1), elle devient

$$-2a^2 z \sin\theta \cos^2(90^\circ - 2\theta) = 2a^2 z \cos\theta \sin(90^\circ - 2\theta) \times \cos(90^\circ - 2\theta) - gz^2 \cos^2\theta$$

d'où $gz^2 \cos^2 \theta = 2a^2 z \cos \theta \cos 2\theta \sin 2\theta + 2a^2 z \sin \theta \sin^2 2\theta$

En divisant par z, ce qui enlève la solution $z = 0$, correspondant au point B, et en développant $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$, on trouve

$$gz \cos^2 \theta = 4a^2 \sin \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 8a^2 \sin^3 \theta \cos^2 \theta$$

Divisant par $\cos^2 \theta$, on a

$$gz = 4a^2 \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta)$$

La parenthèse étant égale à 1, on a

$$z = \frac{4a^2 \sin \theta}{g}$$

c'est l'amplitude cherchée.

Durée du 1er bond. On peut tirer le temps t de la formule (M., n° 209)
$$x = at \cos \alpha$$

En y faisant $x = z \cos \theta$ et $\alpha = 90^\circ - 2\theta$, elle devient

$$z \cos \theta = at \sin 2\theta$$

Mais $z = \frac{4a^2 \sin \theta}{g}$; en mettant cette valeur, on obtient

$$\frac{2a^2 \sin 2\theta}{g} = at \sin 2\theta$$

d'où $$t = \frac{2a}{g} \text{ *}$$

Vitesse à la fin du 1er bond. Au problème 222 *bis*, on a trouvé la formule $$V^2 = a^2 - 2gat \sin \alpha + g^2t^2$$

où V désigne la vitesse du projectile au bout du temps t. En introduisant dans cette formule les valeurs obtenues pour α et t, elle devient

$$V^2 = a^2 - 2ga \frac{2a}{g} \sin (90^\circ - 2\theta) + g^2 \frac{4a^2}{g^2}$$

d'où $$V^2 = 5a^2 - 4a^2 \cos 2\theta = a^2 [5 - 4 (1 - 2 \sin^2 \theta)]$$

et $$V^2 = a^2 (1 + 8 \sin^2 \theta)$$

par suite, $V = a \sqrt{1 + 8 \sin^2 \theta}$

C'est la vitesse au point B_1.

---

* Si, pour trouver t, on avait employé la formule

$$y = at \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

on aurait eu

$$- z \sin \theta = at \sin (90^\circ - 2\theta) - \frac{gt^2}{2}$$

qui donne, en remplaçant z par sa valeur,

$$g^2t^2 - 2agt \cos 2\theta - 8a^2 \sin^2 \theta = 0$$

par suite, $$t = \frac{ag \cos 2\theta \pm \sqrt{a^2g^2 \cos^2 2\theta + 8a^2g^2 \sin^2 \theta}}{g^2}$$

La valeur négative de t est à rejeter; on a, en simplifiant,

$$t = \frac{a}{g} \left[\cos 2\theta + \sqrt{\cos^2 2\theta + 8 \sin^2 \theta}\right]$$

valeur qui, bien que semblant différente de celle trouvée plus haut, s'y ramène comme il suit :

$$\cos^2 2\theta + 8 \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 2\theta + 8 \sin^2\theta = 1 - 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta$$
$$= 1 - 4 \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + 8 \sin^2 \theta = 1 + 4 \sin^2 \theta + 4 \sin^4 \theta = (1 + 2 \sin^2 \theta)^2$$

par suite, $$t = \frac{a}{g} [1 - 2 \sin^2 \theta + 1 + 2 \sin^2 \theta] = \frac{2a}{g}$$

Incidence à la fin du 1er bond. L'angle $GB_1H = \beta$, que la vitesse du mobile au bout du temps t fait avec l'horizontale, est donné par la formule (Probl. 222 *bis*)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin \alpha - gt}{a \cos \alpha}$$

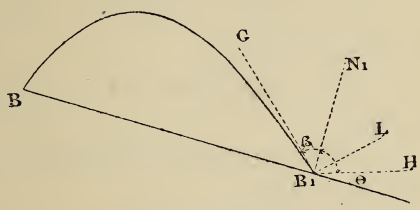


Fig. 324.

En faisant les substitutions, on obtient

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \sin (90^\circ - 2\theta) - g \dfrac{2a}{g}}{a \cos (90^\circ - 2\theta)}$$

$$= \frac{\cos 2\theta - 2}{\sin 2\theta}$$

par suite, $$\operatorname{tg} \beta = - \frac{1 + 2 \sin^2 \theta}{\sin 2\theta}$$

Connaissant l'angle $\beta = GB_1H$, on a aisément l'angle LB_1H, qui est l'angle du jet du second bond.

Puis, au moyen de cet angle et de la vitesse V, on obtient, comme ci-dessus, l'amplitude du second bond, et ainsi de suite.

Dans la question proposée, le mobile tombe d'une hauteur h; sa vitesse est $\sqrt{2gh}$

A cause de l'élasticité imparfaite, la bille rebondit avec une vitesse $f\sqrt{2gh}$

Pour obtenir les formules demandées, il faut faire

$$a = f\sqrt{2gh} \quad \text{et} \quad \theta = \alpha$$

on obtient :

Amplitude du 1er bond,

$$z = \frac{4f^2\, 2gh \sin\alpha}{g} = 8f^2h \sin\alpha$$

Durée du 1er bond,

$$t = \frac{2f\sqrt{2gh}}{g} = 2f\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Vitesse à la fin du 1er bond,

$$V = f\sqrt{2gh}\,\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha}$$

Vitesse du 2e jet,

$$V_1 = fV = f^2\sqrt{2gh}\,\sqrt{1 + 8\sin^2\alpha}$$

Incidence à la fin du 1er jet,

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{1 + 2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

Application. En prenant les valeurs numériques de l'énoncé

$$h = \frac{1}{2}, \quad f = \frac{2}{3}, \quad \alpha = 10^\circ$$

on obtient

$$a = 2^{\mathrm{m}}088$$
$$z = 0^{\mathrm{m}}308$$
$$t = 0^{\mathrm{s}}42$$
$$V = 2^{\mathrm{m}}326$$
$$\beta = 107^\circ 53$$

Problème 226

D'après les données suivantes, quel est le rapport de la portée dans l'air à la portée dans le vide pour chacune des armes indiquées :

Nom de l'arme.	Angle de visée.	Vitesse initiale.	Portée mesurée dans l'air.
Canon lisse de 12,	40°	488m	3800m
Canon rayé de 12,	30°	307m	4100m
Canon Reffye de 7,	20°	360m	4900m
Fusil (1842),	25°	480m	1000m
Chassepot,	20°	450m	2700m

Le tableau suivant résume les résultats.

		Portée maximum dans le vide.	Rapport demandé.
Arme ancienne.	Canon lisse de 12,	24300	$\frac{1}{6,4}$
» nouvelle.	Canon rayé de 12,	9600	$\frac{1}{2,34}$
	Canon Reffye de 7,	13200	$\frac{1}{2,7}$
» ancienne.	Fusil (1842)	23500	$\frac{1}{23,5}$
» nouvelle.	Chassepot,	21000	$\frac{1}{7,7}$

Problème 227

Mesure de la vitesse d'un projectile. (Procédé Eytelwein.) *Un cylindre creux, dont les bases sont en papier, tourne autour de son axe d'un mouvement uniforme de vitesse* v; *une balle lancée parallèlement à l'axe fait un trou dans chaque base; les rayons qui passent par ces trous font un angle* α: *quelle est la vitesse de la balle,* l *étant la longueur du cylindre?*

Soit x la vitesse de la balle dont le mouvement est supposé uniforme pendant qu'elle traverse le cylindre; soit t le temps qu'elle met pour traverser le cylindre, on a

$$x = \frac{l}{t}$$

Le temps t que la balle a mis pour parcourir l est donné par l'angle α dont le cylindre a tourné; le cylindre a fait une partie de son tour marquée par $\frac{\alpha}{360}$.

La vitesse étant v, le point qui est à 1^m de distance de l'axe décrit, dans une seconde, v mètres; la durée de la rotation est donc $\frac{2\pi}{v}$.

Par suite, le temps t mis pour faire une partie du tour marquée par $\frac{\alpha}{360}$ sera donc

$$t = \frac{2\pi\alpha}{360v} = \frac{\pi\alpha}{180v}$$

Et la vitesse cherchée est donc

$$x = \frac{180vl}{\pi\alpha}$$

Application. En faisant $l = 2^m$, $\alpha = 10^o$, et en supposant que le cylindre fasse 5 tours par seconde, on a

$$v = 5 \times 2\pi = 10\pi$$

Et la formule donne

$$x = \frac{180 \times 10\pi \times 2}{\pi \times 10} = 360^m$$

On voit qu'il suffit donc de donner au cylindre une vitesse assez faible pour mesurer la vitesse considérable du projectile.

Problème 228

Un mobile est lancé sous un angle α *avec une vitesse* v : *au bout de combien de temps sera-t-il à une hauteur* h ? (*Discussion.*)

Dans le cours (M., n° 211), on a trouvé la formule qui donne le temps qu'il faut au mobile pour atteindre le but ; en mettant dans cette formule les lettres de l'énoncé, elle devient

$$t = \frac{v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha - 2gh}}{g}$$

Discussion. La hauteur a pour maximum

$$h = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

le mobile y arrive au bout du temps $t = \frac{v \sin \alpha}{g}$.

Pour toute valeur de h plus petite que son maximum, on trouve deux valeurs pour t: la plus petite, t', donne l'instant où, dans son mouvement ascendant, le mobile est à la hauteur donnée ; la plus grande, t'', se rapporte au moment où, après avoir atteint le point culminant, le mobile, en descendant, se trouve de nouveau à la hauteur donnée.

Ces deux valeurs t' et t'' sont équidistantes de $t = \frac{v \sin \alpha}{g}$ qui correspond à la valeur maximum.

Si l'on fait $h = 0$, on trouve $t' = 0$, qui correspond au départ, et $t'' = \frac{2v \sin \alpha}{g}$, qui correspond à l'autre extrémité du jet.

Si l'on donne à h des valeurs négatives, on trouve pour t' une

valeur positive plus grande que $\frac{2v \sin \alpha}{g}$; elle donne le moment où, après avoir atteint l'horizontale du point de départ, le mobile est descendu d'une hauteur $-h$.

La valeur t'' est négative, elle ne convient pas si le mobile est lancé du point A ; mais, si le mobile est en mouvement avant d'arriver au point A, la valeur négative indique que, t'' secondes avant d'arriver au point A pris pour origine, le mobile est au-dessous de l'horizontale, à une distance $-h$.

Pour toutes les hauteurs plus petites que le maximum, on trouve donc deux valeurs de t pour lesquelles le mobile est à la hauteur donnée.

Problème 229

Étudier la variation de la vitesse verticale d'un mobile lancé avec une vitesse v *sous un angle* α.

Cette question fait partie du problème 222 *bis*.

Problème 230

Deux points A *et* A_1 *sont sur une même horizontale, à une distance* d ; *du premier on lance un mobile avec une vitesse* a, *sous un angle* α ; *du second on lance au même instant un autre mobile avec une vitesse* a_1, *sous un angle* α_1 ; *les deux mobiles se meuvent dans un même plan vertical, on demande :*

1° *Quelle distance sépare les mobiles après un temps* t ?

2° *Quand cette distance sera-t-elle minimum ?*

3° *Que faut-il pour que les deux mobiles se rencontrent ?*

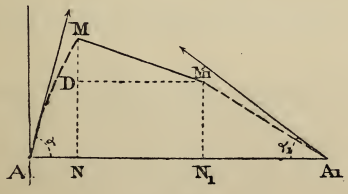


Fig. 325.

Soient A et A_1 les points d'où les mobiles ont été lancés avec les vitesses a et a_1 ; faisons $AA_1 = d$.

Supposons qu'au bout du temps t les mobiles soient en M et M_1 et que $MM_1 = b$.

1° *Quelle distance sépare les mobiles après un temps* t ?

On a $\quad MM_1^2$ ou $b^2 = \overline{MD}^2 + \overline{DM_1}^2$

Or $\quad MD = MN - M_1N_1 = (a \sin \alpha - a_1 \sin \alpha_1)\, t$

$$DM_1 = AN_1 - AN = AA_1 - A_1N_1 - AN = d - a_1 t \cos \alpha_1 - at \cos \alpha = d - (a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)\, t$$

d'où $\quad b^2 = d^2 - 2d\,(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)\, t$

$$+ \left[(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)^2 + (a \sin \alpha - a_1 \sin \alpha_1)^2 \right] t^2$$

qui devient $\quad b^2 = d^2 - 2d\,(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)\, t$

$$+ \left[a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + a^2_1 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) + 2aa_1 (\cos \alpha \cos \alpha_1 - \sin \alpha \sin \alpha_1) \right] t^2$$

et enfin $\quad b^2 = d^2 - 2d\,(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)\, t$

$$+ \left[a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1) \right] t^2 \qquad (1)$$

La valeur positive de b est seule à conserver, on a donc

Rép.

$$b = \sqrt{\left[a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)\right] t^2 - 2d(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1) t + d^2} \qquad (2)$$

2° *Quand cette distance sera-t-elle minimum ?*

D'après la formule (1), la valeur de b^2 est donnée par un trinôme de la forme $At^2 - Bt + c$; or ce trinôme a un minimum

$$\frac{4\,Ac - B^2}{4A}$$

qui arrive pour $\quad t = \dfrac{B}{2A} \qquad$ (Alg., n° 250)

Le minimum de b^2 est donc

$$b^2 = \frac{4d^2\left[a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)\right] - 4d^2 (a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)^2}{4\left[a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)\right]} \qquad (3)$$

qui devient

$$b^2 = \frac{d^2\left[a^2(1 - \cos^2 \alpha) + a_1^2 (1 - \cos^2 \alpha_1) + 2aa_1 (\cos(\alpha + \alpha_1) - \cos \alpha \cos \alpha_1)\right]}{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)}$$

ou $\quad b^2 = \dfrac{d^2 (a^2 \sin^2 \alpha + a_1^2 \sin^2 \alpha_1 - 2aa_1 \sin \alpha \sin \alpha_1)}{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)}$

et enfin $\quad b^2 = \dfrac{d^2 (a \sin \alpha - a_1 \sin \alpha_1)^2}{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)}$

Le minimum de b est donc

$$b = \frac{d\,(a \sin \alpha - a_1 \sin \alpha_1)}{\sqrt{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)}} \qquad (4)$$

Il arrive pour

$$t = \frac{d\,(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)}{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)} \tag{5}$$

3° *Conditions pour que les deux mobiles se rencontrent.*

Pour que les deux mobiles se rencontrent, il faut que le minimum de b^2 soit égal à zéro ; on doit donc avoir

$$\frac{d^2\,(a \sin \alpha - a_1 \sin \alpha_1)^2}{a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1)} = 0 \tag{6}$$

Discussion. I. *Le dénominateur n'est pas nul.*

La condition (6) est remplie quand l'un des facteurs du numérateur est nul.

1° $$d = 0$$

Les mobiles sont ensemble au point de départ.

2° $$a \sin \alpha = a_1 \sin \alpha_1 \tag{7}$$

Cette égalité entraîne la suivante *

$$a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1) = (a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)^2$$

Par suite, la valeur (5) trouvée pour t devient

$$t = \frac{d\,(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)}{(a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)^2}$$

d'où $$t = \frac{d}{a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1} \tag{8}$$

La condition $a \sin \alpha = a_1 \sin \alpha_1$ exprime que les deux mobiles sont constamment à la même hauteur l'un que l'autre.

---

* On peut le montrer par les transformations suivantes :

$$a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos (\alpha + \alpha_1) = a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos \alpha \cos \alpha_1 - 2aa_1 \sin \alpha \sin \alpha_1$$

Mais

$$2aa_1 \sin \alpha \sin \alpha_1 = aa_1 \sin \alpha \sin \alpha_1 + aa_1 \sin \alpha \sin \alpha_1 = a^2 \sin^2 \alpha + a_1^2 \sin^2 \alpha_1$$

à cause de la condition $a \sin \alpha = a_1 \sin \alpha_1$

Le dénominateur devient

$$a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos \alpha \cos \alpha_1 - a^2 \sin^2 \alpha - a_1^2 \sin^2 \alpha_1$$

ou $$a^2 (1 - \sin^2 \alpha) + a_1^2 (1 - \sin^2 \alpha_1) + 2aa_1 \cos \alpha \cos \alpha_1$$

$$= a^2 \cos^2 \alpha + a_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2aa_1 \cos \alpha \cos \alpha_1 = (a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)^2$$

La condition $d = (a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1)\, t$ indique que les projections horizontales des deux mobiles se confondent, ces mobiles sont donc sur la même ordonnée; or nous venons de voir qu'ils sont à la même hauteur, ils sont donc au même point, ce qui vérifie les formules obtenues.

II. *Le dénominateur est nul.*

Il peut s'écrire

$$a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos(\alpha + \alpha_1) = a^2 + a_1^2 - 2aa_1 + 2aa_1$$
$$+ 2aa_1 \cos(\alpha + \alpha_1) = (a - a_1)^2 + 2aa_1 [1 + \cos(\alpha + \alpha_1)]$$

Sous cette forme, on voit que le dénominateur ne peut être nul que si l'on a en même temps

$$a = a_1 \quad \text{et} \quad \cos(\alpha + \alpha_1) = -1$$

d'où

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$$

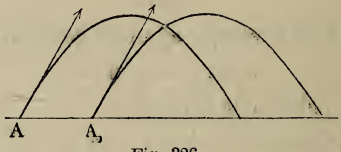


Fig. 326.

Cette dernière égalité montre qu'alors les mobiles sont lancés suivant des directions parallèles, et comme ils ont la même vitesse, la rencontre est impossible, à moins que l'on n'ait en même temps $d = 0$; alors les mobiles seraient constamment ensemble.

Remarque. Dans le cas où les mobiles se rencontrent, nous venons de voir qu'ils sont constamment à la même hauteur; ils s'élèvent pendant un temps exprimé par

$$\frac{a \sin \alpha}{g} \qquad \text{(M., n° 211)}$$

Si donc on a

$$\frac{d}{a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1} < \frac{a \sin \alpha}{g}$$

la rencontre a lieu pendant que les mobiles s'élèvent.

Si $$\frac{d}{a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1} = \frac{a \sin \alpha}{g}$$

les mobiles se rencontrent au point culminant de leurs trajectoires.

Si l'on a $$\frac{d}{a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1} > \frac{a \sin \alpha}{g}$$

la rencontre a lieu pendant la descente.

Et si $$\frac{d}{a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1} > \frac{2a \sin \alpha}{g}$$

la rencontre se fait au-dessous de l'horizontale AA_1.

2e méthode. On résout directement la question de la rencontre des mobiles d'une manière très simple.

Soit M le point de rencontre des deux mobiles, et t le temps au bout duquel se fait cette rencontre.

Puisque l'ordonnée MN est commune aux deux trajectoires, on doit avoir (M., n° 209)

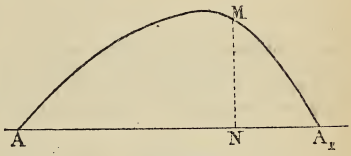


Fig. 327.

$$at \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = a_1 t \sin \alpha_1 - \frac{gt^2}{2}$$

d'où $$a \sin \alpha = a_1 \sin \alpha_1$$

C'est l'équation de condition trouvée plus haut (7).

On a aussi la somme des abscisses AN et A_1N qui est égale à AA_1, ce qui donne $$d = at \cos \alpha + a_1 t \cos \alpha_1$$

d'où l'on tire $$t = \frac{d}{a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1}$$

qui donne l'époque de la rencontre.

3e méthode. On peut encore résoudre la question de la rencontre des deux mobiles, sans avoir recours aux formules du mouvement des projectiles.

On donne à tout le système un mouvement contraire à celui qu'imprime la pesanteur; alors les mobiles peuvent être considérés comme se mouvant seulement en vertu de leur vitesse initiale.

Le premier mobile parcourt AB avec la vitesse a, dans le temps que le second parcourt A_1B avec la vitesse a_1.

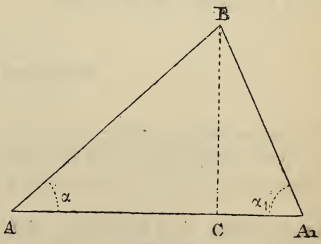


Fig. 328.

En désignant par t le temps que mettent les mobiles pour arriver au point de rencontre B, on a $$\frac{AB}{a} = \frac{A_1B}{a_1} = t$$

d'où $$\frac{AB}{A_1B} = \frac{a}{a_1}$$

Le triangle ABA_1 donne

$$\frac{AB}{A_1B} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} = \frac{a}{a_1}$$

par suite,

$$a \sin \alpha = a_1 \sin \alpha_1$$

On a aussi

$$AB \cos \alpha + A_1B \cos \alpha_1 = d$$

d'où

$$at \cos \alpha + a_1 t \cos \alpha_1 = d$$

qui donne

$$t = \frac{d}{a \cos \alpha + a_1 \cos \alpha_1}$$

équations obtenues par les autres méthodes.

Quand on a le point B, pour obtenir le véritable point de rencontre des deux mobiles, il faut prendre sur la verticale menée par le point B, au-dessous de ce point, une longueur h donnée par la formule

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

dans laquelle t a la valeur obtenue ci-dessus.

Remarques. I. Cette troisième méthode a l'avantage de ne pas nécessiter que les points A et A_1 soient sur une même horizontale.

II. Si les mobiles ne partent pas au même moment, on cherche la position du mobile parti le premier; au moment où part le second, on trouve encore la direction et l'intensité de la vitesse que possède alors le premier mobile, et l'on est ramené au cas précédent.

III. On pourrait donner la vitesse du mobile en direction et en intensité et chercher quelle direction devrait avoir le second mobile, dont on connaît la vitesse, pour atteindre le premier. On serait ramené au problème 219; la discussion se ferait de la même manière, et on trouverait ensuite la position du point de rencontre comme ci-dessus.

Problème 231

Un corps tombe d'une hauteur h ; *à quelle distance du pied de la verticale, menée par le point de départ, touche-t-il le sol? Le lieu où se fait l'expérience est à une latitude* λ.

Application. *A Freyberg, Reich a fait tomber un mobile dans un puits de* 158^m50. *Quelle dut être la déviation?* (Latitude $50^o53'$ N.)

En mécanique rationnelle, on démontre que l'écart Δ est donné par la formule

$$\Delta = \frac{2\omega h \cos \lambda}{3g} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Si l'on fait $\omega = \frac{\pi}{43,200}$

$\lambda = 50°53'$

$h = 158^m56$

on obtient $\Delta = 0,0276$

Les expériences de Reich ont fourni pour moyenne des écarts observés $\Delta = 0^m,0283$

Déterminations de mouvements.

Problème 232

Mouche de Lahire. *Un cercle roule en restant tangent intérieurement à un cercle de rayon double. Quel est le mouvement d'un point de la circonférence du premier ?*

Il faut prouver que chaque point de cercle intérieur décrit un diamètre du cercle extérieur.

Considérons le point A, par exemple, et supposons que le cercle C ait roulé sans glissement sur le cercle O, et qu'il occupe la position C_1 ; il faut démontrer que le point A est resté constamment sur le diamètre AO.

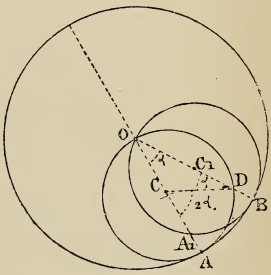


Fig. 329.

En effet, le triangle OCD est isocèle, puisque OC = CD, l'angle extérieur ACD = 2α ; par suite, l'arc AB a même longueur que l'arc AD*, et le point D est venu en B ; or l'arc BA_1 = l'arc AD comme interceptés tous deux par l'angle α dans le même cercle ; donc le point A est venu en A_1.

---

* Si r est le rayon de la petite circonférence, R celui de la grande, on a

$$R = 2r$$

$$\text{L'arc AD} = 2\pi r \times \frac{2\alpha}{360} = \frac{4\pi r\alpha}{360}$$

et $$\text{arc AB} = 2\pi R \times \frac{\alpha}{360} = \frac{4\pi r\alpha}{360}$$

donc $$\text{arc AD} = \text{arc AB}$$

Ce raisonnement est vrai, quel que soit l'angle α, le point A reste donc constamment sur le diamètre AO.

Remarque. Cette propriété est utilisée pour transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. Ainsi, dans la machine pneumatique de Deleuil, on transforme, au moyen de la mouche de Lahire, le mouvement circulaire continu de la manivelle en mouvement rectiligne alternatif imprimé au piston.

Problème 233

Deux tiges sont soudées en C, *le point* A *est fixe, le point* B *se meut d'un mouvement uniforme ; quel sera le mouvement du point* M? — *Quelle position devra occuper le point* M *pour que son mouvement soit le même que celui de* B?

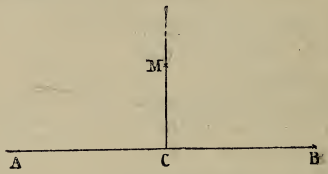


Fig. 330.

Pendant que le point B décrit l'arc BB_1, le point M décrit l'arc MM_1, et comme les angles BAB_1 et MAM_1 sont égaux, ces deux points ont même vitesse angulaire.

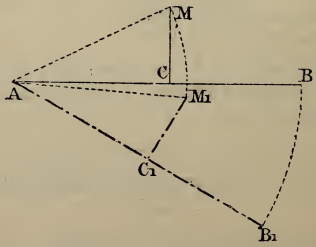


Fig. 331.

Si l'on veut que M ait la même vitesse linéaire que B, il faut que AM soit égal à AB.

Problème 234

1° *Étudier le mouvement du point* B *sur* OX *lorsque* A *se meut d'un mouvement uniforme sur* OY.

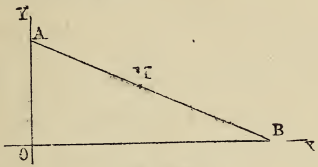


Fig. 332.

2° *Quelle sera la trajectoire du point* M, *milieu de* AB?

Quel devrait être le mouvement de A *pour que celui de* M *fût uniforme?*

1° *Mouvement du point* B.

Le point B aura un mouvement rectiligne alternatif. Cherchons le rapport des vitesses v du point A et v' du point B.

Supposons que le point A soit à une distance $OA = a$ du point O, et qu'il parcoure $AA_1 = \alpha$; pendant ce temps, le point B décrit BB_1. On a, en faisant $AB = l$,

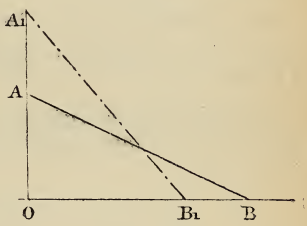


Fig. 333.

$$BB_1 = OB - OB_1 = \sqrt{l^2 - a^2} - \sqrt{l^2 - (a + \alpha)}$$

par suite, $$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{\sqrt{l^2 - a^2} - \sqrt{l^2 - (a + \alpha)^2}}{\alpha}$$

qui devient, en multipliant haut et bas par la somme des radicaux,

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{2a\alpha + \alpha^2}{a\left(\sqrt{l^2 - a^2} + \sqrt{l^2 - (a + \alpha)^2}\right)}$$

ou $$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{2a + \alpha}{\sqrt{l^2 - a^2} + \sqrt{l^2 - (a + \alpha)^2}}$$

Le rapport des vitesses v' et v est la limite du rapport $\frac{BB_1}{AA_1}$, lorsque α tend vers zéro.

Alors $\frac{v'}{v} = \lim \frac{BB_1}{AA_1} = \lim \frac{2a + \alpha}{\sqrt{l^2 - a^2} + \sqrt{l^2 - (a + \alpha)^2}}$

donc $$\frac{v'}{v} = \frac{2a}{2\sqrt{l^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1}}$$

Discussion. Le radical est toujours réel, puisque l ne peut être plus petit que a.

Pour que $v' = v$, c'est-à-dire pour que la vitesse du point B soit égale à celle du point A, il faut que $\frac{v'}{v} = 1$, ce qui exige que $l^2 = 2a^2$ ou $a^2 = \frac{l^2}{2}$; alors le triangle rectangle AOB est isocèle.

On a $v' < v$, pour $a^2 < \frac{l^2}{2}$, alors on a aussi $OB < OA$; la vitesse v' du point B diminue à mesure qu'il se rapproche du point O.

Au contraire, on a $v' > v$, pour $a^2 > \frac{l^2}{2}$ et, par suite, $OB > OA$; la vitesse v' augmente à mesure que le point A s'éloigne de O.

2° *Quelle sera la trajectoire du point* M, *milieu de* AB? *Que devrait être le mouvement du point* A *pour que celui de* M *fût uniforme?*

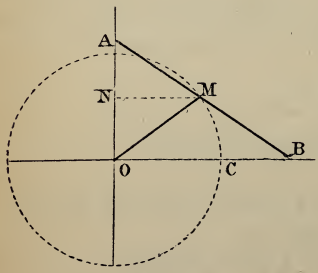


Fig. 334.

Dans le triangle rectangle, la médiane OM est moitié de l'hypoténuse AB, le point AM sera donc toujours à la même distance du point O et décrira un cercle dont le diamètre est égal à AB.

Si le mouvement de M est uniforme sur la circonférence, l'arc CM grandit proportionnellement au temps, ON croît comme le sinus de l'arc CM, et OA, qui est égal à 2ON, croît aussi comme le sinus de l'arc CM.

Réciproquement, si le chemin décrit par le point A est proportionnel à sin vt, le point M aura un mouvement uniforme. (Voir le problème 235.)

Application. Le balancier d'Olivier Evans utilise la propriété précédente pour transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif.

On fait décrire une circonférence au point M, le point A glisse suivant une droite et le point B a un mouvement rectiligne alternatif.

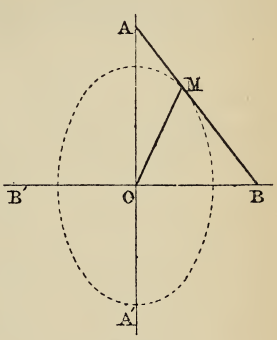


Fig. 335.

Remarque. Si le point M n'est pas au milieu de AB, il décrit une ellipse (G., nº 643) ayant AM et MB pour demi-axes. On utilise cette propriété pour décrire les ellipses d'un mouvement continu; un crayon M est fixé en un point de la règle AB dont les extrémités A et B sont assujetties à glisser le long des rainures AA', BB'; l'appareil prend le nom de *compas elliptique*.

Problème 235

*Un point se meut uniformément sur une circonférence, étudier le mouvement de la projection du point sur un diamètre du cercle *. — Lignes figuratives.*

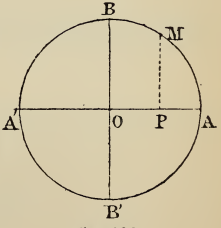


Fig. 336.

Soit un point M qui se meut uniformément sur la circonférence O dont le rayon est pris pour unité, dans le sens positif AB, avec une vitesse a; au bout du temps t, il aura parcouru

$$AM = at$$

Il faut étudier le mouvement de sa projection P sur le diamètre AA'.

En prenant le point O pour origine des distances, on a $e = OP$.

Mais OP est le cosinus de l'arc AM, on a donc

$$e = \cos at \qquad (1)$$

Espaces. Étudions le mouvement du point P; à l'origine du temps, ce point est à une distance $e = OA$ de l'origine des espaces; à mesure que le temps grandit, la distance e diminue, elle est nulle lorsque le point M est en B, devient négative et continue à diminuer pendant que le mobile va de B en A',

* On trouvera plus loin (Probl. 280) une autre étude de cette question.

alors $e = -OA'$; le point M dépassant A′, le point P se rapproche de O; e devient nul de nouveau quand M est en B′, puis augmente jusqu'à $+OA$; il repasse par les mêmes valeurs et dans le même ordre, si le mobile décrit de nouvelles circonférences.

Pour tracer la ligne représentative des espaces, on prend pour abscisses les longueurs des arcs décrits par le point M; le mouvement étant uniforme, ces longueurs sont proportionnelles aux temps. Sur les données, on porte les longueurs correspondantes de OP. On obtient ainsi la courbe ABCD.

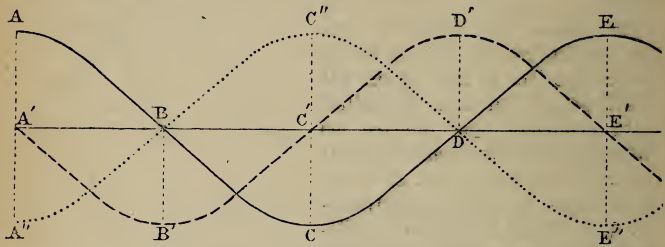


Fig. 337.

Elle montre les diverses phases du mouvement que nous venons d'étudier; elle coupe l'axe des X aux points B, D, qui correspondent aux positions B et B′ du mobile, présente un maximum aux points A, E qui correspondent à la position A, un minimum C pour la position A′; les points d'inflexion B et D se trouvent aux points où elle coupe l'axe des X.

La formule (1) montre que cette courbe est une *sinusoïde* (Trig., nº 11, 2º). Elle est évidemment indéfinie dans les deux sens, car on peut considérer des mouvements antérieurs au temps pris pour origine.

Vitesse. On pourrait obtenir la vitesse du mouvement du point P_1 à un instant quelconque, au moyen d'une tangente au point correspondant de la ligne

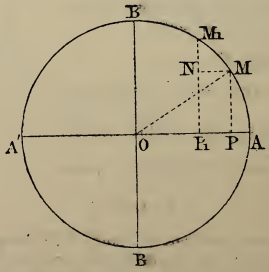


Fig. 338.

des espaces (M., nº 181); mais il vaut mieux trouver la formule qui exprime la loi des vitesses.

Le point P se meut dans le sens AO; sa vitesse doit être regardée comme

négative. Pour en trouver la valeur, supposons le mobile en M au bout d'un temps t; à partir de cet instant, pendant un temps très petit θ, le point M parcourra l'arc MM_1, et le point P la droite PP_1.

En désignant par v la vitesse du point P considérée comme uniforme pendant ce temps très petit θ, celle du point M étant a, on a, en mettant en évidence le signe négatif de v,

$$MM_1 = a\theta \tag{2}$$

$$PP_1 = -v\theta$$

d'où l'on tire
$$\frac{v}{a} = -\frac{PP_1}{MM_1} = -\frac{MN}{MM_1} \tag{3}$$

Lorsque le point M_1 est infiniment près du point M, la sécante MM_1 se confond avec la tangente, qui est perpendiculaire à OM; le triangle rectangle M_1NM devient alors semblable à OPM, ce qui donne

$$\frac{MN}{MM^1} = \frac{MP}{OM}$$

La relation (3) devient
$$\frac{v}{a} = -\frac{MP}{OM}$$

d'où
$$v = -a \times \frac{MP}{OM} \tag{4}$$

Mais le rapport $\frac{MP}{OM}$ est le sinus de l'arc AM, on a donc

$$v = -a \sin at$$

La courbe $A'B'C'D'$ représente les variations de v. On l'a construite en choisissant l'échelle de manière à laisser de côté le facteur constant a.

Elle fait voir que la vitesse de la projection P est nulle, quand le mobile M est en A, qu'elle prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue pendant que le mobile M va de A en B, qu'elle reste négative, mais les rapproche de zéro pendant qu'il décrit BA'; au point A' elle est nulle de nouveau et devient ensuite positive. Cette vitesse v est minimum ou maximum, lorsque le mobile M passe aux points B et B', où la courbe des espaces a ses points d'inflexion, etc.

Accélération. L'accélération j est la limite du rapport de l'accroissement de la vitesse à l'accroissement du temps, quand ce dernier accroissement tend vers zéro, on peut dire que c'est la vitesse de la vitesse.

On a
$$v = -a \cdot \frac{MP}{OM} \quad \text{pour le temps } t.$$

Pour un temps $t + \theta$, on aura

$$v_1 = -a \cdot \frac{M_1P_1}{QM}$$

d'où
$$v_1 - v = -a \cdot \frac{M_1P_1 - MP}{OM} = -a \cdot \frac{M_1N}{OM}$$

En divisant par θ, il vient

$$\frac{v_1 - v}{\theta} = -\frac{a}{OM} \cdot \frac{M_1N}{\theta}$$

Comme $MM_1 = a\theta$, on a encore

$$\frac{v_1 - v}{\theta} = -\frac{a^2}{OM} \cdot \frac{M_1N}{MM_1} \qquad (1)$$

Le triangle NMM_1 fournit

$$\frac{M_1N}{MM_1} = \sin M_1MN$$

A la limite, quand MM_1 tend vers zéro avec θ, l'angle M_1MN tend vers celui que fait la tangente en M avec MN ; c'est le complément de MOA ou at, et on a

$$\lim \frac{M_1N}{MM_1} = \cos at$$

Dès lors la relation (1) donne

$$\lim \frac{v_1 - v}{\theta} \quad \text{ou} \quad j = \lim -\frac{a^2}{OM} \cdot \frac{M_1N}{MM_1} = -a^2 \cos at$$

puisque OM égale l'unité

Donc (5) $$j = -a^2 \cos at$$

La courbe $A''BC''$ a été tracée en choisissant l'échelle de manière à éliminer le coefficient a^2.

Le maximum C'' de l'accélération correspond au point C' où la courbe de la vitesse présente une inflexion ; cette accélération est nulle en B, et la vitesse passe alors par un minimum.

En résumé, la vitesse de la projection est proportionnelle au sinus de l'arc décrit par le point M, et son accélération est proportionnelle au cosinus du même arc.

Problème 236

La tige AB *est fixe ; les tiges* AC *et* BD *tournent autour de* A *et de* B. *Étudier le mouvement au point* M.

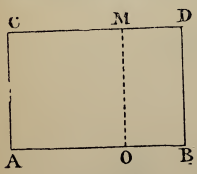


Fig. 339.

La droite MO reste constamment égale et parallèle à AC, le point M décrit donc un cercle, sa vitesse est la même que celle du point C.

C'est ce qui se présente dans les bielles d'accouplements employées dans les locomotives pour rendre solidaires les paires de roues de même rayon et augmenter ainsi l'adhérence.

Problème 237

La tige MN *est assujettie à se mouvoir verticalement, la coulisse* OA *est animée d'un mouvement circulaire alternatif, uniforme autour de* O. *Quel sera le mouvement de* MN?

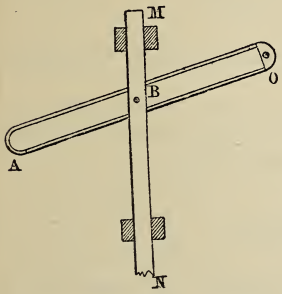


Fig. 340.

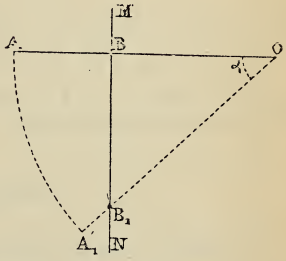


Fig. 341.

Lorsque la coulisse OA passe de la position OA à la position OA_1, le point B va de B en B_1, il décrit la droite BB_1; en désignant par α l'angle dont la coulisse s'est déplacée, et par d la distance OB, on a

$$BB_1 = d \text{ tg } \alpha$$

La tige MN a donc un mouvement rectiligne alternatif, les espaces croissent comme la tangente de l'angle α: ce mouvement a la plus faible vitesse, lorsque la coulisse est perpendiculaire à la tige, et cette vitesse augmente à mesure que α augmente.

Problème 238

Mouvement du centre d'un hexagone régulier assujetti à rouler uniformément sur une ligne droite.

Pendant que le côté AF tourne autour du point A d'un angle de 60°, pour prendre la position AF_1, le centre O tourne autour

du même point A, dont il reste distant de OA ; il décrit ainsi un

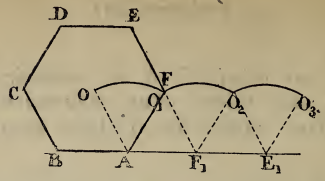


Fig. 342.

arc de 60° et vient en O_1 ; il tourne ensuite autour du point F_1, vient en O_2, et ainsi de suite.

Puisque OA = AF, la vitesse du centre O est la même que celle du point F. Si l'hexagone roule uniformément, le centre décrit uniformément la ligne festonnée OO_1O_2...

Problème 238 bis.

Le losange articulé CDEF *est fixé en* C, *les points* A *et* B *ont un mouvement uniforme. — Étudier le mouvement du point* E *et celui du point* M.

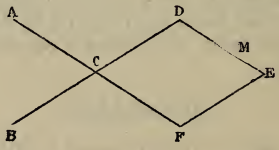


Fig. 343.

1° *Mouvement du point* E.

La distance CE est toujours égale à 2CP (fig. 344).

En désignant par a le côté du losange et par α l'angle de AC avec CM, on a $CE = 2a \cos \alpha$

Cette formule montre que le mouvement du point F n'est autre que celui qui vient d'être étudié au problème 235, c'est-à-dire que le point E est la projection d'un point qui se meut uniformément sur une circonférence de rayon $2a$.

On arrive à la même conclusion par des considérations géométriques très simples.

Prolongeons CD d'une longueur DH = CD; le point H, étant à une distance de C constamment égale à CH = $2a$, décrit une circonférence, et, d'après l'énoncé, son mouvement est uniforme.

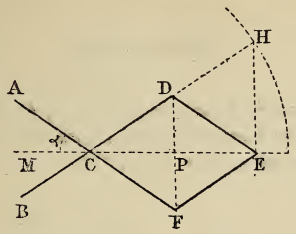


Fig. 344.

De plus, le point E est toujours la projection du point H; car, les triangles HDE et DCF étant toujours égaux entre eux, les droites HE et DF sont parallèles ; donc HE reste perpendiculaire à CE, le point E est la projection du point H.

Il est plus simple encore de remarquer que, les triangles CDP et CHE restant semblables, le point H décrit une circonférence comme le point D, et le point E décrit la projection du point H, comme le point P celle du point D.

2° *Mouvement du point* M.

Le point M décrit une ellipse qui, si l'on désigne par d la distance ME, a pour demi-axes

$$CM_1 = 2a - d$$

et $$CM_2 = d$$

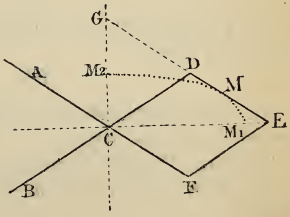


Fig. 345.

En effet, prolongeons ED jusqu'à sa rencontre avec CG perpendiculaire à CE, le triangle CDG est isocèle, et l'on a toujours DG = DE = a; par suite, GE est une droite de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur deux axes rectangulaires ; on sait qu'un point quelconque de cette droite décrit une ellipse qui a pour demi-axes les segments GM et ME (G., n° 643).

Remarque. Tant que le point M est sur DE, il décrit une

ellipse dont l'excentricité diminue à mesure qu'il se rapproche du point D. S'il est au point D ou sur tout autre point du côté DC, le point M décrit un cercle.

Problème 239

Dans un système de losanges articulés, le point O *étant fixe, les points* E *et* F *se meuvent d'un mouvement uniforme : quel est le mouvement des points* A, B, C?

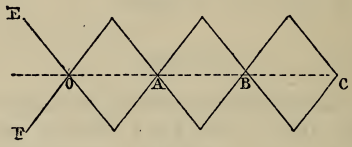


Fig. 346.

Comme on l'a vu dans le problème précédent, le point A est à une distance du point O exprimée par

$$OA = 2a \cos \alpha$$

Pour la même raison, on aura

$$OB = 4a \cos \alpha$$

et

$$OC = 6a \cos \alpha$$

En général, s'il y a n losanges, le point M, sommet du dernier losange, donne

$$OM = 2na \cos \alpha$$

Un faible déplacement du point E fait parcourir une longueur considérable au point C.

Certains jouets d'enfants emploient les losanges articulés pour faire mouvoir de petites figurines avec rapidité et régularité.

Problème 240

Une bielle est articulée en A *avec un balancier et en* B *avec une manivelle. Si cette manivelle est animée d'un mouvement de rotation uniforme, trouver graphiquement le mouvement de* A.

Ce mécanisme transforme le mouvement circulaire continu de la manivelle CB en un mouvement circulaire alternatif communiqué au balancier OA.

Dans la machine de Watt, c'est, au contraire, le mouvement circulaire alternatif du balancier qui donne un mouvement circulaire continu à la manivelle et, par la manivelle, au volant.

Pour tracer la courbe figurative de ce mouvement, on opère comme au n° 237 des *Éléments*, et si OA et AB ont des longueurs considérables par rapport à BC, comme cela arrive d'ordinaire, la courbe diffère peu de celle du numéro précité.

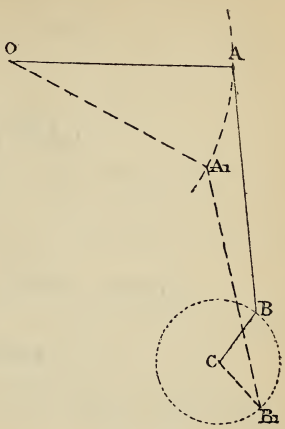


Fig. 347.

DYNAMIQUE

Forces, masses, accélérations.

Problème 241

A un corps pesant 20^k, *on applique une force constante de* 10^k.

1° *Quelle sera l'accélération du mouvement produit?*

On a (M., n° 265) $$\frac{F}{\varphi} = \frac{p}{g}$$

d'où $$\varphi = \frac{F}{p}\, g$$

ou $$\varphi = \frac{10}{20} \times 9{,}8088 = 4{,}9044$$

Rép. 4^m9044.

2° *Quel sera l'espace parcouru pendant* 20 *secondes?*

Le mouvement étant produit par une force constante de 10^k est uniformément accéléré.

On a (M., n° 189, 2°) $$e = \frac{\varphi t^2}{2}$$

Or nous venons de trouver pour la valeur de l'accélération

$$\varphi = 4^m9044$$

En remplaçant φ par sa valeur, on a

$$e = \frac{4{,}9044 \times 20^2}{2} = 980^m88$$

Rép. 980^m88.

3° *Quelle sera la vitesse au bout de ces* 20 *secondes ?*

On a (M., n° 187) $v = \varphi t$

d'où $v = 4{,}9044 \times 20 = 98^{m}088$

Rép. $98^{m}088$.

Problème 242

Sous l'action d'une force constante, un corps de 5^{k} *a parcouru* 300^{m} *en* 8^{s} ; *quelle est l'intensité de cette force ?*

L'accélération b dans le mouvement du corps est (M., n° 189, 2°)

$$b = \frac{2e}{t^2} = \frac{2 \times 300}{8^2}$$

Si F désigne l'intensité de la force cherchée, on a (M., n° 265)

$$F = \frac{P \times b}{g} = \frac{P \times 2e}{gt^2} = \frac{5 \times 300 \times 2}{9{,}8088 \times 8^2} = 4^{kg}7788$$

Rép. $4^{kg}7788$.

Problème 243

Quelle force agissant pendant 3^{s} *sur un corps qui pèse* 50^{gr} *lui donnera une vitesse de* 100^{m} ?

L'accélération est donnée par la formule (M., n° 187) $v = bt$

d'où $b = \frac{v}{t} = \frac{100}{3}$

En désignant par F l'intensité de la force cherchée, on a

(M., n° 265) $F = \frac{P \times b}{g} = \frac{P}{g} \times \frac{v}{t}$

d'où $F = \frac{P \times v}{gt} = \frac{50 \times 100}{3 \times 9{,}8088} = 169^{g}9.$

Rép. L'intensité de la force est $169^{g}9$.

Problème 244

Un corps pesant 2^{k} *est soumis pendant* 5^{s} *à l'action d'une force intense. Au bout de la cinquième seconde la force cesse, et le mobile parcourt d'un mouvement uniforme* 450^{m} *en* 18^{s}.

1° *Quelle est l'intensité de la force?*

Si le mobile parcourt 450^m en 18^s, d'un mouvement uniforme, en une seconde la distance parcourue est $\frac{450}{18} = 25^m$; cette distance représente la vitesse au bout de la cinquième seconde, et d'après la formule (M., n° 187), l'accélération du mouvement qu'avait le mobile pendant ces 5^s est

$$b = \frac{v}{t} = \frac{25}{5} = 5^m$$

D'autre part, on a (M., n° 265)

$$F = \frac{P \times b}{g}$$

F représente l'intensité de la force cherchée ;

donc
$$F = \frac{2 \times 5}{9{,}8088} = 1^k019$$

Rép. L'intensité cherchée est 1^k019.

2° *Quel a été l'espace parcouru pendant les 5 secondes?*

De la formule (M., n° 189, 2°)

$$e = \frac{bt^2}{2} \quad \text{ou} \quad b = 5$$

on a
$$e = \frac{5 \times 5^2}{2} = 62^m50$$

Rép. L'espace parcouru est de 62^m50.

Problème 245

Un corps pesant 1^k a une vitesse de 30^m. Une force constante de 100^{gr} agit en sens contraire de la direction du mobile. On demande :

1° *La vitesse du mobile après 3^s.*

Le mobile sollicité par la force de 100^{gr}, dans une direction contraire à celle de sa vitesse initiale, est animé d'un mouvement uniformément retardé.

La vitesse de ce mouvement est (M., n° 187)

$$v = a - bt$$

Mais (M., n° 265)

$$b = \frac{F}{p} \cdot g = \frac{100}{1\,000} \times 9{,}8088 = 0^m98088$$

donc $v = 30 - 0{,}98088 \times 3 = 27^{m}05736$

Rép. La vitesse est de $27^{m}05736$.

2° *Au bout de quel temps la vitesse sera-t-elle nulle ?*

Si dans la formule $v = a - bt$ on fait $v = 0$, on en tire

$$t = \frac{a}{b} = \frac{30}{0{,}98088} = 30^{s}58$$

Rép. La vitesse sera nulle au bout de $30^{s}58$.

3° *Espace parcouru au bout d'une minute.*

On a (M., n° 189, 1°)

$$e = at - \frac{bt^2}{2} = 30 \times 60 - \frac{0{,}98088 \times 3600}{2} = 34^{m}416$$

Rép. L'espace parcouru est de $34^{m}416$.

4° *Au bout de quel temps passera-t-il au point de départ ?*

Le mobile étant à l'origine, la distance e doit être nulle.
Si dans la formule (M., n° 189, 1°)

$$e = at - \frac{bt^2}{2} \quad \text{on fait} \quad e = 0$$

on obtient $t(bt - 2a) = 0$

on en tire $t = 0$, qui répond au moment où le mouvement commence et $t = \frac{2a}{b} = \frac{60}{0{,}98088} = 61^{s}16$

Rép. $61^{s}16$.

Problème 246

Une locomotive du poids de 40 tonnes marche avec une vitesse de 50^{k} à l'heure, un obstacle l'arrête brusquement. De quelle hauteur aurait-elle dû tomber pour que le choc fût le même ?

Ce problème revient à chercher l'espace que doit parcourir un mobile tombant en chute libre pour acquérir une vitesse donnée.

La formule (M., n° 197) $v = \sqrt{2gh}$

donne $h = \frac{v^2}{2g}$

La locomotive parcourt 50000m par heure, soit par seconde

$$\frac{50000}{3600}\text{ ; c'est sa vitesse.}$$

$$v = \frac{50000}{3600} = \frac{125}{9}$$

par suite, $$h = \frac{15625}{81 \times 2 \times 9{,}8088} = 9{,}83$$

Rép. 9m83.

Remarque. La hauteur de chute est indépendante de la masse en mouvement ; mais, pour expliquer les effets désastreux du choc, il faut tenir compte de cette masse. Ainsi la locomotive pesant 40 tonnes possède une puissance vive de

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{40000}{9{,}8088} \times \left(\frac{125}{9}\right)^2 = 393323$$

c'est-à-dire plus de 393000 kilogrammètres ; cette force vive devant être dépensée sur une très petite longueur développe une résistance énorme qui fait voler la locomotive en éclats. La force vive des wagons en mouvement vient encore s'ajouter à celle de la locomotive.

Problème 247

Un corps pesant 10k *est sur un plan horizontal sur lequel il peut glisser sans frottement ; il est tiré horizontalement par un cordon qui, passant sur la gorge d'une poulie, supporte un poids de* 1k *qui tombe verticalement. On néglige le poids du cordon et de la poulie. On demande :*

1° *L'accélération du mouvement.*

Le corps étant soumis à l'action d'une force de 1k dirigée suivant l'horizontale, on a (M., n° 965)

$$\varphi = \frac{F}{p} \times g = \frac{1}{10} \times 9{,}8088 = 0^{m}98088$$

Rép. L'accélération est de 0m98088.

2° *L'espace parcouru au bout de* 3s.

La formule (M., n° 189, 2°) donne

$$e = \frac{bt^2}{2} = \frac{0{,}98088 \times 9}{2} = 4^{m}41396$$

Rép. L'espace parcouru est de 4m41396.

3° *Le temps que mettra ce corps pour parcourir* 5^m.

De la formule (M., n° 189, 2°) on tire

$$t = \sqrt{\frac{2e}{b}} = \sqrt{\frac{10}{0,98088}} = 3^s19$$

Rép. Le temps est 3^s19.

4° *La vitesse, quand il aura parcouru* 5^m.

On a (M., n° 190)

$$v = \sqrt{2be} = \sqrt{2 \times 0,98088 \times 5} = 3^m13$$

Rép. La vitesse sera de 3^m13.

Problème 248

Sur la gorge d'une poulie très mobile passe un fil qui supporte à chacune de ses extrémités un poids de 1^k. *On demande :*

1° *Quel mouvement prendra le système si l'on ajoute* 10^{gr} *sur l'un de ces poids.*

Le mouvement est uniformément accéléré, son accélération g est donnée par la relation

$$g' = g \cdot \frac{p}{2P + p} \quad \text{ou} \quad g' = g \cdot \frac{10}{2 \times 1000 + 10}$$

En effet, désignons par P les deux poids égaux, p le poids additionnel, M et m étant les masses de P et de p.

En chute libre, le poids p agit sur la masse m et lui communique l'accélération g de la pesanteur ; dans le cas actuel, ce même poids met en mouvement une masse $2M + m$, et l'accélération g' qui en résulte est fournie par la relation (M., n°s 264 et 269)

$$\frac{g'}{g} = \frac{m}{2M + m} = \frac{p}{2P + p} \qquad (1)$$

On aura donc

$$g' = g \cdot \frac{10}{2000 + 10} = 0^m0488$$

Rép. L'accélération est de 0^m0488.

2° *Quel poids additionnel donnerait au système une accélération de* $\frac{g}{2}$?

De (1) on tire

$$p = 2P \frac{g'}{g - g'} \qquad (2)$$

En remplaçant g' par $\frac{g}{2}$, on a $p = 2P = 2^k$.

Rép. La masse additionnelle doit être 2^k.

3° *Quel poids additionnel ferait que chaque poids parcourrait* 1^m *pendant la première seconde?*

L'accélération, qui est le double de l'espace parcouru pendant la première seconde, est donc 2^m.

La formule (2) donne

$$p = 2P \frac{g'}{g - g'} = \frac{4 \times 9{,}8088}{7{,}8088} = 512^{gr}242$$

Rép. Le poids est $512^{gr}24$.

4° *Quel poids additionnel donnera au système une vitesse de* 3^m *au bout de* 3 *secondes?*

La formule (M., n° 187) $v = g't$ fournit

$$g' = \frac{v}{t} = \frac{3}{3} = 1^m$$

et la relation (2) donne

$$p = 2P \frac{g'}{g - g'} = \frac{2}{8{,}8088} = 227^{gr}$$

Rép. Le poids est 227^{gr}.

Problème 249

Les extrémités du fil (Probl. 248) *supportent des poids de* 3^k *et de* 2^k ; *on lance le corps de* 3^k *avec une vitesse de* 2^m.

1° *Quelle est l'accélération du mouvement?*

Remarquons que l'*accélération du mouvement est la même que si le corps partait du repos ;* elle provient uniquement de la pesanteur et ne dépend en aucune manière du mouvement antérieur.

Elle est (Probl. 248)

$$g' = g \times \frac{p}{2P + p}$$

Or p n'est autre chose que la différence entre 3^k et 2^k ou 1^k et $P = 2^k$; donc $g' = \frac{9{,}8088 \times 1}{5} \cdot 1^m96176$

Rép. L'accélération est 1^m96176.

2° *Quel sera le chemin parcouru au bout de* 4^s ?

La formule (M., n° 188)

$$e = at + \frac{bt^2}{2} \quad \text{dans laquelle} \quad b = g'$$

donne $$e = 2 \times 4 + \frac{1{,}96 \times 16}{2} = 23^m69$$

Rép. Le chemin parcouru est 23^m69.

3° *Vitesse au bout de* 4^s.

On a (M., n° 187) $$v = a + bt$$

ou $$v = 2 + 1{,}96 \times 4 = 9^m84$$

Rép. La vitesse est 9^m84.

4° *Espace parcouru pendant la* 5e *seconde.*

En appelant ε l'espace parcouru pendant la 5e seconde, e' et e les espaces parcourus pendant 4 et 5 secondes, on peut écrire (M., n° 188)

$$\varepsilon = e - e' = \left(at + \frac{bt^2}{2}\right) - \left(at' + \frac{bt'^2}{2}\right) = (t - t')\left[a + \frac{b}{2}(t + t')\right]$$

pour $t = 5$, $t' = 4$, on a $\varepsilon = 2 + 0{,}98 \times 9 = 10^m827$

Rép. L'espace parcouru est 10^m827.

5° *Quel serait le mouvement si la vitesse avait été communiquée au corps de* 2^k ?

Le mouvement serait uniformément retardé ; son accélération serait la même que dans le 1er cas, mais elle agirait en sens contraire de la vitesse initiale ; on aurait donc

Rép. Accélération 1^m96.

Remarque. La vitesse de ce mouvement sera $(a - g't)$; elle deviendra nulle pour $a = g't$, soit $t = \frac{a}{g'}$.

Dans le cas qui nous occupe, la vitesse est nulle pour

$$t = \frac{2}{1{,}96} = 1^s02$$

A partir de ce moment le corps de 3^k descendra entraînant celui de 2^k avec une accélération de 1^m96.

Problème 250

On donne P, *le poids de l'un des corps égaux employés dans la machine d'Atwood ; calculer* p *de manière que l'espace parcouru pendant la première seconde soit un décimètre.*

L'accélération g' est alors $0^{m}20$.

Or, de la formule (Probl. 248)

$$g' = g \cdot \frac{p}{2P + p}$$

on tire $p = P \cdot \frac{2g'}{g - g'} = P \times \frac{2 \times 0,2}{9,8088 - 0,2} = \frac{P}{24,022}$

Rép. $p = \frac{P}{24,022}$.

Problème 251

Les deux masses de la machine d'Atwood pèsent ensemble 195^{gr}, *le poids additionnel est de* 5^{gr}. *Le système se met en mouvement, et on constate que l'espace parcouru est de* $490^{m}4$ *pendant les deux premières secondes. En déduire l'intensité de la pesanteur.* (Lille, baccalauréat.)

L'accélération du mouvement est (M., n° 189, 2°)

$$g' = \frac{2e}{t^2} = \frac{2 \times 490,4}{4} = 245^{mm}2$$

Or la formule (Probl. 248)

$$\frac{g}{g'} = \frac{2P + p}{p}$$

donc $g = g' \cdot \frac{2P + p}{p} = 245,2 \times \frac{195 + 5}{5} = 9^{m}808$

Rép. $g = 9^{m}808$.

Remarque. On pourrait croire aussi bien que les 195^{gr} comprennent les deux poids égaux de la machine et le poids additionnel de 5^{gr}.

Alors on aurait $g = 245,2 \times \frac{195}{5} = 9,562$

Problème 252

Un poids de 9^{k} *est divisé de telle manière qu'en attachant les deux parties aux extrémités d'un cordon qui passe sur une poulie fixe, l'ensemble parcourt* 40^{m} *en* 13^{s}. *Calculer chacune des parties.*

Cherchons d'abord l'accélération g' du mouvement.

La formule (M., n° 189, 2°) $e = \frac{g't^2}{2}$ donne

$$g' = \frac{2e}{t^2} = \frac{2 \times 40}{169} = 0^{m}473$$

Désignons par x et y les deux parties cherchées, x représentant la partie la plus lourde. La formule (Probl. 248)

$$\frac{g'}{g} = \frac{p}{2P + p}$$

donne

$$\frac{g'}{g} = \frac{x - y}{x + y}$$

d'où, en appliquant un principe connu des proportions,

$$\frac{g + g'}{g} = \frac{2x}{x + y}$$

Mais

$$x + y = 9$$

On a donc

$$\frac{g + g'}{g} = \frac{2x}{9}$$

d'où

$$x = \frac{9\,(g + g')}{2g}$$

$$x = \frac{9\,(9{,}8088 + 0{,}473)}{2 \times 9{,}8088} = 4{,}717$$

et

$$y = 9 - 4{,}717$$

Rép. Les deux parties sont $4^{k}717$ et $4^{k}283$.

Problème 253 (**1re partie**)

Aux extrémités d'un cordon sont des poids de 2^{k} *et* 3^{k} ; *on laisse tomber le poids de* 2^{k} *d'une hauteur de* 4^{m}, *alors il soulève le poids de* 3^{k}. *On demande :*

1° *A quelle hauteur il le soulèvera.*

Le corps de 2^{k} a parcouru en chute libre un espace h de 4^{m}, lorsqu'il commence à communiquer son mouvement au corps de 3^{k}; il a donc acquis une vitesse $a = \sqrt{2gh}$ (M., n° 197).

Le mouvement que prend alors le système est uniformément retardé ; l'accélération est la même que si le corps de 3^{k} commençait seulement à se mouvoir, elle est donnée par la formule

(Probl. n° 248) $$\frac{g'}{g} = \frac{p}{2P + p}$$

d'où $$g' = g \cdot \frac{p}{2P + p}$$

par suite, $$g' = 9{,}8088 \times \frac{1}{5}$$

Or le corps de 2^k cessera d'entraîner celui de 3^k, quand la vitesse deviendra nulle, ou quand on aura (M., n° 190)

$$v = \sqrt{a^2 - 2g'e} = 0$$

d'où $$e = \frac{a^2}{2g'}$$

En remplaçant a et g' par leur valeur, on obtient

$$e = \frac{2gh}{g\,\frac{2p}{2P + p}} = \frac{h\,(2P + p)}{p} = 20$$

Rép. La hauteur est 20^m.

2° *La durée de l'ascension.*

La formule (M., n° 187) $v = a - bt$, dans laquelle on fait $x = 0$, donne $t = \frac{a}{b}$ pour le temps au bout duquel l'arrêt a lieu.

En remplaçant a par $\sqrt{2gh}$ et b par g' ou $g\,\frac{p}{2P + p}$, on obtient $$t = \frac{2P + p}{p}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 4^s\,\frac{1}{2}$$

Rép. $4^s\,\frac{1}{2}$.

Problème 253 (**2e partie**)

De quelle hauteur aurait-il fallu laisser tomber le corps du probl. 253 *pour élever le corps de* 3^k

1° *A une hauteur de* 3^m?

Nous avons trouvé précédemment la formule

$$e = \frac{h\,(2P + p)}{p}$$

dans laquelle e désigne la hauteur à laquelle s'élève le corps de P^k quand celui de p^k tombe d'une hauteur h; elle devient pour

$$e = 3^m, \quad P = 3 \quad \text{et} \quad p = 2, \quad h = \frac{pe}{2P + p} = 0{,}6$$

Rép. 0^m60.

2° *Pour que la durée de l'ascension soit de* 2^s?

La formule $$t = \frac{2P + p}{p}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

donne $$h = \frac{gt^2}{2}\left(\frac{p}{2P + p}\right)^2$$

pour la hauteur de chute correspondant au temps t.

Pour $t = 2^s$, elle fournit $h = 0^m78$.

Rép. Le corps doit tomber d'une hauteur de 0^m78.

Problème 254

Un corps de 10^k *glisse sans frottement sur un plan horizontal; quel mouvement prendra-t-il sous l'action d'une force constante de* 1^k?

1° *La force est horizontale.*

Il prendra un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération est donnée par la formule (M., n° 265)

$$\varphi = g \cdot \frac{F}{p} = 9{,}8088 \times \frac{1}{10}$$

Rép. L'accélération est 0^m98088.

2° *La force fait un angle de* 20° *avec l'horizon.*

Cette force peut se décomposer en deux autres; l'une F_1 dirigée suivant l'horizon, et l'autre F^2 normale au plan.

Le corps se déplace sous l'action de la force F_1 et prend un mouvement uniformément accéléré; or $F_1 = F \cos 20°$.

D'autre part, on a (M., n° 265)

$$\varphi = g \cdot \frac{F_1}{p} = \frac{gF \cos 20°}{p} = \frac{9{,}8088 \times 1 \times \cos 20°}{10}$$

Rép. L'accélération est de 0^m92.

Problème 255

Quelle force faut-il appliquer à ce corps (Probl. 254) *pour qu'il parcoure* 1^m *pendant la* 2e *seconde de son mouvement?*

1° *La force est horizontale.*

En appelant e l'espace parcouru pendant 2 secondes, e' l'espace

parcouru pendant une seconde, φ l'accélération du mouvement ; on a pour l'espace parcouru pendant la 2e seconde

$$e - e' = \frac{\varphi t^2}{2} - \frac{\varphi t'^2}{2} = \frac{\varphi}{2}(t^2 - t'^2)$$

d'où $$1 = \frac{\varphi}{2}(4-1) = \frac{3\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2}{3}\,\text{m}$$

La formule (M., n° 265) donne alors

$$F = p \cdot \frac{\varphi}{g} \quad \text{ou} \quad F = \frac{10 \times 2}{3 \times 9{,}8088} = 0^{\text{k}}679$$

Rép. La force est $0^{\text{k}}679$.

2° *Elle fait avec l'horizon un angle de* 30°.

On a (M., n° 27)

$$F = \frac{F_1}{\cos 30^\circ} = \frac{0{,}679}{\cos 30^\circ} = 0{,}784$$

Rép. La force est $0^{\text{k}}784$.

Problème 256

Dans une machine d'Atwood, les poids P *et* P' *suspendus aux extrémités du fil pèsent respectivement* 200gr *et* 160gr. *Le poids* P *étant d'abord à la partie supérieure de la machine, le système est abandonné à l'action de la pesanteur sans vitesse initiale. D'autre part, un curseur annulaire* C *a été placé préalablement sur le parcours du poids* P' *de façon que ce dernier l'atteigne au bout d'une seconde et demie de mouvement. Sur ce curseur repose une lame pesant* 60gr, *que le corps entraîne dans son mouvement. On demande :*

1° *De déterminer la position que doit occuper le curseur ;*

2° *D'étudier le mouvement des corps* P *et* P' *et de calculer la durée de l'amplitude de chacune des phases de ce mouvement ;*

3° *De trouver le centre de gravité de l'ensemble des corps mobiles pour l'une quelconque des positions de leur système. On négligera l'effet du choc du poids* P' *contre la masse additionnelle en* C. (Grenoble, concours Ens. sp., 1879.).

1° *Position du curseur.*

Appelons g' l'accélération du mouvement que prend le système avant d'atteindre le curseur C, et calculons d'abord cette accélération ; on a (Probl. 248) $\frac{g'}{g} = \frac{p}{2P + p}$

d'où $$g' = g \cdot \frac{p}{2P + p}$$

Dans ce cas, $$P = 160^{gr}$$

et $$p = 200 - 160 = 40^{gr}$$

d'où $$g' = 1{,}0898$$

Mais (M., n° 189, 2°) $$e = \frac{g't^2}{2}$$

d'où $$e = g \frac{p}{2P + p} \times \frac{t^2}{2} = 1^{m}226$$

Rép. Le curseur doit être au-dessus du poids P et à une distance de ce poids égale à $1^{m}226$.

2° *Étudier les mouvements des corps* P *et* P′ *et calculer la durée et l'amplitude de chacune des phases de ce mouvement.*

Le système étant abandonné à l'action de la pesanteur se meut d'un mouvement uniformément accéléré jusqu'à ce que le poids P′ rencontre le curseur C ; de B en C, le mouvement est dans sa première phase.

A partir de C, le poids P′ se chargeant des 60^{gr}, le système prend un mouvement uniformément retardé jusqu'à ce que P′ soit arrivé à un certain point D où la vitesse est nulle ; de C en D le mouvement est dans sa deuxième phase.

Puis le poids P′, surchargé de la lame, descend d'un mouvement uniformément accéléré, jusqu'à ce qu'il ait déposé en C son poids additionnel ; de D en C le mouvement est dans sa troisième phase.

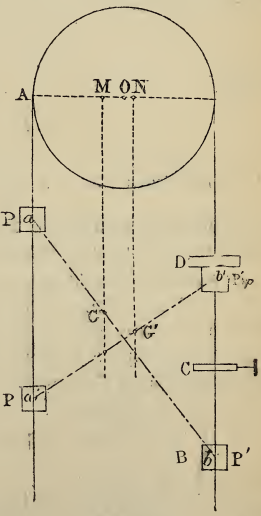


Fig. 348.

Le poids P′, ayant déposé la lame en C, continue à descendre, mais d'un mouvement uniformément retardé, jusqu'à ce que P′ soit revenu au point de départ B.

Étudions la durée et l'amplitude de chacune de ces phases.

1re phase. La durée de la 1re phase a été donnée de $1^s\frac{1}{2}$; son amplitude, calculée précédemment, est égale à 1^m226.

2e phase. La vitesse initiale de la 2e phase est celle qu'a le système à la fin de la 1re phase, quand P′ arrive en C.

On a (M., no 187)

$$a = g't = 1{,}0898 \times 1{,}5 = 1^m635$$

L'accélération g'' de ce nouveau mouvement est donnée par la relation (Probl. 248) $\frac{g''}{g} = \frac{p}{2P + p}$

Or $p = 220 - 200 = 20$ et $2P + p = 420$

donc $$g'' = \frac{9{,}8088 \times 20}{420} = 0^m467$$

La *durée* de cette phase se tire de la formule (M., no 187)

$$v = a - g''t$$

dans laquelle $v = 0$, car le mouvement durera jusqu'à ce que la vitesse soit nulle ; cette formule donne

$$0 = a - g''t$$

d'où $$t = \frac{a}{g''}$$

$$t = \frac{1{,}635}{0{,}467} = 3^s5$$

L'*amplitude* est $e = \frac{a^2}{2g''} = \frac{(1{,}635)^2}{2 \times 0{,}467} = 2^m862$

3e phase. L'amplitude et la durée sont évidemment les mêmes que pour la phase précédente.

4e phase. L'amplitude est la même que pour la première phase, car P est au sommet de la machine quand P′ est à 1^m226 du curseur ; quant à la durée, elle est aussi la même, car il faudra autant de temps à P′ pour prendre sa vitesse acquise qu'il lui en avait fallu pour l'acquérir.

Rép.

1re phase. Mouvement uniformément accéléré	durée 1^s5 amplitude 1^m226.
2e phase. Mouvement uniformément retardé	durée 3^s5 amplitude 2^m862.
3e phase. Mouvement uniformément accéléré	durée 3^s5 amplitude 2^m862.
4e phase. Mouvement uniformément retardé	durée 1^s5 amplitude 1^m226.

3° *Trouver le centre de gravité de l'ensemble des corps mobiles pour l'une quelconque des positions de leur système.*

Supposons P′ au-dessous du curseur C; pour avoir le centre de gravité du système, il suffit (M., n° 48) de diviser la droite *ab* en parties inversement proportionnelles aux poids P et P′. On doit donc avoir

$$\frac{aG}{bG} = \frac{P'}{P} = \frac{160}{200} = \frac{4}{5}$$

Mais si l'on divise AB dans le même rapport et que par le point M on mène une parallèle aux cordons, cette parallèle, d'après un théorème connu de géométrie, devra passer par le point G, et il en sera de même pour toute autre position de P′ au-dessous de C; donc, dans ce cas, le lieu des centres de gravité sera la parallèle aux cordons menée par le point M situé aux $\frac{4}{9}$ de AB à partir du point A.

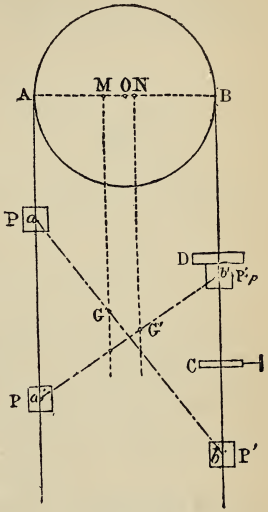


Fig. 349.

Lorsque P′ est surmonté de la masse additionnelle, le centre de gravité G′, pour une position quelconque des deux corps, sera placé sur la droite *a′b′*, de telle façon que l'on ait

$$\frac{a'G'}{b'G'} = \frac{P' + p}{P} = \frac{220}{200} = \frac{11}{10}$$

Divisons AB dans le même rapport, et, par le point N ainsi obtenu, menons une parallèle aux cordons; cette parallèle passera par G′, et il en serait de même pour toute autre position des corps P et P′ + *p*.

Rép. 1° Lorsque P′ n'est pas surmonté de la masse additionnelle, la droite MG est le lieu du centre de gravité du système pour les diverses positions que P et P′ peuvent occuper.

2° Lorsque P′ est surmonté de la masse additionnelle, la droite NG′ est le lieu du centre de gravité du système.

Problème 256 bis.

Quelle sera l'accélération du mouvement d'un mobile qui descend le long d'un plan incliné d'un angle α ?

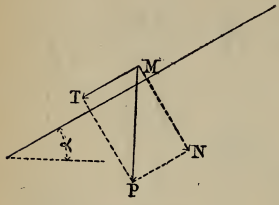


Fig. 350.

Le poids P du mobile se décompose en deux forces : l'une N normale au plan et détruite par la fixité du plan, l'autre T dirigée suivant le plan et qui détermine le mouvement ; on a

$$T = P \sin \alpha$$

Désignons par g' l'accélération du mouvement sur le plan, par m la masse du mobile.

On peut raisonner de plusieurs manières :

1° La masse m, en chute libre sous l'action de son poids P, prend l'accélération g; sur le plan cette même masse soumise à la force $T = P \sin \alpha$ prendra une accélération g' telle que l'on aura

$$\frac{g}{g'} = \frac{P}{T} = \frac{P}{P \sin \alpha}$$

car les accélérations imprimées à une même masse, par des forces différentes, sont entre elles comme ces forces; d'où $g' = g \sin \alpha$.

2° On peut encore dire : La force T donnant à la masse m une accélération g', par définition même de la masse, on aura

$$m = \frac{T}{g'}$$

Or $$m = \frac{P}{g}, \quad T = P \sin \alpha$$

donc $$\frac{P}{g} = \frac{P \sin \alpha}{g'}; \quad \text{d'où} \quad g' = g \sin \alpha$$

Rép. $g' = g \sin \alpha$.

Remarque. 1° Le mouvement sur le plan peut être ralenti autant qu'on le désire, il est toujours uniformément accéléré, comme en chute libre, car l'accélération g' est constante.

2° Si l'on suppose le plan horizontal, $\alpha = 0$, et on a $g' = 0$; ce qui signifie que si le corps est en repos il y reste, ou que son mouvement, s'il en a un, est uniforme.

Problème 257

Un plan est incliné de 45°. On demande :

1° *L'accélération du mouvement d'un corps placé sur ce plan.*

On a (Probl. 256 *bis*)

$$g' = g \sin \alpha = g \sin 45^\circ = \frac{9{,}8088\sqrt{2}}{2} = 6^{\mathrm{m}}935$$

Rép. L'accélération est $6^{\mathrm{m}}935$.

2° *Quel espace ce corps parcourra-t-il pendant la première seconde.*

On a (M., n° 189, 3°)

$$e = \frac{\varphi}{2} = \frac{6{,}935}{2} = 3^{\mathrm{m}}467$$

Rép. L'espace parcouru sera $3^{\mathrm{m}}467$.

3° *L'espace parcouru au bout de* 3^{s}.

La formule (M., n° 189, 2°) donne

$$e = \frac{bt^2}{2} \text{ ou } e = \frac{\varphi t^2}{2} = \frac{6{,}935 \times 9}{2} = 31^{\mathrm{m}}207$$

Rép. L'espace parcouru est $31^{\mathrm{m}}207$.

4° *Quelle sera la longueur parcourue pendant la quatrième seconde.*

En appelant e_1 cet espace, e l'espace parcouru pendant quatre secondes, et e' l'espace parcouru pendant trois secondes, il vient

$$e_1 = e - e' = \frac{\varphi t^2}{2} - \frac{\varphi t'^2}{2} = \frac{\varphi}{2}(t^2 - t'^2)$$

$$e_1 = 3{,}467\,(16 - 9) = 3{,}467 \times 7 = 24^{\mathrm{m}}269$$

Rép. L'espace parcouru est $24^{\mathrm{m}}269$.

5° *En quel point se trouve le corps qui glisse, lorsqu'un autre corps, parti en même temps du sommet, a parcouru librement la hauteur.*

En appelant h la hauteur du plan incliné et e l'espace parcouru sur ce plan par le corps qui glisse, on a (M., n° 189, 2°)

$$e = \frac{g't^2}{2} \quad \text{et} \quad h = \frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

Or

$$g' = g \sin \alpha$$

d'où

$$e = \frac{gt^2 \sin \alpha}{2} \qquad (2)$$

En divisant (1) et (2) membre à membre, on obtient

$$\frac{e}{h}=\frac{gt^2 \sin \alpha}{gt^2}=\sin \alpha \quad \text{ou} \quad e=h \sin \alpha \,*$$

pour $$\alpha=45^\circ, \quad e=h \sin 45^\circ=\frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Rép. Le corps se trouve à une distance du sommet du plan incliné marquée par $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

6° *Combien le corps qui parcourt la longueur du plan met-il de emps de plus que celui qui tombe, pour arriver à une horizontale donnée.*

Soit t le temps que met le corps qui tombe librement pour arriver à l'horizontale distante de d du sommet du plan incliné, et soit t' le temps que met l'autre corps pour atteindre cette même horizontale en suivant le plan incliné de longueur e.

La formule (M., n° 189, 2°) donne pour les deux corps

$$d=\frac{gt^2}{2} \tag{1}$$

et $$e=\frac{g't'^2}{2} \tag{2}$$

mais $$g'=g \sin \alpha \quad \text{et} \quad e=\frac{d}{\sin \alpha}$$

En substituant ces valeurs dans la formule (2), il vient

$$\frac{d}{\sin \alpha}=\frac{gt'^2 \sin \alpha}{2} \tag{3}$$

De la formule (1) on tire $t=\sqrt{\frac{2d}{g}}$

La formule (3) donne

$$t'^2=\frac{2d}{g \sin^2 \alpha} \quad \text{ou} \quad t'=\sqrt{\frac{2d}{g \sin^2 \alpha}}$$

En retranchant membre à membre, il vient

$$t'-t=\sqrt{\frac{2d}{g \sin^2 \alpha}}-\sqrt{\frac{2d}{g}}=\sqrt{\frac{2d}{g}}\left(\frac{1}{\sin \alpha}-1\right)$$

Pour $$\alpha=45^\circ$$

---

* Cette relation montre que le corps se trouve au point du plan fourni par sa rencontre avec une circonférence qui aurait h pour diamètre (Probl. 272 ter).

on a $$t' - t = \sqrt{\frac{2d}{g}}\,(\sqrt{2} - 1)$$

Rép. $t' - t = \sqrt{\frac{2d}{g}}\,(\sqrt{2} - 1)$.

Remarque. Pour $\alpha = 30^\circ$, on aurait eu

$$t' - t = \sqrt{\frac{2d}{g}}\left(\frac{1}{1/2} - 1\right) = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

On voit que pour un plan incliné à 30°, le corps qui glisse le long du plan met, pour descendre, deux fois plus de temps que celui qui tombe suivant la verticale.

7° *Si le corps avait été lancé avec une vitesse de* 2^m, *combien de temps aurait-il mis pour parcourir* 4^m.

Le corps a pu être lancé de façon qu'il monte ou qu'il descende sur le plan incliné.

I. *Le corps descend.* Le mouvement est uniformément accéléré. La formule (M., n° 188) donne

$$e = at + \frac{g't^2}{2}$$

d'où $$gt^2 \sin\alpha + 2at - 2e = 0$$

On en tire $$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2eg \sin\alpha}}{g \sin\alpha}$$

ou $$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 9{,}8088 \times \sqrt{2}}}{9{,}8088 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

La réponse négative ne convient pas.

Rép. 0^s82.

II. *Le corps monte.* Le mouvement est uniformément retardé. La formule (M., n° 189) donne

$$e = at - \frac{g't^2}{2}$$

d'où $$gt^2 \sin\alpha - 2at + 2e = 0$$

et $$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2eg \sin\alpha}}{g \sin\alpha}$$

ou $$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 9{,}8088 \times \sqrt{2}}}{9{,}8088 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Cette valeur de t étant imaginaire nous montre que le corps

ne peut pas arriver à une distance de 4^m de son point de départ. Néanmoins on peut dire au bout de combien de temps *il aura parcouru* 4^m.

Pour atteindre le sommet de sa course, il met un temps

$$\theta = \frac{a}{g'} \text{ (M., n° 197)}, \quad \theta = \frac{2}{6^m935} = 0^s289 \text{ ou } 0^s29$$

et l'espace parcouru est (M., n° 197)

$$e = \frac{a^2}{2g'} = \frac{4}{2 \times 6{,}935} = 0^m289 \text{ ou } 0^m29$$

Après un nouveau temps θ, il est revenu au point de départ, ce qui fait donc qu'après un temps 2θ ou 0^s58 il a parcouru $2e$ ou 0^m58; il reste à parcourir

$$4^m - 0{,}58 = 3^m42$$

et le temps que mettra le corps est donné par la formule

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g'}}$$

dans laquelle il faut faire $e = 3^m42$

ce qui donne $$t = \sqrt{\frac{6{,}84}{6{,}935}} = 0^s98$$

En sorte que le temps total mis pour parcourir 4^m est

$$0^s58 + 0^s98 = 1^s56$$

8° *Avec quelle vitesse a-t-il fallu lancer le corps pour qu'en glissant le long du plan, il arrive à une horizontale donnée en même temps que le corps qui tombe librement.*

En appelant d la distance de l'horizontale au sommet du plan incliné et a la vitesse demandée, on a (M., n°s 188 et 189)

$$d = \frac{gt^2}{2} \tag{1}$$

et $$e = at + \frac{g't^2}{2} \tag{2}$$

De la formule (2) on tire

$$a = \frac{2e - g't^2}{2t}$$

Mais $$e = \frac{d}{\sin \alpha} = d\sqrt{2}$$

et $$g' = g \sin \alpha = \frac{g\sqrt{2}}{2}$$

On a, par suite, $$a = \frac{\sqrt{2}\,(4d - gt^2)}{4t}$$

La relation (1) donne $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$

Donc $$a = \frac{\sqrt{2}\,(4d - 2d)}{4\sqrt{\frac{2d}{g}}} = \frac{\sqrt{dg}}{2}$$

Rép. La vitesse initiale est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{gd}$.

Problème 258

Un plan incliné est long de 45^m; *il fait avec l'horizon un angle de* $23^o\ 4'\ 45''$. *Il est parcouru par un corps roulant. On propose de calculer en secondes et en tierces la durée de la chute.* (Douai, diplôme Ens. sp.)

On a (M., n° 189, 2°) $e = \frac{g't^2}{2}$

Mais (Probl. 257) $g' = g \sin \alpha$

d'où $$e = g \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \times t^2$$

par suite,

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \times 45}{9{,}8088 \times \sin 23^o\ 4'\ 45''}} = 4^s 50^t$$

Rép. La durée de la chute est de $4^s 50^t$.

Problème 259

Quel doit être l'angle d'un plan incliné :

1° *Si l'accélération est* $\frac{g}{2}$?

La relation (Probl. 157, 1°)

$$g' = g \sin \alpha$$

donne $$\frac{g}{2} = g \sin \alpha$$

d'où $$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

Rép. L'angle est de 30°.

2° *Si le corps doit parcourir* 1m *dans la première seconde?*

Les relations $e = \frac{g't^2}{2}$ et $g' = g \sin \alpha$

donnent $$e = g \sin \alpha \,.\, \frac{t^2}{2}$$

d'où l'on tire $$\sin \alpha = \frac{2e}{gt^2}$$

Pour $$t = 1, \quad e = 1$$

on a $$\sin \alpha = \frac{2}{g} = \frac{2}{9{,}8088}$$

d'où $$\alpha = 11^\circ\, 45'\, 55''$$

Rép. L'angle est de 11° 45′ 55″.

3° *Pour que le corps qui le descend mette trois fois plus de temps que celui qui parcourt la hauteur en chute libre?*

Les formules (M., nos 189, 2° et 197) donnent

$$e = \frac{g't'^2}{2} \tag{1}$$

et $$h = \frac{gt^2}{2} \tag{2}$$

e représentant la longueur du plan incliné et h sa hauteur.

On a de plus les relations

$$e = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad g' = g \sin \alpha, \quad t' = 3t$$

En mettant ces valeurs dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{g \sin \alpha \times 9t^2}{2} \tag{3}$$

En divisant (2) et (3) membre à membre, il vient

$$9 \sin^2 \alpha = 1$$

d'où $$\sin \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \alpha = 19^\circ\, 28'\, 16''$$

Rép. L'angle est de 19° 28′ 16″.

Problème 259 bis.

Les temps employés pour parcourir deux plans inclinés sont entre eux comme les quotients des longueurs des plans par les racines carrées des hauteurs.

Soient h la hauteur et l la longueur d'un plan, α son angle d'inclinaison.

Si t est le temps mis pour parcourir la longueur l, on a

$$l = \frac{g't^2}{2}$$

d'où
$$t = \sqrt{\frac{2l}{g'}}$$

Or
$$g' = g \sin \alpha = g \cdot \frac{h}{l}$$

donc
$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g \cdot \frac{h}{l}}} = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{l^2}{h}} = \frac{l}{\sqrt{h}} \sqrt{\frac{2}{g}}$$

Le temps t' employé à parcourir un second plan de longueur l' et de hauteur h' est

$$t' = \frac{l'}{\sqrt{h'}} \sqrt{\frac{2}{g}}$$

d'où
$$\frac{t}{t'} = \frac{\frac{l}{\sqrt{h}}}{\frac{l}{\sqrt{h'}}}$$

Problème 260

Une boule pesante a mis 5^s *pour descendre sans frottement un plan incliné long de* 12^m *dans un lieu où l'intensité de la pesanteur est* 9,8088. *On propose d'évaluer l'angle d'inclinaison du plan.* (Douai, diplôme Ens. sp.)

On a
$$e = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha$$

d'où
$$\sin \alpha = \frac{2e}{gt^2} = \frac{2 \times 12}{9{,}8088 \times 25}$$

On en tire
$$\alpha = 5^\circ\, 37'$$

Rép. L'angle d'inclinaison du plan est de $5^\circ\, 37'$.

Problème 261

Un corps pesant abandonné à lui-même a parcouru un plan incliné long de 5^m *et un plan horizontal de même longueur, l'inclinaison du plan étant de* $25^\circ\, 8'\, 5''$. *On demande :*

1° *La durée de la chute sur le plan incliné ;*

2° *La vitesse au bas du plan ;*

3° *La durée du parcours sur le plan horizontal. L'intensité de la pesanteur est* 9,8088. (Douai, diplôme Ens. sp.)

1° *La durée de la chute sur le plan incliné.*

On a $$e = \frac{g \sin \alpha}{2} \times t^2$$

d'où l'on tire

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{9{,}8088 \sin 25^\circ\, 8'5''}} = 1^s55$$

Rép. La durée est de 1^s55.

2° *La vitesse au bas du plan.*

On a $v = \sqrt{2eg \sin \alpha} = \sqrt{2 \times 9{,}8088 \times 5 \times \sin 25^\circ\, 8'\, 5''}$

Rép. La vitesse est 6^m45.

3° *La durée du parcours sur le plan horizontal.*

En ne tenant pas compte du choc que subit le corps en arrivant sur le plan horizontal, il prend sur ce plan un mouvement uniforme avec la vitesse calculée dans le n° précédent ; le temps nécessaire à parcourir le plan est

$$t = \frac{e}{v} = \frac{5}{6{,}45} = 0^s77$$

Rép. La durée est de 0^s77.

Problème 262

Quelle doit être la longueur d'un plan incliné de 30° :

1° *Pour que le corps qui la parcourt sans vitesse initiale acquière une vitesse de* 10^m ?

On a (Probl. 261) $v = \sqrt{2ge \sin \alpha}$

d'où $$e = \frac{v^2}{2g \sin \alpha} = \frac{100}{2 \times 9{,}8088 \times \frac{1}{2}} = 10^m19$$

Rép. La longueur doit être de 10^m19.

2° *Pour que le corps qui la parcourt sans vitesse initiale mette* 3^s *à la parcourir ?*

On a $$e = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha = \frac{9{,}8088 \times 9 \times \frac{1}{2}}{2} = 22^m07$$

Rép. La longueur doit être de 22^m07.

3° *Pour qu'un corps lancé avec une vitesse de* 2^m *la parcoure en* 5^s?

La formule (M., n° 188) donne

$$e = at + \frac{g't^2}{2}$$

Mais $$g' = g \sin \alpha$$

d'où $$e = at + \frac{gt^2 \sin \alpha}{2} = 2 \times 5 + \frac{9{,}8088 \times 25 \times \frac{1}{2}}{2} = 71^m305$$

Rép. La longueur doit être 71^m305.

Problème 263

Quelle doit être l'inclinaison d'un plan pour que le mobile qui le descend ait une vitesse horizontale maximum?

Si le plan est horizontal, le corps est au repos, la vitesse horizontale n'existe pas; si le plan est vertical, il n'y a pas de vitesse horizontale; dans l'intervalle de ces deux positions, la vitesse horizontale du mobile passe donc par un maximum.

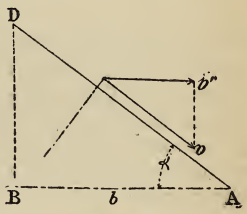


Fig. 351.

L'accélération sur le plan incliné est $g' = g \sin \alpha$, et la vitesse à un instant quelconque

$$v = g't = gt \sin \alpha$$

La composante horizontale v' de la vitesse v est

$$v' = v \cos \alpha = gt \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} gt \sin 2\alpha$$

Cette vitesse v' est maximum pour $\sin 2\alpha = 1$

soit $$2\alpha = 90^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = 45^\circ$$

Rép. L'inclinaison est 45°.

Problème 264

Quelle doit être l'inclinaison d'un plan de base b, *pour qu'il soit descendu par un mobile dans un temps minimum?*

Soit α l'inclinaison cherchée, l'accélération est $g' = g \sin \alpha$.

L'espace parcouru DA est $DA = \frac{b}{\cos \alpha}$ (fig. 351.)

Or on a $AD = \frac{g't^2}{2}$

et, en remplaçant DA et g' par leurs valeurs,

$$\frac{b}{\cos \alpha} = \sin \alpha \, . \, \frac{t^2}{2}$$

On en tire $t^2 = \frac{2b}{g \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{4b}{g} \times \frac{1}{\sin 2\alpha}$

Le temps t est minimum pour le maximum de $\sin 2\alpha$, soit pour $\sin 2\alpha = 1$ ou $\alpha = 45^o$

Rép. 45°.

Le temps employé est $t = \sqrt{\frac{4b}{g}}$

Problème 265

On a deux plans P *et* Q ; *le premier fait un angle de* 60° *avec le plan horizontal, et le second un angle de* 30° *avec le même plan. Une poulie a son axe situé suivant l'intersection horizontale des deux plans* P *et* Q ; *sur cette poulie passe un fil aux extrémités duquel se trouvent deux poids égaux qui se meuvent parallèlement aux plans* P *et* Q. *On demande de déterminer :*

1° *Dans quel sens aura lieu le mouvement ;*

2° *Quel sera l'espace parcouru après* 3^s ;

3° *Quelle sera la vitesse après* 3^s. (Conc. général, Ens. sp., 1877).

1° *Dans quel sens aura lieu le mouvement ?*

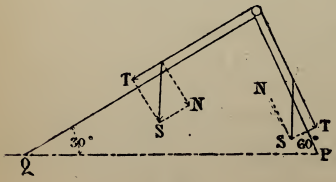


Fig. 352.

Décomposons chacun des poids S des corps en deux forces N, T ; N', T' normales et tangentielles.

On a $T = S \sin 30^o$

$T' = S \sin 60^o$

On voit que T' est plus grand que T ; le mouvement a donc lieu de manière qu'un des corps descendant sur le plan P, l'autre monte sur le plan Q.

2° *Quel sera l'espace parcouru après* 3ˢ ?

La force mouvante est $T' - T = S(\sin 60° - \sin 30°)$.

La masse mise en mouvement étant $\frac{2S}{g}$, l'accélération est

$$b = \frac{S(\sin 60 - \sin 30)}{\frac{2S}{g}} = \frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{g}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

L'espace parcouru est

$$e = \frac{1}{2}bt^2 = \frac{9}{8}g(\sqrt{3} - 1) = 8{,}078$$

Rép. 8ᵐ078.

3° *Quelle sera la vitesse après* 3ˢ ?

On a $v = bt$ (M., n° 187)

$$v = \frac{g}{4}(\sqrt{3} - 1) \times 3 = 5{,}385$$

Rép. 5ᵐ385.

Problème 266

On donne un plan incliné, de hauteur h, *d'inclinaison* α, *et l'on propose :*

1° *De déterminer le temps qu'un mobile pesant, parti du point* A *sans vitesse initiale, met à parcourir la portion* GH = S, *à une distance donnée* a *du point* A.

2° *De déterminer la position du point* G, *de manière qu'en faisant* GH = AC = h, *le temps employé à parcourir* GH *par le mobile parti du point* A, *soit le même que le temps que mettrait un autre mobile pour tomber librement de* A *en* C. *Pour la seconde partie de la question, on fera* α = 30° *et* h = 4ᵐ. (Bordeaux, dipl. Ens. sp., 1874.)

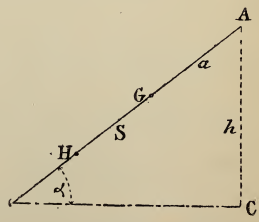


Fig. 353.

L'accélération sur ce plan est $g' = g \sin \alpha$.

En désignant par t le temps mis pour parcourir AG, on a

$$AG = a = \frac{g't^2}{2} \qquad (1)$$

Si x est le temps mis pour parcourir HG, on a aussi

$$AH = a + S = g'\frac{(t + x)^2}{2} \qquad (2)$$

De (2) on tire $$t+x=\sqrt{\frac{2(a+S)}{g'}}$$

et de (1) $$t=\sqrt{\frac{2a}{g'}}$$

d'où, en retranchant,

$$x=\sqrt{\frac{2}{g'}}(\sqrt{a+S}-\sqrt{a})=\sqrt{\frac{2}{g\sin\alpha}}(\sqrt{a+S}-\sqrt{a})$$

Rép. $$x=\sqrt{\frac{2}{g\sin\alpha}}(\sqrt{a+S}-\sqrt{a}).$$

2° Le temps mis pour parcourir h se tire de la formule

$$h=\frac{gt'^2}{2}$$

il est $$t'=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On doit avoir $t'=x$; x étant le temps trouvé précédemment, et comme on a $S=h$, on obtient

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2}{g\sin\alpha}}(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})$$

On en tire $$\sqrt{h\sin\alpha}=\sqrt{a+h}-\sqrt{a}$$

ou $$\sqrt{h\sin\alpha}+\sqrt{a}=\sqrt{a+h}$$

Élevant au carré,

$$h\sin\alpha+a+2\sqrt{a}\sqrt{h\sin\alpha}=a+h$$

d'où

$$a=\frac{h(1-\sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}=\frac{h[1-\cos(90^\circ-\alpha)]^2}{4\sin\alpha}=\frac{h\sin^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$$

Cette valeur de a détermine le point G.

Rép. $$a=\frac{h\sin^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}.$$

Application. En faisant $\alpha=30^\circ$, $h=4^m$, il vient

$$a=\frac{4\sin^4 30^\circ}{\sin 30^\circ}=4\sin^3 30^\circ=0^m50$$

Remarque. Le problème est évidemment impossible, si le plan est horizontal ou s'il est vertical; aussi pour $\alpha=0^\circ$ et pour $\alpha=90^\circ$, on obtient $a=\infty$ ou $a=0$.

Problème 267

Deux corps pesants partent en même temps de deux points élevés de la même hauteur h = 100m *au-dessus d'un plan horizontal. L'un suit la verticale, sans vitesse initiale; l'autre est assujetti à descendre le long d'un plan incliné avec une vitesse initiale de* 30m *par seconde, dirigée suivant la ligne de plus grande pente. Déterminer l'inclinaison du plan par la condition que ces deux mobiles atteignent en même temps le plan horizontal. On néglige le frottement et la résistance de l'air.* (Concours général.)

Pour parcourir verticalement la hauteur h, il faut un temps

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (1)$$

La longueur du plan est $l = \frac{h}{\sin x}$, x étant l'angle cherché; et l'accélération est $g' = g \sin x$. En remarquant que la longueur du plan doit être parcourue dans le temps t, on a

$$l = v_o t + \frac{1}{2} g' t^2$$

ou

$$\frac{h}{\sin x} = v_o t + \frac{1}{2} g t^2 \sin x$$

D'où, en résolvant par rapport à $\sin x$,

$$\sin x = \frac{-v_o t \pm \sqrt{v_o^2 t^2 + 2ght^2}}{gt^2}$$

ou

$$\sin x = \frac{-v_o \pm \sqrt{v_o^2 + 2gh}}{gt}$$

Le signe négatif du radical est à rejeter.

La valeur (1) de t mise dans cette relation donne

Rép. $\sin x = \frac{-v_o + \sqrt{v_o^2 + 2gh}}{\sqrt{2gh}}$.

Application. Les valeurs numériques de l'énoncé donnent

$$\sin x = \frac{-30 + \sqrt{30^2 + 2g \times 100}}{\sqrt{200g}}$$

$$x = 32^\circ\ 7'\ 18''$$

Problème 268

On donne un plan BA *de longueur* l, *incliné de* 30° *sur l'horizon. Un corps placé en* B *tombe en vertu de son propre poids, et en même temps un mobile parti de* A *est lancé avec une vitesse initiale* V_0. *En quel point les deux mobiles se rencontrent-ils?*

Quelle devrait être la valeur V_0 *pour que la rencontre ait lieu au milieu du plan?* (Conc. acad., Paris, 1875.)

1° *Rencontre des deux mobiles.*

Soit x la distance du point de rencontre R au point B.

L'accélération sur le plan est $g' = g \sin \alpha$.

Si t est le temps au bout duquel se fait la rencontre, on a,

pour le corps qui descend, $RB = x = \frac{g't^2}{2}$

» qui monte, $AR = l - x = V_0 t - \frac{g't^2}{2}$

En additionnant, il vient

$$l = V_0 t \quad \text{ou} \quad t = \frac{l}{V_0}$$

Alors $$x = \frac{g \sin \alpha}{2} \times \frac{l^2}{V_0^2}$$

Rép. $x = \frac{gl^2 \sin \alpha}{2V_0^2}$.

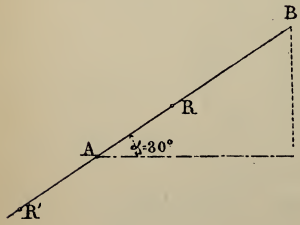


Fig. 354.

Remarque. Si x est inférieur à l, la rencontre a lieu telle que le suppose le problème; si x est plus grand que l, elle se fait en R' au-dessous de A.

Si $x = l$, elle se fait en A.

La rencontre est en A, si l'on a

$$\frac{gl^2 \sin \alpha}{2V_0^2} = l \quad \text{ou} \quad \frac{gl \sin \alpha}{2} = V_0^2$$

elle est en R pour $V_0^2 > \frac{gl \sin \alpha}{2}$

et en R' pour $V_0^2 < \frac{gl \sin \alpha}{2}$

2° *Valeur de* V_0 *pour que la rencontre ait lieu au milieu du plan.*

La rencontre a lieu au milieu du plan, si l'on a

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{gl^2 \sin \alpha}{2V_0^2} = \frac{l}{2}$$

d'où **Rép.** $V_0 = \sqrt{gl \sin \alpha}$.

Application. Pour $\alpha = 30°$, on obtient

Rép. $x = \frac{gl^2}{4V_0^2}$ et $V_0 = \sqrt{\frac{gl}{2}}$.

Problème 269

Deux corps se meuvent sur un plan incliné d'un angle α *et de longueur* l; *l'un part du sommet, et l'autre de la base; quel sera le point de rencontre ?*

1° *Les corps partent en même temps, le second est lancé avec une vitesse* a;

2° *Ils partent en même temps, le premier avec une vitesse* a, *le second avec une vitesse* b;

3° *Le second part* t *secondes après le premier, vitesses* a *et* b;

4° *Le premier part* t *secondes après le second, vitesses* a *et* b.

Le problème précédent donne

1re Rép. $x = \frac{gl^2 \sin \alpha}{2a^2}$.

Les trois autres cas se résolvent comme les problèmes 194 et 208, dans lesquels on remplace g par $g \sin \alpha$.

Nous renvoyons aux numéros où ces questions sont résolues et discutées.

Problème 270

Une bille descend sur un plan bien poli, incliné de 45° *sur le plan horizontal, et passe ainsi successivement par deux points* A *et* B *distants de* 4m. *Au moment où elle passe au point* A, *la bille possède une vitesse de* 5m *par seconde. Calculer :*

1° *Le temps employé par la bille pour aller de* A *à* B.

2° *La vitesse possédée par la bille au moment où elle passe au point* B. (Concours général.)

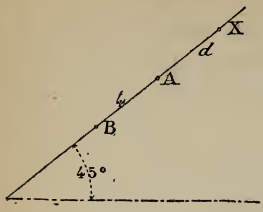


Fig. 355.

1° *Temps pour aller de* A *en* B.

Pour parcourir $AB = 4^m$, il a fallu un temps x donné par la relation

$$AB = 4^m = 5 \times x + g \sin 45^\circ \times \frac{x^2}{2}$$

d'où on tire

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 8g \sin 45^\circ}}{g \sin 45^\circ} = 0^s57$$

car le signe négatif du radical est à rejeter.

Rép. 0^s57.

2° *Vitesse possédée par la bille au moment où elle passe en* B.

On a $$v = 5 + g'x = 5 + gx \sin 45^\circ$$

En remplaçant x par sa valeur, on obtient

$$v = 5 + (-5 + \sqrt{25 + 8g \sin 45^\circ}) = \sqrt{25 + 8g \sin 45^\circ}$$

Rép. $v = 8^m97$.

Remarque. On peut arriver autrement à ce dernier résultat.

Soit d la distance du point de départ du mobile au point A.

La formule $v = \sqrt{2gh}$ donne pour la vitesse en A

$$5 = \sqrt{2g \sin 45^\circ . d}$$

d'où $$d = \frac{5^2}{2g \sin 45^\circ}$$

Elle fournit aussi pour la vitesse en B

$$v = \sqrt{2g \sin 45^\circ (d + 4)} = \sqrt{2g \sin 45^\circ \left(\frac{5^2}{2g \sin 45^\circ} + 4\right)}$$
$$= \sqrt{25 + 8g \sin 45^\circ}$$

Problème 271

Un corps de 1^k *attaché à un cordon et tombant verticalement tend à remonter un poids de* 5^k *le long d'un plan incliné de* 30°; *quelle sera l'accélération du mouvement?*

1° *Le cordon est parallèle au plan incliné.*

Les 5^k se décomposent en deux forces, l'une normale N, l'autre tangentielle T et dont la valeur est

$$5 \times \sin 30^\circ = 5 \times \frac{1}{2} = 2^k5$$

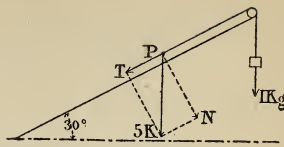


Fig. 356.

La force accélératrice est

$$F = 1^k - 2^k5 = -1^k50$$

L'accélération est négative, ce qui fait voir que le corps de 1^k ne peut pas faire remonter le corps de 5^k ; il le laisse descendre avec une accélération donnée par la formule $\varphi = \frac{F}{m}$

$$\varphi = \frac{1^k50}{\frac{5+1}{9,80}} = 9,80 \times \frac{1,50}{6} = 2^m45$$

Rép. $\varphi = 2^m45$.

2° *Le cordon est horizontal.*

Si le cordon peut demeurer horizontal, la force F qui retarde le mouvement est horizontale ; elle a pour composante tangentielle

$$T = F \cos 30^\circ$$

La force qui produit le mouvement descendant est donc

$$P \sin 30^\circ - F \cos 30^\circ$$

son accélération

$$\varphi = \frac{P \sin 30^\circ - F \cos 30^\circ}{\frac{P+F}{g}} = \frac{\left(5 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) 9,8}{6} = 2,67$$

Rép. $\varphi = 2^m67$.

3° *Le cordon fait un angle de 45° avec le plan.*

L'angle de 45° peut être au-dessus ou au-dessous du plan ; mais, dans ces deux cas, la composante tangentielle T est la même ; c'est

$$T = F \cos 45^\circ$$

Par suite, la force mouvante est

$$P \sin 45^\circ - F \cos 45^\circ$$

Et l'accélération du mouvement

$$\varphi = \frac{P \sin 30^\circ - F \cos 45^\circ}{\frac{P+F}{g}} = \frac{\left(5 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) 9,8}{6} = 2,92$$

Rép. $\varphi = 2^m92$.

Problème 272

Un corps de poids P *placé sur un plan incliné d'un angle* α *et de longueur* l *est tiré parallèlement au plan par un cordon qui passe sur une poulie et porte à son autre extrémité un poids* Q *qui tombe verticalement.*

1° *Que doit être le poids* Q *pour que* P *remonte le plan incliné?*

2° *Si* P = Q, *quel est l'espace parcouru au bout du temps* t?

3° *Au bout de quel temps le poids* Q *doit-il cesser son action pour que* P *remonte juste au sommet du plan?*

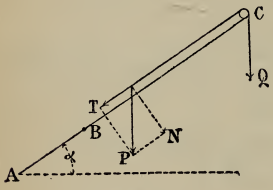


Fig. 357.

1° *Que doit être le poids* Q *pour que* P *remonte le plan incliné?*

Si l'on décompose le poids P en deux forces, l'une normale N, l'autre tangentielle T, il faut, pour que le corps P remonte, que l'on ait

$$Q > T$$

ou **Rép.** $Q > P \sin \alpha$.

2° *Si* P = Q, *quel sera l'espace parcouru au bout du temps* t?

La force accélératrice est $F = Q - T$, et pour le cas qui nous occupe $F = Q - Q \sin \alpha = Q(1 - \sin \alpha)$

L'accélération

$$\varphi = \frac{F}{m} = \frac{Q(1 - \sin \alpha)}{\frac{2Q}{g}} = \frac{g}{2}(1 - \sin \alpha)$$

Par suite, l'espace parcouru est

$$e = \frac{1}{2} \times \frac{g}{2}(1 - \sin \alpha)\, t^2 = \frac{g}{4}(1 - \sin \alpha)\, t^2$$

Rép. $e = \frac{gt^2}{2} \sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

3° *Au bout de quel temps le poids* Q *devra-t-il cesser son action pour que* P *remonte juste au sommet du plan?*

1re solution. Le corps P est supposé au bas du plan; P et Q sont quelconques et toutefois satisfont à la relation

$$Q > P \sin \alpha$$

L'accélération est

$$\varphi = \frac{Q - T}{m} = \frac{Q - P \sin \alpha}{\frac{Q + P}{g}} = g \times \frac{Q - P \sin \alpha}{Q + P}$$

Soit x le temps pendant lequel le poids Q doit agir; le poids P a parcouru un chemin

$$AB = \frac{\varphi x^2}{2} = g \times \frac{Q - P \sin \alpha}{Q + P} \times \frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

et la vitesse en B est

$$v = \varphi x = g \times \frac{Q - P \sin \alpha}{Q + P} \times x$$

Le corps étant arrivé en B, le poids Q cesse d'agir, le mobile P parcourt l'espace BC d'un mouvement uniformément retardé, dont la vitesse initiale est v, et l'accélération $g \sin \alpha$. Son mouvement cesse lorsqu'il a parcouru un espace (M., n° 197) donné par la formule

$$BC = \frac{v^2}{2g \sin \alpha} \qquad (2)$$

Or $$AB + BC = l$$

On a donc, en additionnant (1) et (2),

$$l = \frac{g}{2}\left(\frac{Q - P \sin \alpha}{Q + P}\right) x^2 + \frac{g^2 (Q - P \sin \alpha)^2 x^2}{(Q + P)^2 \times 2g \sin \alpha}$$

qui donne

$$l = \frac{gx^2}{2}\left[\frac{Q - P \sin \alpha}{Q + P} + \frac{(Q - P \sin \alpha)^2}{(Q + P)^2 \sin \alpha}\right]$$

et $$l = \frac{gx^2}{2}\left[\frac{Q (Q - P \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{(Q + P)^2 \sin \alpha}\right]$$

On en tire

Rép. $$x = (Q + P)\sqrt{\frac{2l \sin \alpha}{gQ (Q - P \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}} \qquad (3)$$

Remarques. I. Pour que x soit réel, il faut que l'on ait

$$Q > P \sin \alpha$$

ce qui est évident.

II. Si l'on fait $P = Q$, la formule (3) se simplifie et donne

$$x = \sqrt{\frac{8l \operatorname{tg} \alpha}{g \cos \alpha}}$$

2e solution. On peut rechercher en quel point du plan doit arriver le corps P pour que, le corps Q cessant son action, le corps P achève de gravir le plan incliné.

L'accélération du mouvement suivant $AB = y$ est (1re solution)

$$\varphi = \frac{(Q - P \sin \alpha)\, g}{Q + P}$$

Au point B, la vitesse du mobile est (M., no 190)

$$v = \sqrt{2\varphi y}$$

Animé de cette vitesse v, le mobile gravit une distance BC, donnée par la formule (M., no 197)

$$BC = \frac{v^2}{2g'} = \frac{2\varphi y}{2g \sin \alpha}$$

d'où $$BC = l - y = \frac{(Q - P \sin \alpha)\, y}{(Q + P) \sin \alpha}$$

qui donne $$y = \frac{l\,(Q + P) \sin \alpha}{Q\,(1 + \sin \alpha)} \qquad (4)$$

Et en rendant cette formule calculable par log.

$$y = \frac{l\,(Q + P) \sin \alpha}{2Q \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (5)$$

En mettant cette valeur de y dans la formule $x = \sqrt{\frac{2y}{\varphi}}$, qui donne le temps mis pour parcourir AB, on trouve la valeur obtenue précédemment pour x.

Pour que la valeur de y soit acceptable, elle doit être plus petite que l, soit

$$\frac{(Q + P) \sin \alpha}{Q\,(1 + \sin \alpha)} < 1$$

d'où l'on tire $$P \sin \alpha < Q$$

Condition de possibilité trouvée plus haut.

Problème 272 bis.

Quelle vitesse aura un mobile qui sera descendu d'une longueur l *sur un plan incliné d'un angle* α ?

L'accélération du mouvement est (Probl. 256 *bis*)

$$g' = g \sin \alpha$$

La formule $v = \sqrt{2be}$ (M., n° 190)
fournit

Rép. $v = \sqrt{2gl \sin \alpha}$ (1)

Remarque. On a la relation

$$h = l \sin \alpha$$

d'où $l = \dfrac{h}{\sin \alpha}$

Dès lors (1) devient $v = \sqrt{2gh}$

Ainsi, *au bas d'un plan incliné, un corps possède la même vitesse qu'il aurait s'il était tombé verticalement suivant la hauteur du plan.*

Problème 272 ter.

De l'extrémité du diamètre vertical d'un cercle, on laisse glisser un corps le long d'une corde AC *qui fait un angle* β *avec ce diamètre. Quel temps mettra le corps pour parcourir cette corde ?*

Montrer que ce temps reste le même quand on fait varier l'angle β.

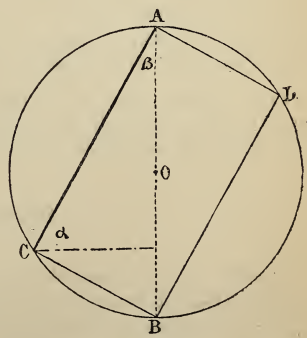


Fig. 358.

Le temps mis pour parcourir AC se tire de la formule

$$e = \frac{bt^2}{2}$$

qui donne

$$t = \sqrt{\frac{2e}{b}}$$

et dans laquelle l'accélération $b = g' = g \sin \alpha = g \cos \beta$.

On a donc $$t = \sqrt{\frac{2AC}{g \cos \beta}}$$

Or le triangle rectangle ABC donne $AC = d \cos \beta$, en posant

$$AB = d$$

d'où $$t = \sqrt{\frac{2d \cos \beta}{g \cos \beta}} = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

On voit que ce temps est indépendant de l'angle β, d'où l'on formule ce théorème :

Théorème. *Tous les corps qui partent d'un même point* A *et suivent des directions rectilignes quelconques sont au bout d'un même temps sur la surface d'une même sphère.*

On dit encore : *Un mobile met un même temps pour parcourir toutes les cordes d'une sphère qui partent du point culminant* A.

Remarques. I. Considérons le rectangle ACBD dont la diagonale AB est verticale. Les temps mis pour parcourir AC et AD sont égaux ; or AD est parallèle et égal à BC ; donc les *trois temps employés par un mobile pour parcourir les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle rectangle ayant l'hypoténuse verticale, sont égaux.*

II. Voici encore une autre proposition : *Deux plans inclinés ont leur hauteur commune ; des corps partent du sommet commun et descendent sur chacun de ces plans ; prouver qu'ils arrivent en même temps au pied des perpendiculaires abaissées d'un point de la hauteur sur ces plans.*

Cet exercice n'est autre que le théorème formulé précédemment; car le sommet, les deux pieds et le point pris sur la hauteur sont sur un même cercle ou sur une même sphère.

Problème 273

Quelle est la nature du mouvement d'un point pesant sur un plan incliné parfaitement poli?

Dans un plan vertical, on donne un cercle dont le diamètre AB *est vertical et une corde quelconque* AM, *faisant un angle* α *avec* AB ; *quel est le temps employé par un point pesant à parcourir la corde* AM ?

Que peut-on conclure du résultat? (Poitiers, Bacc., 1878.)

La 1re partie de cette question est traitée dans les problèmes précédents. La 2e n'est autre que le problème 272 *ter*, où l'on trouve les développements suffisants.

Rép. Le temps cherché est $t = \sqrt{\frac{2AB}{g}}$.

Note. — Le problème 272 *ter* nous servira à donner les solutions de plusieurs des problèmes qui sont proposés dans le cours, ainsi que celles de quelques questions nouvelles que nous ajoutons.

Problèmes supplémentaires.

Problème I

Un point A *et une droite* BC *sont dans un plan vertical; mener la droite qui sera parcourue dans le moins de temps par le mobile qui part du point* A *et qui va rencontrer la droite* BC.

Solution géométrique. Par le point A, menons l'horizontale AM; prenons MD = AM, la droite AD sera celle qui répondra à la question. En effet, si l'on mène la verticale AO et la bissectrice MO de l'angle M, on obtient le

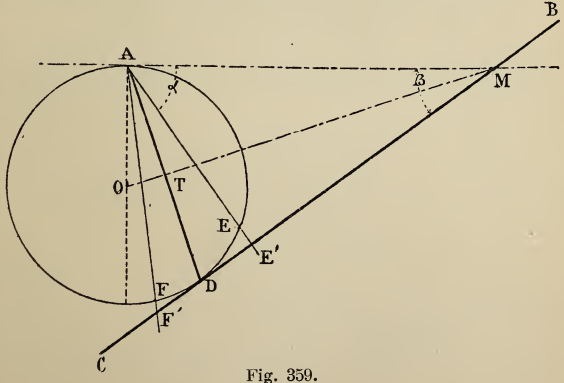


Fig. 359.

centre d'un cercle tangent à MA en A et à MC en D. Or, d'après le problème 272 *ter*, les temps mis pour parcourir les cordes AE, AD, AF, etc., sont les mêmes; donc le temps employé à parcourir AD est inférieur au temps nécessaire pour franchir AE', AF', la ligne AD est donc la droite cherchée.

Solution analytique. On peut traiter cette question par le calcul.

Soit AD′ (fig. 360) une des droites allant du point A à la droite donnée. Désignons par α et β les angles de AD′ et de MD′ avec l'horizon.

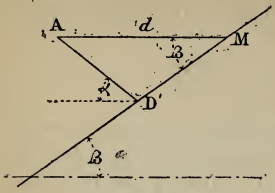


Fig. 360.

Le plan incliné AD′ est parcouru pendant un temps t fourni par la relation

$$AD' = \frac{g't^2}{2}$$

qui donne $t^2 = \frac{2AD'}{g'} = \frac{2AD'}{g \sin \alpha}$

Dans le triangle AD′M, on a

$$\frac{AD'}{AM} \quad \text{ou} \quad \frac{AD'}{d} = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Dès lors

$$t^2 = \frac{2d}{g} \times \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}$$

Le minimum du temps t a lieu en même temps que le maximum de l'expression

$$\sin \alpha \sin (\alpha + \beta)$$

Posons $\sin \alpha \sin (\alpha + \beta) = m$

On a $\sin \alpha (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = m$

ou $\sin^2 \alpha \cos \beta - m = - \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta$

en élevant au carré,

$$\sin^4 \alpha \cos^2 \beta - 2m \sin^2 \alpha \cos \beta + m^2 = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta$$

En mettant en facteur, il vient

$$\sin^4 \alpha (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - \sin^2 \alpha (2m \cos \beta + \sin^2 \beta) + m^2 = 0$$

ou $\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha (2m \cos \beta + \sin^2 \beta) + m^2 = 0$

On en tire

$$\sin^2 \alpha = \frac{2m \cos \beta + \sin^2 \beta \pm \sqrt{(2m \cos \beta + \sin^2 \beta)^2 - 4m^2}}{2}$$

Pour que $\sin^2 \alpha$ soit réel, on doit avoir

$$(2m \cos \beta + \sin^2 \beta)^2 \geqq 4m^2$$

et, comme l'angle β étant aigu, les deux membres sont positifs, on peut prendre la racine $2m \leqq 2m \cos \beta + \sin^2 \beta$

ou $m \leqq \frac{\sin^2 \beta}{2 (1 - \cos \beta)}$

Dès lors, pour $m = \frac{\sin^2 \beta}{2 (1 - \cos \beta)}$, il vient

$$\sin^2 \alpha = \frac{\frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{1 - \cos \beta} + \sin^2 \beta}{2} = \frac{\sin^2 \beta}{2} \times \frac{1}{1 - \cos \beta}$$

et, en multipliant haut et bas par $1 + \cos \beta$,

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \beta (1 + \cos \beta)}{1 - \cos^2 \beta} = \frac{1 + \cos \beta}{2}$$

d'où $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} - 1\right) = \cos^2 \frac{\beta}{2}$

ou $$\sin \alpha = \cos \frac{\beta}{2}$$

ce qui exige que l'on ait $$\alpha + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

d'où $$\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

La construction géométrique fournit également ce résultat ; en effet, dans le triangle rectangle ATM (fig. 359), à cause de l'égalité de AM et de DM, on a

$$\text{TAM} + \text{AMT} = 90^\circ$$

ou, en nous servant des mêmes notations d'angles,

$$\alpha + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

Le minimum du temps est

$$t^2 = \frac{2d}{g} \times \frac{\sin \beta}{\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2} + \beta\right)}$$

$$= \frac{2d}{g} \times \frac{\sin \beta}{\cos \frac{\beta}{2} \times \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{2d}{g} \frac{\sin \beta}{\cos^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$t^2 = \frac{4d}{g} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

La discussion de cette dernière formule est pleine d'intérêt, nous engageons le lecteur à s'y exercer.

Problème II

Étant donnés une droite YY′ *et un point* A *dans un même plan vertical, de quel point* X *de la droite faut-il laisser partir un corps, suivant le plan incliné* XA, *pour que le temps mis pour aller de* X *en* A *soit minimum?*

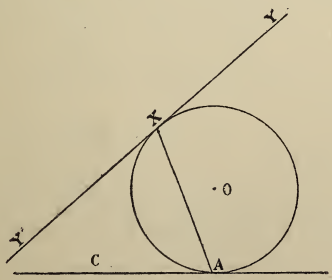


Fig. 361.

Le point X est donné par la circonférence tangente en A à l'horizontale AC et à la droite YY′

Ce problème est, pour ainsi dire, l'inverse du précédent.

Problème III

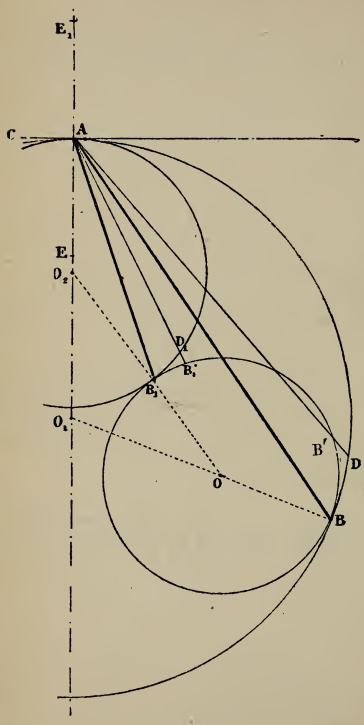


Fig. 362.

Trouver les chemins qui fourniraient à un mobile soumis à l'action de la pesanteur les temps maximum et minimum pour aller d'un point A *à une circonférence* O.

Le point A et la circonférence sont dans un même plan.

1° **Temps maximum.** Menons une circonférence tangente en A à l'horizontale CA, et tangente extérieurement au cercle O *; soit B le point de tangence, AB sera le chemin cherché.

En effet, il suffit de considérer un point B de la circonférence donnée, de joindre AB′ et de remarquer que les temps mis pour parcourir AD, AB, sont égaux (page 408, Th.).

2° **Temps minimum.** On mène la deuxième circonférence tangente au cercle donné et à la droite AC en A ; elle fournit la direction AB_1 correspondant au minimum du temps, car les temps mis pour parcourir AD_1, AB_1, étant égaux, celui employé à franchir AB'_1 sera supérieur.

Remarques. I. Si le point donné A est à l'intérieur de la circonférence (fig. 363), on ne peut mener qu'une seule circonférence tangente en A à l'horizontale CA et tangente au cercle donné ; elle fournit le point B_1 de tangence et, par suite, le chemin AB parcouru dans le *temps minimum.*

---

* Le centre de cette circonférence s'obtient en prenant la perpendiculaire AE à AC égale au rayon de la circonférence donnée et élevant sur le milieu de EO une perpendiculaire qui, par sa rencontre avec la verticale en A, donne le centre O_1. — Pour la circonférence tangente en B_1, on porte la longueur AE en sens contraire AE_1.

Il n'y a pas lieu, en effet, de chercher le chemin correspondant au *temps maximum;* car, si l'on considère les plans horizontaux AC, AC′, il faut, pour ainsi dire, un temps *infini* au mobile pour aller de A en C ou en C′.

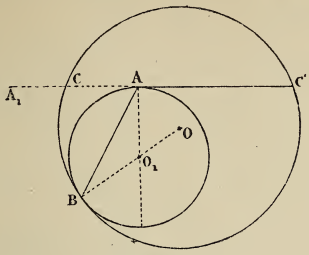


Fig. 363.

II. De même si le point donné A est au-dessous de l'horizontale passant par le point le plus élevé de la circonférence donnée, il est impossible de mener la circonférence qui fournit le plan du temps maximum, et, en effet, l'horizontale A_1CC' donne deux plans parcourus, pour ainsi dire, dans des temps infinis.

Problème IV

De quels points de la circonférence O *faut-il laisser partir un corps suivant des plans inclinés aboutissant au point* A *situé dans le plan du cercle, pour que les temps employés pour atteindre* A *soient maximum et minimum?*

Ce problème est en quelque sorte l'inverse du précédent; les solutions s'obtiennent de la même manière par les circonférences tangentes à l'horizontale AC et à la circonférence donnée; il suffit de renverser la figure 362 pour se rendre compte des constructions.

Ce problème présente les mêmes remarques que le problème III.

Fig. 364.

Problème V

Un corps partant de A *suit le plan incliné* AK; *quelle direction doit avoir un plan incliné partant de* B *pour que les deux mobiles* A *et* B *arrivent ensemble au point* X ?

On connaît $AB = d$ et l'angle $\hat{o}$ de AB avec l'horizontale BD.

Supposons que AK et B déterminent un plan vertical.

Prenons pour inconnue l'angle β de la direction BX avec AB.

Désignons par g_1, g_2, les accélérations sur les deux plans AX et BX, et soit t le temps commun mis pour atteindre X.

On a $$AX = g_1 \frac{t^2}{2}, \quad BX = g_2 \frac{t^2}{2}$$

d'où $$\frac{AX}{BX} = \frac{g_1}{g_2}$$

Le triangle ABX donne $$\frac{AX}{BX} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

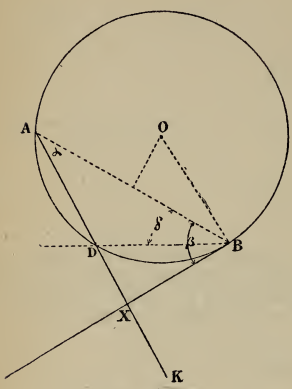


Fig. 365.

D'autre part,

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{g \sin AXM}{g \sin AXN} = \frac{\sin(\delta + \alpha)}{\sin(\beta - \delta)}$$

$$\frac{AX}{BX} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\beta - \delta)} \quad (1)$$

Mais le triangle DXB donne précisément

$$\frac{BX}{DX} = \frac{\sin BDX}{\sin DBX} = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\beta - \delta)}$$

d'où $$\frac{AX}{BX} = \frac{BX}{DX}$$

soit $$BX^2 = AX \,.\, DX$$

Nous pouvons tirer de là deux constructions pour trouver le point X.

1° La dernière relation indique que BX est tangent au cercle qui passe par ABD.

Donc, pour trouver X, menons le cercle des trois points connus ADB, la tangente en B sera la direction BX.

2° On peut remarquer que l'angle de segment DBX égale l'angle XAB ou α ; dès lors il suffit de faire $DBX = \alpha$, on obtient BX.

Remarque. Ce dernier résultat peut s'obtenir par le calcul, sans avoir besoin de mener la circonférence.

En effet, la formule (1) $$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\sin(\beta - \delta)}$$

donne $$\sin \beta \times \sin(\beta - \delta) = \sin \alpha \times \sin(\alpha + \delta)$$

ou $$\frac{1}{2}\left[\cos \delta - \cos(2\beta - \delta)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos \delta - \cos(2\alpha + \delta)\right]$$

d'où $$\cos(2\beta - \delta) = \cos(2\alpha + \delta)$$

soit $$2\beta - \delta = 2\alpha + \delta$$

et enfin $$\beta = \alpha + \delta$$

Il en résulte donc que DBX, qui vaut $\beta - \delta$, est égal à α.

Problème VI

Étant donnés un plan incliné terminé en A *et un point* B, *trouver un point* X *sur* AK, *tels que les plans* XA *et* XB *soient parcourus pendant le même temps.*

Ce problème est, pour ainsi dire, l'inverse du précédent; il se traite de la

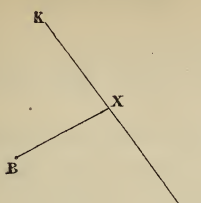


Fig. 366.

même manière, et l'on trouve les mêmes solutions; il suffit de renverser la figure 365 pour avoir toutes les constructions.

Problème VII

Étant donnés deux points A *et* B, *trouver les directions à donner à deux points inclinés partant de ces points, pour que deux mobiles partant de* A *et* B *se rencontrent au bout d'un temps* t.

Au bout d'un temps t l'espace parcouru en chute libre est

$$e = \frac{gt^2}{2}$$

Avec cette longueur e comme diamètre, décrivons deux cercles O et O_1 tangents en A et B aux horizontales de ces points; les points de rencontre X, X_1 de ces circonférences donneront les plans inclinés AX, BX ou AX_1, BX_1, qui correspondent à la question. En effet, les plans AX et BX sont parcourus dans le même sens que les diamètres verticaux et égaux AA′, BB′, c'est-à-dire pendant le temps t.

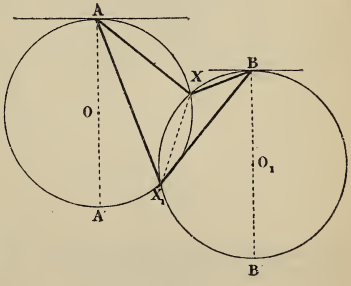


Fig. 367.

Remarques. I. Si le temps donné t était trop petit, les deux cercles ne se couperaient pas, et il n'y aurait pas de solution; t doit donc avoir une valeur minimum que nous étudions dans le problème IX.

II. Les constructions que nous venons de faire sont toutes dans un plan vertical; mais, en réalité, nous pouvons considérer les deux sphères O, O_1, et tous les points de leur cercle d'intersection, dont le diamètre est XX_1, satisfont à la question.

Problème VIII

Étant donnés dans l'espace trois points A, B, C, *trouver un point* X *tel que les plans inclinés* AX, BX, CX *soient parcourus pendant un temps donné* t.

Il suffit, pour déterminer X, d'imaginer trois sphères égales, ayant chacune pour diamètre $e = \frac{gt^2}{2}$, et qui soient respectivement tangentes en A, B, C au-dessous des plans horizontaux passant par chacun de ces points. Les deux points communs à ces trois sphères seront les deux points répondant à la question.

Problème IX

Étant donnés deux points A *et* B, *mener par ces deux points deux plans inclinés de manière que deux mobiles placés en* A *et* B *se rencontrent dans le minimum de temps.*

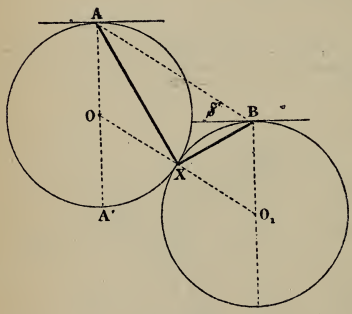


Fig. 368.

Il est aisé de voir qu'il suffit de mener deux circonférences égales tangentes aux horizontales en A et en B et tangentes entre elles.

Si l'on remarque que

$$AB = OO_1 = 2OX = 2O_1X$$

on voit qu'il suffit de prendre sur les verticales en A et en B les longueurs OA, O_1B égales à $\frac{AB}{2}$ et de décrire les deux cercles OA, O_1B, qui seront tangents et dont le point de contact X donnera les deux plans cherchés AX, BX.

Remarques. I. Si on fait $AB = a$, le temps t mis pour aller de A en X égale celui mis pour aller de A en A'; or AA' vaut AB; on a donc

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

II. Le temps minimum est indépendant de l'inclinaison de AB sur l'horizontale, c'est-à-dire de l'angle δ.

On pourrait reprendre les questions précédentes en supposant les points A et B sur une même horizontale.

Aux questions VII et IX peuvent s'en rattacher deux autres qui sont, pour ainsi dire, leurs inverses; c'est l'objet du problème suivant.

Problème X

Étant donnés deux points A *et* B, *trouver un point* X *tel que deux mobiles partant de* X *et suivant les plans inclinés* XB *et* XA *arrivent en* A *et en* B :

1° *Dans un temps donné;*
2° *Dans un temps minimum.*

Ces deux questions se traitent exactement comme leurs corrélatives VII et IX; elles fournissent les mêmes résultats : il suffit de renverser les figures 367 et 368 pour avoir celles qui conviennent à ces deux problèmes.

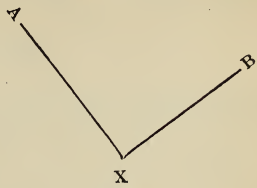


Fig. 369.

Problème 274

D'un point A *partent plusieurs droites qui aboutissent à la même horizontale, des points matériels partant ensemble du point A glissent sur ces droites.*

1° *Où seront tous ces points au bout du même temps* t?

Rép. Sur une même circonférence décrite sur une verticale de longueur $\frac{gt^2}{2}$ comme diamètre (Voir Probl. 272 *ter*).

2° *Quelle sera la vitesse de chaque point en atteignant la même horizontale?*

On a la formule $v = \sqrt{2g'e}$, g' étant l'accélération, e l'espace parcouru.

Pour le plan AC, on a

$$e = AC = \frac{h}{\sin\alpha}, \text{ et } g' = g \sin\alpha$$

donc la vitesse en C est

$$\sqrt{2g \sin\alpha \times \frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh}$$

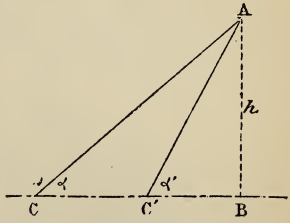


Fig. 370.

Pour le plan AC', on a de même

$$e' = AC' = \frac{h}{\sin\alpha'} \quad \text{et} \quad g'' = g \sin\alpha'$$

donc la vitesse en C' est

$$\sqrt{2g \sin\alpha' \times \frac{h}{\sin\alpha'}} = \sqrt{2gh}$$

Rép. Les divers points atteignent l'horizontale avec la même vitesse, qui est celle due à la hauteur de chute AB.

Remarque. Ce résultat aurait pu se déduire immédiatement du probl. 272 *bis*.

Problème 275

Étant donnés deux plans inclinés AB *et* AC, *ayant une hauteur* AD *commune et formant avec le plan horizontal* BC *des angles* ACD *et* ABD *complémentaires qui sont entre eux comme* 1 *est à* 2, *on laisse tomber du point* A *simultanément trois corps : le premier suivant le plan incliné* AC, *le second suivant* AB, *le troisième suivant la verticale* AD. *La vitesse initiale est nulle, et on fait abstraction du frottement et de la résistance de l'air. On demande :*

1° *De déterminer les positions* L, M, P *des trois corps après un temps de chute de* 3s *et de calculer les côtés et les angles du triangle* LMP *que l'on obtient en joignant deux à deux les points* L, M, P *par des droites.*

2° *De démontrer que, quel que soit le temps de la chute,* LMP *reste toujours semblable à lui-même et que son aire est proportionnelle à la quatrième puissance de ce temps.* (Aix, Conc. acad., 1877.)

1° *Déterminer les positions* L, M, P *des trois corps après un temps de chute de* 3s, *et calculer les côtés et les angles du triangle* LMP *que l'on obtient en joignant deux à deux les points* L, M, P *par des droites.*

Les angles ACD et ABD sont de 60° et de 30°.

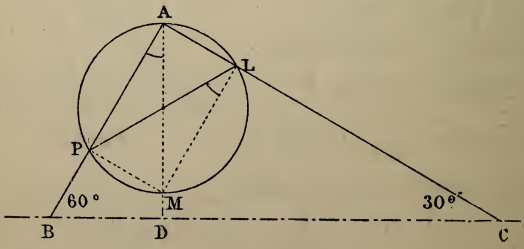


Fig. 371.

Les trois corps seront en même temps sur une même circonférence, et l'on aura

Rép. $\left\{\begin{array}{l} AM = \dfrac{g \times 3^2}{2} = \dfrac{9}{2} g. \\ AP = AM \sin 60^\circ = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} g. \\ AL = AM \sin 30^\circ = \dfrac{9}{4} g. \end{array}\right.$

Le triangle MPL est un triangle rectangle, car l'angle A est droit, et on a les éléments suivants :

Rép. Côtés $\left\{\begin{array}{l} PL = AM = \dfrac{9}{2} g \quad = 44^m14 \\ ML = AP = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} g = 38^m22 \\ PM = AL = \dfrac{9}{4} g \quad = 22^m07 \end{array}\right.$ Angles $\left\{\begin{array}{l} M = 90^\circ. \\ P = 60^\circ. \\ L = 30^\circ. \end{array}\right.$

2° *Démontrer que, quel que soit le temps de la chute,* LMP *reste toujours semblable à lui-même et que son aire est proportionnelle à la quatrième puissance de ce temps.*

Le triangle PML est semblable au triangle ABC, ainsi qu'on le voit très aisément, car l'angle PML = PAM = 30°. Son aire est proportionnelle au carré de PL.

Or $$PL = AM = \frac{g \times t^2}{2}$$

d'où $$\overline{PL}^2 = \frac{g^2 t^4}{4}$$

Ce qui justifie l'énoncé.

Problème 275 bis.

Théorème de Galilée. *Montrer que les espaces parcourus par un corps en chute libre, pendant des temps égaux consécutifs, sont dans le rapport de la suite des nombres impairs.*

(*C'est sous cette forme que Galilée a énoncé les lois de la chute des corps.*)

Considérons des instants consécutifs de durée t; l'espace e_1 parcouru pendant le premier instant est (M., n° 189, 2°)

$$e_1 = \frac{1}{2} g t^2$$

Pendant le temps $2t$, l'espace parcouru est

$$\frac{1}{2} g \times 4t^2$$

Donc l'espace e^2 parcouru pendant le deuxième instant est

$$e^2 = \frac{1}{2} gt^2 (4 - 1) = \frac{1}{2} gt^2 \times 3$$

De même, pour l'espace e_3 parcouru pendant le troisième instant, on a $e_3 = \frac{1}{2} gt^2 (9 - 4) = \frac{1}{2} gt^2 \times 5$

et ainsi de suite, on voit que ces espaces sont comme 1 est à 3, 5, 7... ce qui démontre la proposition.

Remarque. La somme de tous les espaces $e_1 + e_2 + e_3 \ldots + e_n$ doit donner l'espace e parcouru pendant un temps nt; on trouve

$$e = \frac{1}{2} gt^2 [1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1)]$$

La parenthèse étant la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2; on a donc

$$e = \frac{1}{2} gt^2 \times n^2$$

ou

$$e = \frac{1}{2} g (nt)^2$$

qui exprime, en effet, l'espace parcouru pendant le temps nt.

Problème 276

Diviser la longueur d'un plan incliné en trois parties qui soient parcourues pendant des temps égaux par un corps qui glisse le long de ce plan.

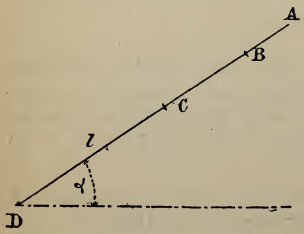


Fig. 372.

Soient AB, BC, CD ces parties.

Le temps mis pour parcourir chacune de ces parties étant t, on a

$$AB = g \sin \alpha \times \frac{t^2}{2} \qquad (1)$$

La vitesse en B est

$$v = (g \sin \alpha) \times t$$

L'espace BC donne

$$BC = vt + g \sin \alpha \times \frac{t^2}{2} \qquad (2)$$

La vitesse en C est

$$v' = (g \sin \alpha) \times 2t$$

L'espace CD donne à son tour

$$CD = v't + g \sin \alpha \times \frac{t^2}{2} \qquad (3)$$

En additionnant (1), (2) et (3), on obtient

$$AB + BC + CD = l = 3g \sin \alpha \times \frac{t^2}{2} + vt + v't$$

$$= 3g \sin \alpha \times \frac{t^2}{2} + 3g \sin \alpha \times t^2$$

ou $$l = \frac{9}{2} gt^2 \sin \alpha$$

d'où l'on tire $$t = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$$

On obtient dès lors pour les diverses parties du plan

$$AB = g \sin \alpha \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{2l}{g \sin \alpha} = \frac{l}{9}$$

$$BC = vt + g \sin \alpha \times \frac{t^2}{2} = g \sin \alpha \times t^2 + g \sin \alpha \frac{t^2}{2} = \frac{2l}{9} + \frac{l}{9} = \frac{3l}{9}$$

$$CD = v't + g \sin \alpha \times \frac{t^2}{2} = \frac{4l}{9} + \frac{l}{9} = \frac{5l}{9}$$

Rép. Les diverses parties du plan sont

$$\frac{l}{9}, \quad \frac{3l}{9}, \quad \frac{5l}{9}$$

On voit qu'il suffit de diviser le plan dans le rapport des nombres impairs 1, 3, 5.

Remarque. Ce résultat aurait pu se déduire immédiatement du théorème de Galilée (Probl. 275 *bis*).

Problème 277

Un corps glisse le long d'un plan incliné d'un angle α, *d'une longeur* l, *et arrive dans le vide; au bout de quel temps et en quel point atteindra-t-il une horizontale qui est à une distance* d *de* BC?

La vitesse que le corps possède en B est

$$v = \sqrt{2g\text{AC}} \qquad \text{(Probl. 274.)}$$

ou $$v = \sqrt{2gl \sin \alpha}$$

Au bout d'un temps t quelconque, le mobile serait venu en B'

si la vitesse v seule eût agi, et l'on aurait $BB' = vt$; mais la pesanteur l'aurait fait venir en B″ de manière que

$$BB'' = \frac{gt^2}{2}$$

et, en réalité, le corps est en B_1 sommet du parallélogramme $BB'B_1B''$

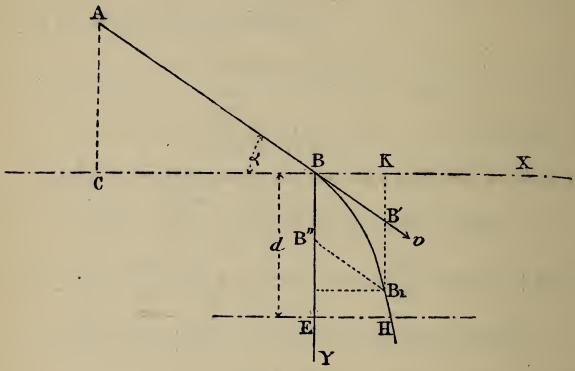


Fig. 373.

Désignant B_1K par y et BK par x, on a

$$B_1K = BB'' + B'K = \frac{1}{2} gt^2 + vt \sin \alpha = y \qquad (1)$$

et

$$BK = vt \cos \alpha = x \qquad (2)$$

En éliminant t entre (1) et (2), on a

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \alpha} + v \frac{x}{v \cos \alpha} \sin \alpha$$

ou

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x}{v^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha \qquad (3)$$

Le temps employé pour atteindre l'horizontale EH est donné par la relation (1), dans laquelle on fait $y = d$, et qui devient

$$\frac{1}{2} gt^2 + vt \sin \alpha = d$$

d'où

$$t = \frac{-v \sin \alpha \pm \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gd}}{g}$$

La distance EH s'obtient en faisant $y = d$, ou t égal à la valeur que nous venons de trouver.

On a, dans les deux cas,

$$EH = \frac{v \cos \alpha}{g}\left(-v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gd}\right)$$

Rép. Le temps mis pour atteindre l'horizontale est

$$t = \frac{-v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gd}}{g}.$$

Le point H où cette horizontale est atteinte est donné par

$$EH = \frac{v \cos \alpha}{g}\left(-v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gd}\right)$$

et l'on a $$v = \sqrt{2gl \cos \alpha}$$

Problème 278

Dans un plan, on donne un point A *et une droite* B'C. *Cette droite fait un angle de* 30° *avec la verticale* AB' *du point* A. *La longueur* AB' *est de* 1 *mètre. On demande :*

1° *Suivant quelle droite doit descendre un mobile pour aller dans le moins de temps possible du point* A *à la droite* BC.

2° *En quel point de* BC *arrivera le mobile.*

3° *Quel sera le temps employé.*

4° *Quelle sera la vitesse du mobile en atteignant* BC.

Les deux premières parties du problème sont résolues page 409.

3° *Temps employé* *.

Supposons que le point A soit déterminé par sa distance $AH = a$ à la droite BC. Le chemin parcouru est $AD = \frac{a}{\cos DAH}$

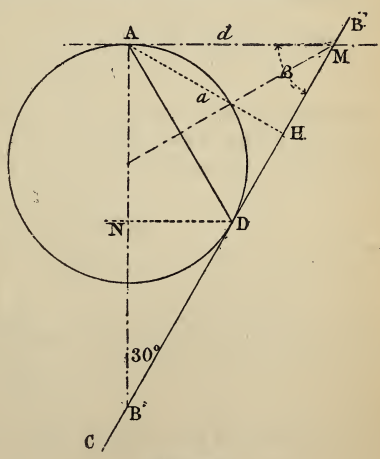


Fig. 374.

* Le problème I, page 411, donne ce temps; mais nous avons cru bon de le calculer une seconde fois d'une autre manière, en faisant choix d'autres inconnues.

Si β désigne l'inclinaison de BC sur l'horizon, l'angle $DAH = \frac{\beta}{2}$,

et l'on a $$AD = \frac{a}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

L'accélération sur AD est $g \sin \delta$, le mouvement sur ce plan donne $$AD = g \sin \delta \times \frac{t^2}{2}$$

d'où $$\frac{a}{\cos\frac{\beta}{2}} = g \sin \delta \times \frac{t^2}{2}$$

On en tire $$t = \sqrt{\frac{2a}{g}} \times \frac{1}{\sqrt{\sin \delta \cos\frac{\beta}{2}}}$$

Mais on a $$\delta = MAD = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

dès lors $$\sin \delta = \cos\frac{\beta}{2}$$

et il vient

Rép. $$t = \sqrt{\frac{2a}{g}} \times \frac{1}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Remarques. I. En se reportant au problème I, page 411, on peut voir que la valeur de t qu'on y trouve est la même que celle-ci ; si, en effet, on remplace a par sa valeur en fonction de $d = AB$,

$$a = d \sin \beta$$

il vient $$t^2 = \frac{2d \sin \beta}{g \cos\frac{\beta}{2}} = 4\frac{2d \sin \beta}{g \cos^2\frac{\beta}{2}}$$

II. Si BC est horizontale, le temps le plus court correspond à la perpendiculaire AD, qui est alors verticale, et on a

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$$

C'est bien, en effet, ce que l'on sait.

III. Si BC est verticale, on a

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g}} \frac{1}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{\frac{a}{g}}$$

La construction géométrique montre que AD est incliné à 45°.

IV. L'angle β peut prendre toutes les valeurs de 0 à 180° ; la construction géométrique comme la formule en t indiquent toujours une solution.

4° *Vitesse du mobile en atteignant* BC.

On a $$v = bt$$

d'où $$v = g \sin \delta \sqrt{\frac{2a}{g}} \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}}$$

Or $$\sin \delta = \cos \frac{\beta}{2}$$

donc $$v = g \sqrt{\frac{2a}{g}} = \sqrt{2ga}$$

Rép. $v = \sqrt{2ga}$.

Remarque. Le résultat $v = \sqrt{2ga}$ indique que le corps a, en D, la vitesse qu'il aurait s'il avait parcouru la distance a verticalement. On justifie ce résultat, en remarquant d'une part, à cause de l'égalité des angles DAH et DAN, que l'on a $AN = AH = a$, et d'autre part que la vitesse en D est la même que si le corps était tombé suivant $AN = a$.

Application. $AB' = 1^m$, $AB'M = 30°$

d'où $$\beta = 60°$$

1° et 2°. La droite donnant une durée de chute minimum rencontre BC en un point D distant de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ du point M; car le triangle rectangle B'AM, dans lequel $B = 60°$, donne

$$MD = MA \quad \text{et} \quad MA = AB' \operatorname{tg} 30° = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 0^m577$$

3° *Temps employé.*

On a $$a = AH = AB' \sin 30 = \frac{1}{2} AB' = \frac{1}{2}\ ^m$$

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g}} \times \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{1}{2}}{9,80}} \times \frac{1}{\cos 30°} = \sqrt{\frac{1}{9,80} \times \frac{4}{3}} = 0^s36$$

4° *Vitesse.* $v = \sqrt{2ga} = \sqrt{2 \times 9,8 \times \frac{1}{2}} = 3^m1$

Problème 279

De quel point de BC *faut-il laisser glisser un corps pour qu'il remonte en* A, *en supposant qu'il n'y ait point de vitesse perdue en* B ?

Soit X ce point, la vitesse en B est

$$v = \sqrt{2g \sin \beta \times BX} = \sqrt{2gx \sin \beta}$$

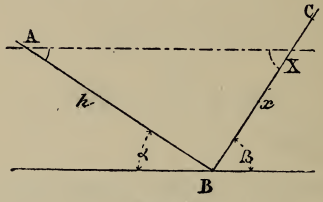


Fig. 375.

Le corps remonte le plan AB avec cette vitesse v, la longueur de son ascension est

$$AB = h = \frac{v^2}{2g'} = \frac{v^2}{2g \sin \alpha} = \frac{2gx \sin \beta}{2g \sin \alpha}$$

d'où l'on tire $$x = h \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Cette valeur de x peut être interprétée très simplement. Joignons AX ; le triangle ABX donne

$$\frac{\sin A}{\sin X} = \frac{BX}{AB} = \frac{x}{h} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \qquad (1)$$

D'autre part, on a $$A + X = \alpha + \beta \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) exigent que

$$A = \alpha \quad \text{et} \quad B = \beta$$

c'est-à-dire que le point X doit être sur la même horizontale que le *point* A ; et, en effet, on sait qu'un mobile peut remonter à la hauteur de son point de départ.

Remarques. I. Si $\alpha = \beta$, on a $x = h$, ce qui est évident.

II. Si $\beta = 0$, on a $x = \infty$, ce qui indique une impossibilité, et, en effet, BX est horizontale.

III. Si $\alpha = 0$, on a $x = 0$; le plan AB est horizontal, et il n'est pas besoin que x ait une valeur finie.

Problème 280

Un point matériel M *se meut d'un mouvement uniforme de vitesse* v *sur une circonférence donnée. Un autre point matériel* M' *se meut sur un diamètre de cette circonférence de manière à coïncider toujours avec la projection du point* M' *sur ce diamètre. On demande d'étudier :*

1° *Les variations de la force qui sollicite* M' *pendant son oscillation ;*

2° *La loi du mouvement.* (Concours, 1862.)

Nous étudierons la question d'une façon plus générale que ne le suppose l'énoncé ; les réponses aux deux demandes posées se trouveront donc dans ce qui va suivre.

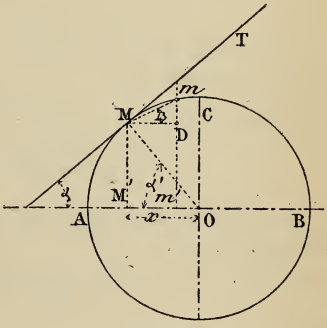


Fig. 376.

Lois du mouvement du point M'. Loi des espaces. Désignons par t le temps mis par le mobile M à parcourir AM, et par M' pour aller de A à M' ; appelons x la distance OM', et soit R le rayon OA.

On a angle MOA ou $\alpha' = \frac{vt}{R}$

et $AM = vt$

Or $OM' = x = R \cos \alpha'$

d'où $x = R \cos \frac{vt}{R}$

Telle est la loi des espaces comptés à partir du centre O.

Discussion. 1° Pour $t = 0$

il vient $x = R \cos 0 = R$

et, en effet, le mobile est en A au départ.

2° Pour $t = \frac{R}{v} \times \frac{\pi}{2}$

$$x = R \cos \left(\frac{v}{R} \cdot \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = R \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

le mobile M' est alors en O.

Ce résultat se justifie aisément. Au bout du temps

$$t = \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$$

le mobile M est sur la circonférence à une distance de A égale à

$$v \times \frac{R}{v} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R}{2}$$

c'est-à-dire précisément au point C. Or, le mobile M′ étant la projection de M, il sera en O quand le mobile M sera en C.

3° Pour $$t = 2 \cdot \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$x = R \cos \pi = -R$$

Le point M′ est en B; il est aisé de voir que M a parcouru πR et qu'il est aussi en B.

4° Pour $$t = 3 \cdot \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$x = R \cos \frac{3\pi}{2} = R \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Le mobile M′ est en O, le mobile M est à l'extrémité inférieure du diamètre CO.

5° Pour $$t = 4 \cdot \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$$

l'on a $$x = R$$

On retombe dans le premier cas.

A partir de ce moment, les deux mobiles repassent à chaque nouveau tour par les états étudiés; ainsi, par exemple, le mobile M′ sera en O pour tous les temps compris dans la formule

$$K \cdot \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$$

K étant un nombre quelconque.

Loi des vitesses. Si l'on prend A pour origine des espaces parcourus par M′, l'espace $AM' = R - x$.

On a $$x' = R - x = R\left(1 - \cos \frac{vt}{R}\right)$$

La vitesse u étant la *dérivée* de l'espace par rapport au temps, on a

$$u = v \sin \frac{vt}{R}$$

Nous allons trouver ce résultat par les procédés élémentaires,

Pendant le temps θ que le mobile M met pour aller de M en m, M′ vient de M′ en m', et sa vitesse est

$$u = \lim \frac{M'm'}{\theta}$$

Exprimons ce rapport.

Le triangle MmD donne $MD = Mm \cos \beta$

d'où $$\frac{MD \text{ ou } M'm'}{\theta} = \frac{Mm}{\theta} \cos \beta$$

Or l'on a $$Mm = v\theta$$

d'où $$\frac{Mm}{\theta} = v$$

dès lors $$\frac{M'm'}{\theta} = v \cos \beta$$

Si on passe à la limite, c'est-à-dire si θ décroît indéfiniment, le point m se rapproche de M, et l'angle β tend vers l'angle α que forme la tangente MT avec AO, et l'on a

$$\lim \frac{M'm'}{\theta} \quad \text{ou} \quad u = v \cos \alpha$$

Ce que l'on exprime en disant : *la vitesse de la projection* M′ *du mobile* M *est la projection de la vitesse de ce mobile.*

Or $$\alpha + \alpha' = 90^\circ$$

donc $$u = v \sin \alpha' = v \sin \frac{vt}{R}$$

Discussion. Nous distinguerons les mêmes cas que pour les espaces.

1° Pour $t = 0, \quad u = v \sin 0 = 0$

c'est-à-dire qu'en A la vitesse de la projection est nulle.

2° Pour $t = \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad u = v \sin \frac{\pi}{2} = v$

Ainsi en O le mobile M′ possède une vitesse qui est précisément celle de M en C ; et, en effet, en ces deux points les mouvements élémentaires sont parallèles.

Dans l'intervalle de A à O la vitesse a crû.

3° Pour $t = 2\frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad u = v \sin \pi = 0$

en B la vitesse est donc nulle ; de O en B, elle a décrû en passant par des états symétriques de ceux de la période AO.

4° Pour $$t = 3\frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$u = v \sin \frac{3\pi}{2} = -v$$

le point M est à l'extrémité du diamètre CO, et M′ est revenu en O, sa vitesse est de nouveau v, mais en sens contraire.

5° Pour $$t = 4 \cdot \frac{R}{v} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad u = v \sin 2\pi = 0$$

la vitesse est de nouveau nulle, comme au départ.

A chaque nouveau tour, la vitesse du mobile M′ repasse par les mêmes états de grandeur.

Loi des accélérations. L'accélération s'obtient en prenant la dérivée de la vitesse u par rapport au temps ; on trouve

$$j = \frac{v^2}{R} \cos \frac{vt}{R}$$

Nous pouvons trouver directement ce résultat.

L'accélération est la limite du rapport de l'accroissement de la vitesse à l'accroissement du temps, alors que le temps diminue indéfiniment.

Soit u la vitesse pour un temps t,

$u + K$ la vitesse pour un temps $t + \theta$.

On aura $$j = \lim. \frac{K}{\theta}$$

Or $$u = v \sin \frac{vt}{R}$$

$$u + K = v \sin \frac{v(t+\theta)}{R}$$

$$K = v\left(\sin \frac{v(t+\theta)}{R} - \sin \frac{vt}{R}\right)$$

$$= v\left[2 \cdot \cos\left(\frac{vt}{R} + \frac{v\theta}{2R}\right) \sin \frac{v\theta}{2R}\right]$$

d'où l'on tire

$$\frac{K}{\theta} = \frac{1}{\theta} \times v \times 2 \cos\left(\frac{vt}{R} + \frac{v\theta}{2R}\right) \sin \frac{v\theta}{2R}$$

ce qui s'écrit identiquement

$$\frac{K}{\theta} = v \cdot \frac{v}{R} \cdot \cos\left(\frac{vt}{R} + \frac{v\theta}{2R}\right) \cdot \left(\frac{\sin \frac{v\theta}{2R}}{\frac{v\theta}{2R}}\right)$$

Si nous passons à la limite, c'est-à-dire si θ tend vers zéro,

la quantité $\cos\left(\frac{vt}{R}+\frac{v\theta}{2R}\right)$ tend vers $\cos\frac{vt}{R}$; dans la parenthèse $\left(\frac{\sin\frac{v\theta}{2R}}{\frac{v\theta}{2R}}\right)$, la quantité $\frac{v\theta}{2R}$ tend vers zéro; par suite, le rapport du sinus à l'arc tend vers l'unité, et l'on a

$$j = \lim.\ \frac{R}{\theta} = \frac{v^2}{R}\cdot\cos\frac{vt}{R}$$

Autre expression de l'accélération.

En remarquant que $\frac{vt}{R} = \alpha'$

on a $\cos\frac{vt}{R} = \frac{x}{R}$

car dans le triangle MM'O

$$M'O = MO\cos\alpha$$

ou $x = R\cos\alpha'$

soit $\cos\alpha' = \frac{x}{R}$

dès lors il vient $j = \frac{v^2}{R}\cdot\frac{x}{R} = \frac{v^2}{R^2}\cdot x$

Discussion. La formule $j = \frac{v^2}{R}\cos\frac{vt}{R}$ se discuterait comme les deux précédentes, mais nous préférons discuter $j = \frac{v^2}{R^2}x$ dans la question suivante :

Étudier les variations de la force qui sollicite M' *pendant son oscillation.*

Cela revient à dire : étudier les variations de la force qui, appliquée à un point matériel de masse m, ferait cheminer ce point comme la projection du point M.

Nous avons vu que M' va de A en B et revient de B en A, en effectuant ces deux mouvements de la même manière, mais en sens contraire ; on dit qu'il *oscille* entre les deux positions A et B.

Nous pouvons nous borner à étudier la force qui sollicite M' de A en B.

La force est reliée à l'accélération par la formule

$$F = mj$$

m désignant la masse du point M'.

L'étude de la variation de la force revient donc à l'étude de la variation de l'accélération et inversement.

Or $$F = mj = \frac{mv^2}{R^2} \times x$$

Cette formule montre que la force qui sollicite le point M′ est, comme son accélération, proportionnelle à la distance au centre.

Le point M′ prend donc le même mouvement que celui que prendrait un corps sollicité à chaque instant par une force dirigée vers un centre et proportionnelle à la distance qui le sépare de ce centre.

Cette force est donc maximum en A, où elle vaut

$$\frac{mv^2}{R^2} \times R = \frac{mv^2}{R}$$

Elle est nulle en O.

En B elle est $$\frac{mv^2}{R^2} \times -R = -\frac{mv^2}{R}$$

Cette force est accélératrice de A en O et retardatrice de O en B.

Ainsi, en résumé, le corps M′ part du point A avec une vitesse nulle et une accélération maximum $\frac{mv^2}{R}$.

Il se rapproche du point O d'un mouvement *accéléré,* sa vitesse *augmente* de 0 à v, son accélération *diminue* de $\frac{mv^2}{R}$ à 0.

Il s'éloigne du centre, et sa vitesse diminue jusqu'à zéro, tandis que l'accélération devenue négative décroît jusqu'à $-\frac{mv^2}{R}$.

Alors que le mobile revient de B en A, les mêmes faits se reproduisent en sens contraire.

Remarque. On pourrait traiter la question d'une tout autre manière.

Le point M dans sa rotation est soumis à l'action de la force centrifuge $$F_1 = \frac{mv^2}{R}$$

dirigée suivant le prolongement du rayon OM; la force centripète qui l'égale s'exerce suivant MO.

Cette dernière peut se décomposer en deux forces: l'une perpendiculaire à AB, qui n'a point d'effet sur un mouvement dirigé suivant AB; l'autre, que nous désignons par F, parallèle à AB et qui peut être considérée comme ayant pour effet de dé-

placer M parallèlement à AB, ou, ce qui revient au même, de déplacer M′ suivant AB.

Or $$F = F_1 \cos \alpha' = \frac{mv^2}{R} \times \cos \alpha'$$

Ce qui peut s'écrire

$$F = \frac{mv^2}{R} \cos \frac{vt}{R} = \frac{mv^2}{R^2} \times x$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de la force F qui sollicite le mobile M′.

Problème 280 bis.

Trouver la durée d'une oscillation du pendule simple.

Considérons un pendule OM écarté de sa position d'équilibre d'un angle α, et abandonnons-le à lui-même. Nous allons d'abord chercher quelle vitesse possède le point M en chacun des points de l'arc de cercle qu'il décrit *.

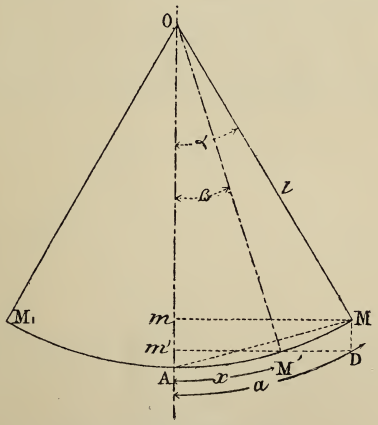


Fig. 378.

Soit M′ une des positions du mobile, désignons les arcs AM et AM′ par a et par x; ces arcs pourront se confondre avec leurs cordes si l'on *suppose l'angle α très petit.*

---

* Si on conduit le plan de OM et de la verticale OA, le poids mg du point matériel M et la tension du fil qui sont les deux forces agissant sur le mobile ne sortiront pas de ce plan; le chemin parcouru sera donc un *arc de cercle.*

La vitesse du mobile en M′ est la même que s'il était tombé verticalement suivant MD ; elle est

$$v = \sqrt{2g \cdot \mathrm{MD}}$$

Or $$\mathrm{MD} = mm' = m\mathrm{A} - m'\mathrm{A}$$

et d'autre part $$\overline{\mathrm{MA}}^2 = 2l \times m\mathrm{A}$$

d'où $$m\mathrm{A} = \frac{\overline{\mathrm{MA}}^2}{2l}$$

La corde MA peut être remplacée par l'arc MA ou a, de même M′A par x, et l'on a

$$m\mathrm{A} = \frac{a^2}{2l}, \quad m'\mathrm{A} = \frac{x^2}{2l}$$

d'où $$v = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)} \qquad (1)$$

Telle est la valeur de la vitesse du mobile en un point quelconque.

En A, $x = 0$ et la vitesse est

$$v_1 = a\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Pour obtenir la durée d'une oscillation, nous allons faire usage d'un artifice.

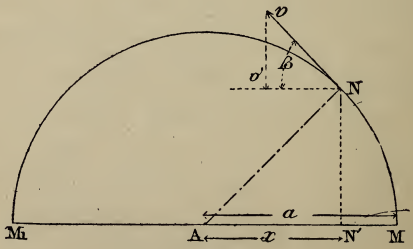


Fig. 379.

Sur une droite M_1AM, développons l'arc de cercle M_1AM (fig. 379), et sur M_1M comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. Si nous imaginons sur l'arc de cercle un mobile N partant de M et cheminant d'un mouvement uniforme avec la vitesse $$v_1 = a\sqrt{\frac{g}{l}}$$

on peut établir que la projection N′ de ce mobile se mouvra sur la droite M_1M *exactement* comme le mobile M dans le pendule ;

il suffit, pour le démontrer, de prouver qu'à la distance $AN' = x$ du point A, le mobile N' a pour vitesse celle que possède le pendule en M' à la même distance $AM' = x$ du point A (fig. 368).

La vitesse v' de la projection N' du point N est la projection de la vitesse v_1 de ce point (Probl. 280); donc

$$v' = v_1 \cos \beta = a\sqrt{\frac{g}{l}} \cos \beta$$

Le triangle ANN' donne

$$NN' = AN \cos ANN' = AN \cos \beta$$

d'où $$\cos \beta = \frac{NN'}{AN} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

dès lors $$v' = a\sqrt{\frac{g}{l}} \cos \beta = \sqrt{\frac{g}{l}(a^2 - x^2)}$$

D'où l'on voit que v' est égal à v : le point N' se meut donc sur MM_1 comme le pendule sur l'arc de cercle.

Il en résulte que les trois mobiles suivants : M dans le pendule, N' sur la droite MM_1 et N sur la demi-circonférence MNM_1 mettent le même temps t pour aller le premier de M en M_1 (fig. 378), les deux autres de M en M_1 (fig. 379).

Or, le point N se mouvant d'un mouvement uniforme sur le demi-cercle MNM_1, la formule $e = vt$ donne

$$\pi a = v_1 t = a\sqrt{\frac{g}{l}} \times t$$

d'où l'on tire $$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Telle est la durée d'une oscillation alors que l'angle α est très petit.

Problème 281

Un triangle rectangle ABC *de masse* M *est placé verticalement sur un plan horizontal sur lequel il glisse sans frottement ; une petite boule sphérique de masse* m *descend le long de l'hypoténuse en repoussant le triangle :*

1° *Quel est le mouvement du plan ?*

2° *Quel est celui de la bille ?*

Soit ABC la position initiale du triangle alors que le mobile O commence à descendre ; soit A_1 la position du sommet au bout d'un temps t alors que le mobile O est en O_1.

Considérons les actions qui s'exercent sur le triangle et sur la bille en cet instant.

Le point O_1 a une vitesse acquise v dirigée suivant A_1B_1 et une vitesse horizontale v' qui est celle du triangle ; il est soumis à son poids $P = mg$ et à une réaction normale N du plan

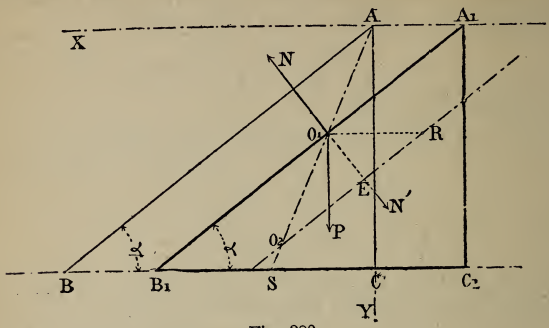


Fig. 380.

A_1B_1. Pendant un *instant très court* θ, on peut supposer que les vitesses v et v' et que la réaction N ne changent pas ; la boule parcourt donc

1° sous l'action de la vitesse v, le chemin $v\theta$ suivant A_1B_1 ;

2° » » v', » $v'\theta$ parallèle à B_1C_1 ;

3° » de la force P, » $\frac{1}{2} g\theta^2$ parallèle à A_1C_1 ;

4° » de la force N, » $\frac{1}{2}\frac{N}{m}\theta^2$* suivant O_1N.

Le chemin absolu O_1O_2 que prend la boule s'obtient en composant ces chemins élémentaires par la règle du polygone, la droite qui ferme ce polygone donne ce chemin ; dès lors les projections O_2E et O_1E du chemin O_1O_2 sur RO_2 et sur NO_1 sont les sommes algébriques des projections de ces chemins élémentaires ; on a

$$O_2E = v\theta - v'\theta \cos \alpha + \frac{1}{2} g\theta^2 \sin \alpha$$

$$O_1E = \quad v'\theta \sin \alpha + \frac{1}{2} g\theta^2 \cos \alpha - \frac{1}{2}\frac{N}{m}\theta^2$$

---

* La force N appliquée au point O lui donne une accélération $\frac{N}{m}$; la formule $\frac{1}{2} gt^2$ fournit $\frac{1}{2}\frac{N}{m}\theta^2$.

Le triangle a un mouvement horizontal sur lequel son poids et la réaction du plan horizontal ne sauraient influer. Ce mouvement s'exerce sous l'action de la vitesse acquise v_1 et de la composante horizontale de N, qui est N sin α ; cette force imprime au triangle de masse M une accélération $\frac{N}{M}$ sin α ; le chemin horizontal O_1R parcouru par le triangle est donc

$$O_1R = v'\theta + \frac{1}{2}\frac{N}{M}\sin\alpha \times \theta^2 \qquad (2)$$

Dans le triangle rectangle O_1ER

$$O_1R \sin\alpha = O_1E$$

dès lors on a la relation

$$\left(v'\theta + \frac{1}{2}\frac{N\sin\alpha}{M}\theta^2\right)\sin\alpha$$

$$= v'\theta\sin\alpha + \frac{1}{2}g\theta^2\cos\alpha - \frac{1}{2}\frac{N}{m}\theta^2$$

d'où l'on tire, après réduction, la valeur de la pression

$$N = \frac{mMg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \qquad (3)$$

Cette dernière formule conduit à plusieurs conclusions.

Et d'abord N est toujours positif, en sorte que la boule presse le plan sans jamais le quitter ; de plus cette pression est constante pendant toute la durée du mouvement, et on peut remarquer qu'elle est moindre que si le plan A_1R_1 était fixe. Dans ce cas, en effet, la pression serait P cos α ou mg cos α, tandis que l'on a

$$N = mg\cos\alpha \times \frac{M}{M + m\sin^2\alpha} < mg\cos\alpha$$

On peut remarquer que la pression sur le plan est d'autant moindre que M est plus petit, en sorte que si le plan est très léger la pression est très faible ; si, au contraire, M est très grand, ou même infiniment grand, ce qui revient à dire : si le triangle est immobile, la pression tend vers mg cos α.

Mouvement du triangle. Nous avons vu que le mouvement du triangle est dû à la vitesse acquise v' et à la composante horizontale de N qui est N sin α, l'accélération qui lui communique cette force est

$$j = \frac{N\sin\alpha}{M} = \frac{1}{M} \times \frac{mMg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\sin\alpha = \frac{mg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\sin\alpha$$

Cette accélération est constante en sorte que le mouvement du triangle est uniformément accéléré.

Si donc on désigne par x_1 la distance AA_1, les formules du mouvement du triangle sont

$$x_1 = \frac{1}{2}\,\frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,t^2 = \frac{1}{4}\,\frac{mg\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,t^2$$

$$v' = \frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,t = \frac{1}{2}\,\frac{mg\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,t$$

Si la masse du triangle est très grande, le mouvement est très lent; si cette masse est nulle, la boule doit tomber verticalement comme s'il n'y avait pas d'obstacle, puisque le triangle n'oppose point de résistance d'inertie; ce triangle doit donc fuir sous la boule d'un mouvement uniformément accéléré, d'accélération égale à $g\cos\alpha$, valeur de la projection de l'accélération g sur l'horizontale; les formules donnent, en effet,

$$x_1 = \frac{1}{2}\,g\cos\alpha \times t^2 \quad \text{et} \quad v_1 = g\cos\alpha \times t$$

Mouvement de la boule. Les forces qui sollicitent la boule sont le poids mg et la réaction N; nous avons établi que N est constant en grandeur, il l'est également en direction; donc le mouvement que prend le point O_1 sous l'action de ces forces est un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Pour l'étudier, projetons les deux forces sur deux axes A_0X, A_0Y; les composantes X et Y de leur résultante sont

$$X = N\sin\alpha, \quad Y = mg - N\cos\alpha$$

Les accélérations suivant ces axes sont

$$\frac{X}{m} = \frac{N}{m}\sin\alpha = \frac{Mg\sin 2\alpha}{2\,(M + m\sin^2\alpha)}$$

$$\frac{Y}{m} = \frac{mg - N\cos\alpha}{m} = \frac{(M+m)\,g}{M + m\sin^2\alpha} \times \sin^2\alpha$$

Les espaces suivant ces mêmes axes sont dès lors

$$x = \frac{1}{4}\,\frac{Mg\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,t^2$$

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{(M+m)\,g}{M + m\sin^2\alpha} \times \sin^2\alpha \times t^2$$

L'espace réel est $\qquad e = \sqrt{x^2 + y^2}$

On obtient en réduisant

$$e = \frac{1}{2}\,gt^2 \times \frac{\sqrt{M^2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\,(m^2 + 2Mm)}}{M + m\sin^2\alpha}$$

Si $M = 0$, on obtient $e = \frac{1}{2} gt^2$; la bille doit, en effet, tomber verticalement alors que la masse du triangle est nulle. Si $M = \infty$, il vient $e = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha$ *, et, en effet, le triangle reste fixe et le corps se meut sur le plan ainsi immobile suivant la loi connue $e = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha$.

Trajectoire de la bille. On peut se proposer de rechercher la ligne que suit la bille ; il suffit de former le rapport

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \frac{Mg \sin 2\alpha}{(M+m)\, g \sin^2 \alpha} = \frac{Mg \sin \alpha \cos \alpha}{(M+m)\, g \sin^2 \alpha} = \frac{M}{M+m} \operatorname{cotg} \alpha$$

Ce rapport permet de trouver la droite demandée.

Si, en effet, on trace le triangle dans sa position initiale, que l'on prenne sur la base un point S qui la divise dans le rapport de m à M, c'est-à-dire que l'on ait $\frac{BS}{CS} = \frac{m}{M}$, on a également

$$\frac{CS}{CS + BS} = \frac{M}{M+m} \quad \text{ou} \quad \frac{CS}{BC} = \frac{M}{M+m}$$

Or
$$BC = AC \operatorname{cotg} \alpha$$

dès lors
$$\frac{CS}{AC} = \frac{M}{M+m} \operatorname{cotg} \alpha$$

Si on rapproche cette relation du rapport $\frac{x}{y}$, on voit que le point S ainsi déterminé fait partie de la trajectoire; comme cette trajectoire passe par l'origine A, elle est la droite AS.

Si
$$M = 0, \quad \frac{x}{1} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \operatorname{cotg} \alpha = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 0$$

la bille doit tomber verticalement, nous le savions déjà.

Si
$$M = \infty, \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha$$

Or
$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{AC}{BC}$$

dans ce cas, la boule suit le plan AB, ce que nous avons obtenu ailleurs.

---

* Ce résultat s'obtient en divisant haut et bas par M; puis faisant tendre M vers l'infini.

Problème 282

Un métronome est formé de deux masses P *et* P + p *réunies par une tige mobile autour du point* O *au milieu de* AB. *On demande la durée de l'oscillation de ce pendule.*

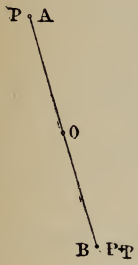


Fig. 381.

Les deux masses égales P s'équilibrent, en sorte que le système $2P + p$ est en mouvement sous la seule action de p; l'accélération du mouvement *vertical* du pendule au lieu d'être g, comme elle le serait si p était seul, sera

$$g' = g\,\frac{p}{2P + p}$$

Pour avoir la durée d'une oscillation, il suffit de remplacer dans la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(Probl. 280 } bis.\text{)}$$

l'accélération g par g'; on aura

Rép. $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{2P + p}{p}}$.

Force centrifuge.

Problème 282 bis.

Avec quelle vitesse faut-il faire tourner dans un plan vertical une balle de plomb de poids P *attachée à un fil de résistance* q *et de longueur connue pour que le fil se rompe?*

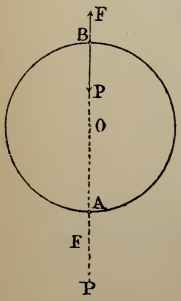


Fig. 382.

La valeur de la force centrifuge est

$$F = m\omega^2 r$$

ω désignant la *vitesse angulaire* de la balle, r la longueur du fil.

La balle décrit un cercle vertical. En B la tension du fil est $m\omega^2 r - P$, c'est son minimum; en A elle est $P + m\omega^2 r$, c'est son maximum; le fil rompra quand on aura

$$P + m\omega^2 r = q$$

d'où $$\omega = \sqrt{\frac{q - P}{mr}}$$

ou **Rép.** $$\omega = \sqrt{\frac{q - P}{P} \times \frac{g}{r}}$$

Problème 283

Quelle tension éprouve un fil qui supporte un poids de 100gr *auquel on imprime un mouvement de rotation de* 100 *tours par minute? Le fil a une longueur de* 0m50.

Si l'on veut tenir compte de la tension que le poids de la boule exerce sur le fil, en supposant que le plan du cercle décrit soit vertical, on opère comme au problème précédent; mais si l'on veut se borner à la tension venant de l'action de la force centrifuge, on a $$F = \frac{mV^2}{R}$$

Or $$m = \frac{P}{g} = \frac{0{,}100}{9{,}8088}, \quad R = 0^m50$$

En une minute le poids parcourt 100 circonférences, soit

$$100 \times 2\pi \times 0{,}50$$

En une seconde l'espace parcouru, qui est la vitesse, sera

$$v = \frac{100 \times 2\pi \times 0{,}50}{60} = \frac{5}{3}\pi$$

On a donc $$F = \frac{0^k100 \times \frac{25}{9}\pi^2}{9{,}8088 \times 0{,}50}$$

$$F = 5^k040^{gr}$$

Remarque. Si l'on tient compte du poids de 100gr, la tension maximum sera 5k140gr.

Problème 284

Quelle est la valeur de la force centrifuge sur une locomotive de 50 *tonnes qui, avec une vitesse de* 60km *à l'heure, parcourt une courbe de* 500m *de rayon?*

On a $$F = \frac{mV^2}{R}$$

ou $$m = \frac{50{,}000}{g}, \quad R = 500^m$$

et $$V = \frac{60,000}{60 \times 60} = 16^{m}\frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{100}{6}$$

On aura $$F = \frac{50,000}{9,80} \times \frac{\left(\frac{100}{6}\right)^2}{500} = 2,834^{k}$$

Problème 285

Quelle est l'accélération de la force qui retient la lune dans son orbite? On supposera que l'orbite de la lune est circulaire, qu'elle est parcourue en 27 jours 33m. La distance de la lune à la terre est de 60 rayons terrestres.

Quel est le rapport de cette accélération à celle de la pesanteur à la surface de la terre? En conclure que l'attraction de la terre sur les corps est en raison inverse du carré des distances.

La force qui retient la lune dans son orbite est l'attraction, qui est précisément égale et contraire à la force centrifuge

$$F = \frac{mV^2}{R}$$

Si γ désigne l'accélération de la force centrifuge ou de l'attraction, on a $F = m\gamma = \frac{mV^2}{R}$; d'où $\gamma = \frac{V^2}{R}$

Or la vitesse de la lune est l'espace qu'elle parcourt en une seconde ; si r est le rayon terrestre, la vitesse est

$$V = \frac{2\pi \times 60r}{(27 \times 24 \times 60 + 33)\,60}$$

En remarquant que $2\pi r = 40000000$ de mètres, on a

$$\gamma = \left[\frac{2\pi \times 60r}{(27 \times 24 \times 60 + 33)\,60}\right]^2 \times \frac{1}{60r} = 0^{m}00275$$

Le rapport de γ à l'accélération $g = 9,8088$ à la surface de la terre est $$\frac{\gamma}{g} = \frac{0,00275}{9,8088} = \text{sensiblement } \frac{1}{3600}$$

1re rép. Accélération $\gamma = 0^{m}00275$.

2e rép. Rapport de cette accélération à celle de la pesanteur à la surface de la terre : $\frac{1}{3600}$.

3e rép. Comme $\frac{1}{3600}$ est le carré de $\frac{1}{60}$, on en conclut

que l'attraction sur un corps à la distance r, c'est-à-dire à la surface de la terre, est 60^2 fois plus grande que celle qui s'exerce à la distance $60r$, distance de la lune à la terre ; *par conséquent, les attractions sont en raison inverse du carré des distances.*

C'est sur ces résultats que Newton s'est basé pour formuler ses immortelles lois.

Problème 286

Un seau renferme de l'eau ; on le fait tourner dans un plan vertical ; quelle vitesse faut-il lui imprimer pour que l'eau ne tombe pas? La vitesse est de 1 tour par seconde, et le rayon 0^m80.

Une molécule ne tombe pas alors que son poids P égale la force centrifuge, soit

$$P = F \quad \text{ou} \quad mg = \frac{mV^2}{R}$$

On en tire $V = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}80 \times 0{,}80} = 2^m80$

Rép. La vitesse du seau doit être 2^m80, le nombre de tours par seconde sera $\dfrac{2^m80}{2\pi \times 0{,}80} = 0$ tour 557.

Problème 287

Un fil casse sous une traction de 10^k. *Quelle vitesse faudra-t-il donner à un corps de* 100^{gr} *pour que le fil casse sous l'action de la force centrifuge? La longueur du fil est de* 1^m.

Le fil cassera alors que le poids sera au bas ; comme il exerce une tension de 100^{gr}, il restera $10^k - 100^{gr} = 9^k900$ pour la valeur que peut atteindre la force centrifuge.

Or
$$F = \frac{mV^2}{R}$$

d'où
$$V = \sqrt{\frac{RF}{m}}$$

$$V = \sqrt{\frac{9{,}900 \times 1}{0{,}100} \times 9{,}8088} = 31^m16$$

Rép. La vitesse du corps à la circonférence sera de 31^m16 par seconde.

Problème 288

On fait tourner à l'aide d'une fronde une pierre du poids de 1^k *dans un cercle de* 1^m50 *de rayon. La corde de cette fronde ne peut supporter qu'une tension de* 60^k ; *cette corde se rompt au moment où la pierre atteint un point* C *placé de façon que* CA = CB (AB *étant horizontal,* A *le centre*).

On demande la hauteur M *à laquelle s'élèvera la pierre dans le vide et l'amplitude du jet.* (Bordeaux, Conc. acad., 1877.)

La corde CB étant égale au rayon CA, l'angle CAB = 60°.

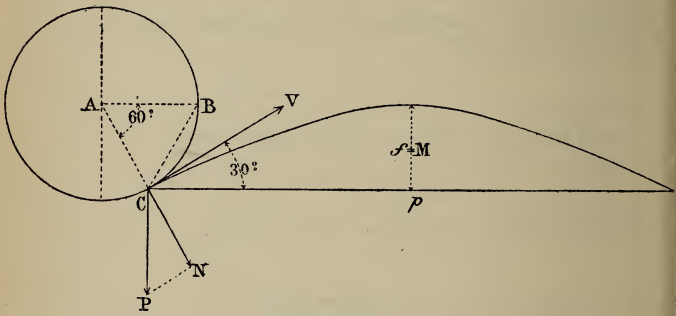


Fig. 383.

La corde casse en C parce que les actions qui la sollicitent suivant AC égalent 60^k ; or ces actions sont la composante N du poids, qui est $1^k \times \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0^k866$

et la force centrifuge, dont la valeur doit être

$$60^k - 0^k866 = 59^k134$$

Or de la formule $$F = \frac{mV^2}{R}$$

on tire $$V = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{\frac{59{,}134 \times 1{,}50}{1} \times g}$$

donc $$V = 29^m496$$

Telle est la vitesse avec laquelle, sous un angle de 30°, le corps est lancé dans l'espace.

La hauteur f à laquelle il s'élève est (M., n° 211)

Rép. $f = \frac{a^2 \sin^2 30^\circ}{2g} = 11^m08$

et l'amplitude du jet

Rép. $p = \frac{a^2 \sin 60^\circ}{g} = 76^m80.$

Problème 288 bis.

Un mobile M *peut glisser le long d'un tube* AB *dont l'axe fait un angle* α *avec l'axe vertical* XX'. *Le tube est animé, autour de* XX', *d'un mouvement de rotation dont la vitesse angulaire est* ω.

Trouver la position d'équilibre du mobile M.

1re méthode. La composante T du poids P de la boule, suivant l'axe du tube, doit être détruite par la composante T', de la force centrifuge F, suivant la même direction.

Or $T = P \cos \alpha$

$F = m\omega^2 MD$

et $T' = F \sin \alpha = m\omega^2 MD \sin \alpha$

ω étant la vitesse angulaire du corps, m sa masse.

La relation $T = T'$ devient

$P \cos \alpha = m\omega^2 MD \sin \alpha$

La position du point M peut être déterminée par la hauteur

$X'D = h$

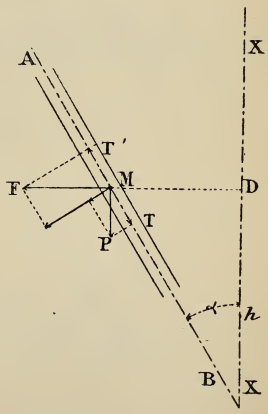


Fig. 384.

Or $MD = h \operatorname{tg} \alpha$

d'où $P \cos \alpha = m\omega^2 h \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$

On en tire, en remarquant que $m = \frac{P}{g}$,

Rép. $h = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$

2e méthode. Les deux forces qui sollicitent le corps sont le poids P et la force centrifuge $m\omega^2$MD.

Si leur résultante est normale au tube, le corps restera en équilibre. Le triangle MPK donne

$$P = F \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$mg = m\omega^2 MD \operatorname{tg} \alpha$$

et comme

$$MD = h \operatorname{tg} \alpha$$

la relation devient

$$g = \omega^2 h \operatorname{tg}^2 \alpha$$

d'où

$$h = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

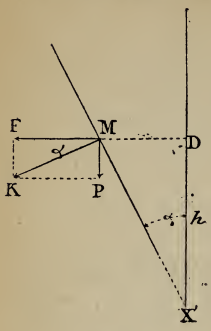


Fig. 385.

Problème 288 ter.

Un vase contenant de l'eau est animé d'un mouvement uniforme de rotation autour de son axe vertical; quelle sera la forme de la surface libre du liquide? (Brevet scient., ens. sec. sp.)

Soit MB la section de cette surface par un plan passant par l'axe, et soit ω la vitesse angulaire.

1re méthode. Comme dans l'exercice précédent, le point M sera en équilibre quand la composante T de son poids et la composante T′ de la force centrifuge seront égales; alors on aura

$$h = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Évaluons la distance ED qui n'est autre que la *sous-normale* de la courbe que nous étudions.

Nous pouvons y arriver en nous servant de la valeur de h que nous venons de trouver. On a, en effet, successivement

$$EX = \frac{MX}{\cos \alpha}, \quad MX = \frac{h}{\cos \alpha}$$

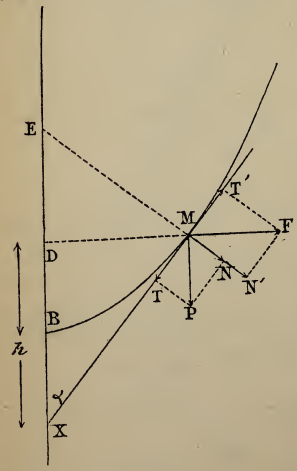


Fig. 386.

d'où $$EX = \frac{h}{\cos^2 \alpha}$$

alors $$ED = EX - h = \frac{h}{\cos^2 \alpha} - h = h\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) = h \operatorname{tg}^2 \alpha$$

d'où $$ED = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \times \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{g}{\omega^2}$$

La sous-normale ED *étant constante, la courbe est une parabole, et la surface est un paraboloïde.*

2e méthode. On arrive plus rapidement à ce résultat en considérant, comme dans la 2e méthode de l'exercice précédent, que la résultante K de F et de P doit être normale à la surface en M. Les deux triangles EDM, MPK donnent dès lors

$$\frac{DE}{DM} = \frac{P}{F}$$

d'où

$$ED = \frac{P}{F} \times DM$$

$$= \frac{mg}{m\omega^2 DM} \times DM = \frac{g}{\omega^2}$$

Comme précédemment, on voit que la sous-normale ED est constante ; donc, etc.

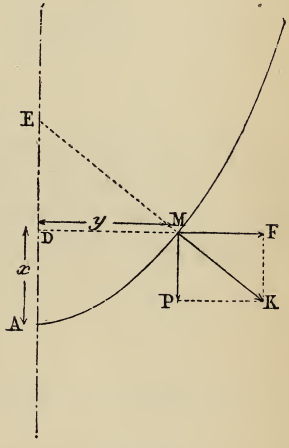


Fig. 387.

Remarque I. On peut établir l'équation de cette parabole, en la rapportant à l'axe vertical pour axe des x, et à la tangente au sommet pour axe des y.

On sait (G., n° 708) que la valeur constante de la sous-normale n'est autre que p dans l'équation $y = 2px$; donc on aura pour équation de la parabole $y^2 = 2\frac{g}{\omega^2}x$

Discussion. Si $\omega = 0$, on a $y = \infty$; dans ce cas, le liquide est en repos et le paraboloïde devient un *plan horizontal.*

Si ω devient très grand, y diminue pour des mêmes valeurs de x, et le liquide se creuse profondément, il peut même découvrir le fond.

II. Calcul de l'abaissement du liquide. Le niveau primitif étant VV′, on peut se proposer de calculer l'abaissement AL = H pour une vitesse déterminée ω.

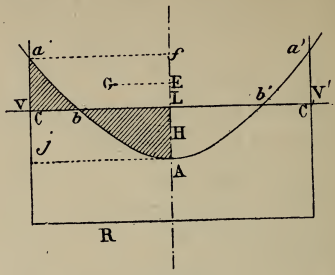


Fig. 388.

Le volume engendré par abC égale celui engendré par ALb ;

donc $$\text{Vol. } ajAf - \text{Vol. } Afa = \text{Vol. } jALC$$

d'où $$\text{Vol. } Afa = \pi R^2 \times Af - \pi R^2 H = \pi R^2 aC \qquad (1)$$

D'autre part, le théorème de Guldin donne

$$\text{Vol. } Afa = \text{Surf. } Afa \times \text{Cir. } EG = \left(\frac{2}{3}\, aj \times af\right) \times 2\pi\, \frac{3}{8}\, af \qquad (2)$$

$$= \frac{\pi \times aj \times af}{2} \text{ *}$$

d'où, en égalant (1) et (2), l'on tire

$$aC = \frac{1}{2}\, aj$$

ou bien $$Cj = H = \frac{1}{2}\, aj$$

Or de l'équation de la parabole, en y faisant $x = R$, on tire

$$aj = \frac{R^2\omega^2}{2g}$$

d'où $$H = \frac{1}{2}\, \omega^2\, \frac{R^2}{2g}$$

Applications. 1° Supposons deux vases communiquants, dont l'un est mobile autour de l'axe XX′, et soit VV′ le niveau *primitif*. Si le vase 1 tourne, le liquide se creusera en parabole,

* Ce dernier résultat s'établit directement par la géométrie. (G., n° 853.)

et le niveau *mn* dans le vase 2 correspondra au sommet de la parabole A, en sorte qu'une rotation rapide de 1 peut épuiser tout le liquide de 2.

Pratiquement, on peut remplacer le tube de communication par un siphon supérieur (fig. 390).

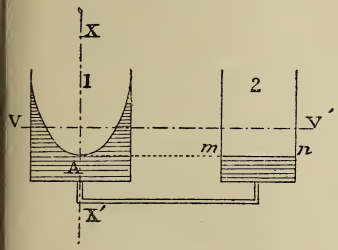


Fig. 389.

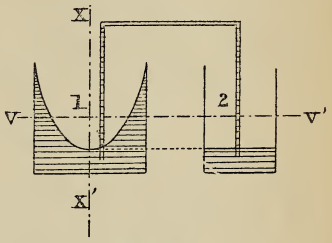


Fig. 390.

2° On peut remarquer que les pressions sur le plan horizontal du point A ne sont pas les mêmes en chacun de ses points ; au point A elle est la pression atmosphérique, mais en *j*, par exemple (fig 388), elle est la pression atmosphérique augmentée de la colonne liquide *aj*.

Considérons un vase fermé partiellement à la partie supérieure contenant un peu de liquide et tournant rapidement, le liquide découvrira le fond et se placera sur les bords en se terminant par une partie d'un paraboloïde très allongé. La pression en G (fig. 391) est représentée par la pression atmosphérique augmentée du poids de la colonne liquide GI, ce qui peut fournir en ce point une pression très élevée.

On a utilisé cette pression pour couler des bandages de roues en acier sans soufflures. Le bandage est représenté par l'anneau métallique DGFED'G'F'E'.

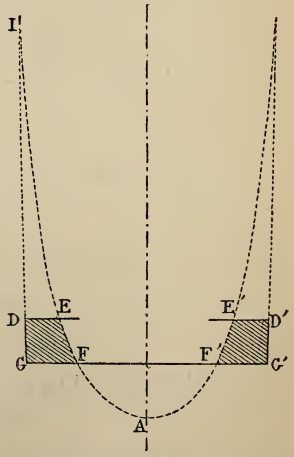


Fig. 391.

Avec 1200 tours par minute, la pression en G est à peu près de 220m d'acier fondu ou 1500m d'eau environ, soit une pression

de près de 150 atmosphères ; le bandage ainsi refroidi sous cette forte pression n'a pas de soufflures ou n'en a que peu.

Questions supplémentaires.

A cet exercice se rattachent les questions suivantes :

1° *On demande quelle doit être la nature d'une courbe qui, pour une vitesse angulaire constante, laisse en équilibre le corps que l'on pose en un quelconque de ses points.*

2° *Démontrer que si un paraboloïde tourne autour de son axe placé verticalement, il n'y a qu'une seule vitesse pour laquelle un point mis dans ce paraboloïde reste en équilibre n'importe le point où on le mette, et que, pour toutes les autres vitesses, le corps reste à la partie inférieure ou est chassé à la partie supérieure et sort si le paraboloïde est limité.*

Ces deux premières questions se déduisent directement de ce qui précède.

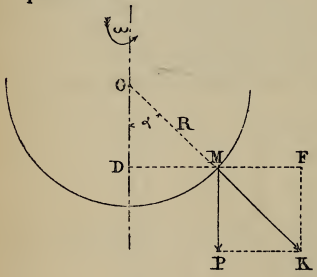


Fig. 392.

3° *Montrer que si une coupe hémisphérique tourne autour d'un diamètre vertical, il y a toujours, quelle que soit sa vitesse, un point où un corps mis dans la coupe reste en équilibre.*

Déterminons la position du point M par l'angle MOD $= \alpha$.

La résultante de P et de F doit être normale à la sphère ; MK passe donc par le centre.

Dès lors $$F = P \operatorname{tg} \alpha$$

d'où $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{P} = \frac{m\omega^2 MD}{mg} = \frac{\omega^2 MD}{g}$$

Or $$MD = R \sin \alpha$$

donc $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 R \sin \alpha}{g}$$

et, en divisant par $\sin \alpha$,

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$$

On a, par suite les, deux solutions

$$\sin \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Pour que $\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$ fournisse une valeur pour α, il faut que l'on ait $\omega^2 R \geqq g$ ou $\omega \geqq \sqrt{\frac{g}{R}}$

Donc, tant que la vitesse angulaire ω est plus petite que $\sqrt{\frac{g}{R}}$, le corps reste au fond de la coupe, c'est la solution $\sin\alpha = 0$ qui convient alors à la question. Lorsque ω dépasse $\sqrt{\frac{g}{R}}$, on trouve un angle α qui détermine la position de la boule.

Problème supplémentaire.

Pendule conique. *Une tige dont on néglige le poids porte une petite sphère à l'une de ses extrémités, l'autre s'articule avec un axe vertical animé d'un mouvement de rotation uniforme. Quel angle α fera la tige avec l'axe vertical, si la vitesse angulaire est ω ?*

Le nombre n de tours par seconde est $n = \frac{2\pi}{\omega}$.

Les forces qui sollicitent la boule, qui sont le poids P et la force centrifuge F, doivent avoir une résultante MK dirigée suivant MA ; dès lors on a $F = P \operatorname{tg}\alpha$

ou $m\omega^2 MD = mg \operatorname{tg}\alpha$

Or $MD = l \sin\alpha$

l étant la longueur de la tige, d'où

$$\omega^2 l \sin\alpha = g \operatorname{tg}\alpha$$

et, en divisant par $\sin\alpha$, ce qui donne la solution $\sin\alpha = 0$, on a encore

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \qquad (1)$$

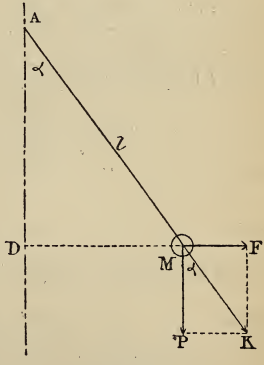


Fig. 393.

Rép. $\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$ ou $\sin\alpha = 0$.

Remarque. Tant que la vitesse angulaire ne vérifiera pas la relation $\omega^2 l > g$ ou $\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$

la sphère ne prendra point d'écart ; dans ce cas, c'est la solu-

tion $\sin\alpha = 0$ qui convient seule; mais, quand on aura

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}$$

les boules garderont un écart qui croîtra avec ω.

Voir M., n° 310, pour l'emploi du régulateur.

Durée de la révolution. *La durée de la révolution du pendule conique est double de celle de l'oscillation d'un pendule simple qui aurait pour longueur la projection du pendule conique sur l'axe.*

La vitesse angulaire du pendule conique étant ω, la vitesse à la circonférence sera $v = \omega \times \mathrm{MD}$

Or de (1) on tire $\omega^2 = \dfrac{g}{l \cos\alpha}$

et comme $\mathrm{MD} = l \sin\alpha$

on a $\omega^2 = \dfrac{g \sin\alpha}{\mathrm{MD} \cos\alpha} = \dfrac{g}{\mathrm{MD}} \operatorname{tg}\alpha$

Dès lors $v = \sqrt{\dfrac{g \operatorname{tg}\alpha}{\mathrm{MD}}} \times \mathrm{MD} = \sqrt{g \operatorname{tg}\alpha\, \mathrm{MD}}$

La circonférence que parcourt M a pour longueur $2\pi\mathrm{MD}$, le temps t employé à la parcourir est

$$t = \frac{2\pi\mathrm{MD}}{\sqrt{g \operatorname{tg}\alpha\, \mathrm{MD}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}$$

Or $l \cos\alpha = \mathrm{AD}$

donc $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{AD}}{g}}$

Mais un pendule simple de longueur AD met pour osciller un temps $t' = \pi\sqrt{\dfrac{\mathrm{AD}}{g}}$

Donc la durée de la révolution du pendule conique est double de celle de l'oscillation du pendule simple qui a pour longueur la projection du pendule conique sur l'axe.

Problème 289

Une tige rigide et inextensible est animée d'un mouvement uniforme de rotation dans un plan horizontal autour d'un axe passant par l'une de ses extrémités. Déterminer le mouvement d'un point matériel qui n'a que la liberté de glisser sans frottement sur cette tige. (Brevet Ens. sec. sp.)

Supposons le corps placé en C à une distance d de l'axe A ; étudions le mouvement qu'il prend sous l'action de la force centrifuge. Pour cela nous le considérons en un point quelconque M, à une distance x du point A. Soit ω la vitesse angulaire du système, m la masse du mobile.

La force qui sollicite le mobile en M est la force centripète $m\omega^2$MA ou $m\omega^2 x$; l'accélération centripète j sera cette expression divisée par m.

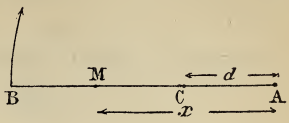


Fig. 394.

Soit $$j = \omega^2 x$$

ou, en faisant usage des différentielles,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x$$

Il ne reste qu'à remonter aux fonctions primitives.

On a, en multipliant par $2 \cdot \frac{dx}{dt}$,

$$2\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} = 2\omega^2 x \cdot \frac{dx}{dt}$$

ou, en remontant aux primitives,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 x^2 + C$$

La constante C est $C = -\omega^2 d^2$, car pour $x = d$, $\frac{dx}{dt} = 0$; donc

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{x^2 - d^2} \qquad (1)$$

ou $$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - d^2}} = \omega dt = \frac{d\,\frac{x}{d}}{\sqrt{\frac{a^2}{d^2} - 1}}$$

en intégrant $$\omega t = \int \frac{d\,\frac{x}{d}}{\sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1}} + C$$

Or on a $$\int \frac{d\,\frac{x}{d}}{\sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1}} = l\left(\frac{x}{d} + \sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1}\right)$$

donc $$l \cdot \left(\frac{x}{d} - \sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1}\right) = \omega t + C$$

Pour déterminer la constante faisant $x = d$, alors $t = 0$, et on a $l.\ 1 = C$; d'où $C = 0$.

Il reste $$l \cdot \left(\frac{x}{d} - \sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1}\right) = \omega t$$

On en tire $$\frac{x}{d} - \sqrt{\frac{x^2}{d^2} - 1} = e^{\omega t}$$

et en résolvant par rapport à x,

$$x = \frac{d}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \qquad (2)$$

Telle est la loi du mouvement.

Remarque. La relation (1) qui donne la *vitesse*

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{x^2 - d^2}$$

fournit en remplaçant x par sa valeur

$$v = \frac{\omega d}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

Problème 289 bis.

Valeur de la force centrifuge pour un point de la terre à la latitude λ.

Action de la force centrifuge sur la pesanteur aux différentes latitudes.

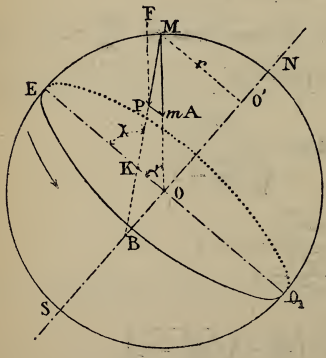


Fig. 395.

Considérons un point matériel en M à la surface de la terre supposée sphérique. Soit A l'attraction de la terre sur l'unité de masse placée à sa surface ; si m est la masse du point M, l'*attraction* sur ce point sera mA. Ce point est soumis à l'action de la force centrifuge F dirigée suivant O'M, et l'on a

$$F = m\omega^2 r$$

ω est la vitesse angulaire de la terre.

r le rayon MO' du parallèle du point M.

La composition de $m\omega^2 r$ et MA fournit une résultante MP qui est *précisément le poids du corps.*

D'où l'on conclut :

1° Que le poids n'est pas inhérent au corps, puisqu'il est une résultante de l'attraction et de la force centrifuge, et cela est si vrai que si la terre tournait suffisamment vite, en certains lieux les corps pourraient ne plus peser.

2° Que la direction du poids n'est pas le rayon terrestre ; les verticales ne concourent donc pas au centre de la terre, même alors qu'elle est supposée sphérique.

Proposons-nous de trouver une relation entre g et A.

On a $P = mg$; dès lors le parallélogramme MP fournit

$$g = \sqrt{A^2 + (\omega^2 r)^2 - 2A\omega^2 r \cos \alpha}$$

On en tire, en résolvant par rapport à A,

$$A = \omega^2 r \cos \alpha + \sqrt{g2 - \omega^4 r^2 \sin^2 \alpha}$$

On rejette le signe — qui ne convient pas.

La terre est supposée sphérique, donc

$$r = R \cos EOM = R \cos \alpha$$

d'où $$A = \omega^2 R \cos^2 \alpha + \sqrt{g^2 - \frac{\omega^4 R^2 \sin^2 2\alpha}{4}}$$

Or le dernier terme du radical est négligeable vis-à-vis de g, à cause de la très faible valeur de ω * ; il vient alors

$$A = g + \omega^2 R \cos^2 \alpha$$

La latitude géographique est MKE ; on a évidemment $\alpha < \lambda$, mais la différence n'est pas grande, en sorte qu'avec une assez grande approximation on a

$$A = g + \omega^2 R \cos^2 \lambda \qquad (1)$$

Résultats. 1° Cette relation permet de trouver A ; en effet, à Paris, pour $\lambda = 48°50'14''$

on a $g = 9{,}8008$

et la vitesse angulaire de la terre est

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T est le jour sidéral ou 86164 secondes solaires moyennes, d'où

$$\omega = 0{,}000.072.9$$

D'ailleurs $R = 6{,}377{,}005$ mètres

En employant ces valeurs, on trouve

$$A = 9^k8234$$

C'est l'attraction de la terre sur l'unité de masse.

---

* On peut s'en rendre compte en prenant les résultats du problème 169.

Valeurs et variations de la pesanteur aux diverses latitudes.

La relation (1) donne

$$g = A - \omega^2 R \cos^2 \lambda$$

Au pôle $$g_p = A = 9{,}8234$$

A une latitude quelconque λ,

$$g = A - \omega^2 R \cos^2 \lambda$$

A l'équateur $$g_e = A - \omega^2 R$$

c'est la moindre valeur de l'accélération.

Or $$\omega^2 R = 0{,}03385$$

dès lors $$g_e = 9{,}7895$$

N. B. Il est facile de justifier *à priori* que l'accélération ou le poids doivent être minimum à l'équateur, car la force centrifuge y est maximum, puisque le point y décrit le plus grand parallèle; en second lieu, cette force se retranche directement, ce qu'elle ne fait pas en tout autre point, où elle ne se retranche que partiellement.

Quelle vitesse devrait avoir la terre pour que la pesanteur fût nulle à l'équateur?

Si on fait le rapport de $\omega^2 R$ à A, on trouve

$$\frac{\omega^2 R}{A} = \frac{1}{290}$$

Or $$29 = 17^2 + 1$$

Si la terre *tournait* 17 *fois plus vite*, $\omega^2 R$ serait 289 fois plus grand, alors g_e serait très petit, et si ω devenait alors tant soit peu supérieur, le poids serait nul à l'équateur sans changer au pôle.

Problème 290

Un chemin de fer aérien circulaire, dont le rayon est r *et le plan vertical, est parcouru par un wagon* A :

1° *Quelle sera la vitesse en* C, *si le wagon descend d'une hauteur* AB = h ?

La vitesse en C est celle qui est due à la hauteur de chute

$$AE = h'$$

On a $$V_0 = \sqrt{2gh'}$$

2° *Quelle serait la vitesse en un point quelconque* D ?

Elle est $v = \sqrt{2gh''}$

h'' désignant la distance verticale de A à D.

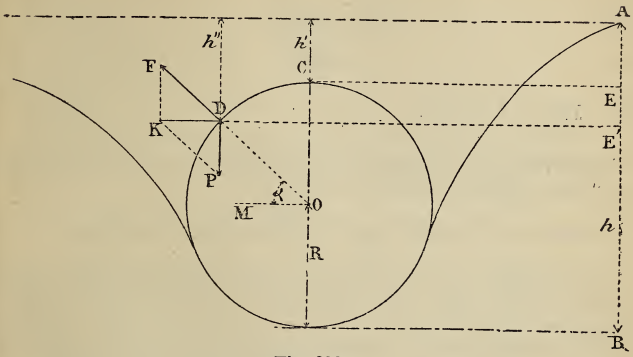


Fig. 396.

4° *De quelle hauteur devra descendre le wagon pour qu'il ne monte qu'au point* D ?

En D, le corps est sollicité par la force centrifuge $F = \frac{mv^2}{R}$, v désignant la vitesse du mobile en D, puis par son poids $P = mg$. Le wagon cessera de monter si la résultante K de ces deux forces est horizontale, car alors aucune force verticale, soit de bas en haut ou de haut en bas, ne sollicitera le corps en mouvement.

Le triangle FKD, fournit, en désignant par α l'angle DOM qui détermine la position du point D,

$$P = F \sin \alpha \quad \text{ou} \quad mg = \frac{mv^2}{R} \sin \alpha$$

Or v, vitesse en D, est $\sqrt{2gh''}$

dès lors $$g = \frac{2gh''}{R} \sin \alpha$$

d'où $$R = 2h'' \sin \alpha$$

et enfin $$h'' = \frac{R}{2} \sin \alpha$$

4° *De quelle hauteur devra descendre le wagon pour qu'il ne tombe pas en décrivant la courbe entière ?*

Pour que le wagon ne tombe pas en C, il faut que la force

centrifuge $F = \frac{mV_c^2}{R}$ soit égale au poids du corps $P = mg$;

d'où $$mg = \frac{mV_c^2}{R}$$

Or $$V_c = \sqrt{2gh'}$$

donc $$g = \frac{2gh'}{R}$$

d'où **Rép.** $h' = \frac{R}{2}$.

Remarques. 1° Ce dernier résultat se tire encore de la solution du 3° dans laquelle on fait $\alpha = 90°$.

On voit que l'on a AB ou $h = \frac{5R}{2} = \frac{5}{4}$ du diamètre.

2° Ce chemin de fer aérien est aussi connu sous le nom de *chemin de fer russe ;* des personnes se placent en A dans le wagon qui parcourt la circonférence, en sorte qu'en C elles ont la tête en bas, puis le wagon remonte sur une plate-forme A. A cause des frottements, les points C et H sont moins élevés que ne l'indique la théorie.

Problème 291

Une bille de masse m *est placée en* A *sur un cercle vertical de rayon* r *sans vitesse initiale ; elle roule le long de la circonférence sous l'action de la pesanteur ; en quel point quittera-t-elle cette circonférence ?*

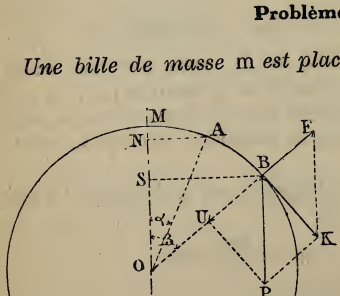


Fig. 378.

Soit α l'angle qui détermine la position du point A, β celui qui donne le point B où la boule quitte la circonférence. Le corps quittera le cercle quand la résultante de la force centrifuge F et du poids P sera une force K tangente en B, ou, ce qui revient au même, quand la composante U du poids P sera égale à la valeur F de la force centrifuge.

On aura, dans le triangle BFK,

$$F = P \cos \beta \qquad (1)$$

Or on a $$F = mg = \frac{mv^2}{R}$$

et v, vitesse en B, égale $\sqrt{2g\mathrm{NS}}$

Évaluons NS : on a $\mathrm{NS} - r(\cos\alpha - \cos\beta)$

L'équation (1) fournit par des remplacements successifs

$$mg \cos \beta = \frac{mv^2}{R} \quad \text{ou} \quad g \cos \beta = \frac{2g\mathrm{NS}}{R}$$

ou $$\cos \beta = \frac{2R(\cos\alpha - \cos\beta)}{R}$$

enfin $\cos \beta = 2(\cos\alpha - \cos\beta)$

On en tire

Rép. $\cos \beta = \frac{2}{3} \cos \alpha.$

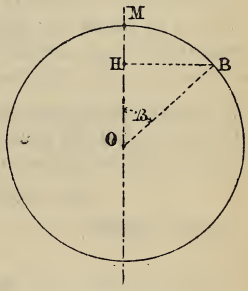


Fig. 398.

Remarque. Si le corps est très voisin de M, on a $\cos \beta$ qui tend vers $\frac{2}{3}$; alors le point B peut être déterminé géométriquement ; il suffit par le point H, au tiers du rayon, de mener une horizontale.

Travail des forces.

Problème 292

Quel travail aura dû développer un ouvrier pour élever 1^{m} *cube d'eau ? Le puits a* 12^{m} *de profondeur ; le tiers du travail produit est absorbé par les résistances passives.*

Le travail utile $1\,000 \times 12 = 12\,000^{kgm}$ n'est que les $\frac{2}{3}$ du travail produit, qui est par suite $\frac{12\,000 \times 3}{2}$.

Rép. $18\,000^{kgm}$.

Problème 293

Un ouvrier monte à 12^m *de hauteur au moyen d'une échelle, puis se place sur un plateau attaché à une corde qui passe sur une poulie et qui supporte à l'autre extrémité un poids à peu près égal à celui de l'ouvrier, c'est-à-dire* 66^k. *Il peut répéter cette opération* 320 *fois en un jour. Quel sera en kilogrammètres le travail de cet ouvrier dans un jour?*

Rép. $12 \times 66 \times 320 = 253{,}440^{kgm}$.

Problème 294

Un manœuvre agissant sur une manivelle de 0^m30 *fait faire à celle-ci* 35 *tours par minute. Quel sera le travail transmis à la manivelle dans cet intervalle de temps, sachant que le moteur développe un effort moyen de* 8^{kg}? (Lille, Bacc.)

Le chemin parcouru en un tour par l'extrémité de la manivelle est $2\pi \times 0{,}30$; le travail par tour $2\pi \times 0{,}30 \times 8$, et pour les 35 tours faits en une minute

$$2\pi \times 0{,}30 \times 8 \times 35 = 528^{kgm}$$

Rép. 528^{kgm}.

Problème 295

On applique à un corps du poids de 25^k, *posé sans vitesse sur un plan horizontal poli, une force horizontale de* 40^k *dont la direction est constante. Quel espace aura parcouru le corps en* 3 *minutes? Quelle vitesse aura-t-il acquise, et quel travail aura été produit à ce moment par la force de* 40^k *dont la direction est constante? En quoi sera changé ce travail?* (Lille, Bacc.)

1° *Quel espace aura parcouru le corps en* 3 *minutes?*

L'accélération du mouvement uniformément accéléré que prend le corps est

$$\varphi = \frac{F}{m}$$

ou

$$\varphi = \frac{40}{25} = g \times \frac{40}{25} = g \times \frac{8}{5}$$

Après 3 minutes, ou $3 \times 60 = 180^s$, l'espace parcouru sera, d'après la formule,

$$e = \frac{bt^2}{2}$$

$$e = \frac{8}{5} g \frac{180^2}{2}$$

En prenant $g = 9{,}80$, on aura

Rép. $254{,}016^m$.

2° *Quelle vitesse aura-t-il acquise?*

On a

$$v = \frac{8}{5} . g \times 180 = 2822{,}4$$

Rép. 2822^m4.

3° *Quel travail aura été produit?*

En kilogrammètres, ce travail est

Rép. $40 \times 254016 = 10160640^{kgm}$.

4° *En quoi sera changé ce travail?*

Il s'est changé en force vive que possède le corps, cette force vive est mv^2; elle doit, d'après le théorème des forces vives et du travail, égaler le double du travail (M., n° 300), ce que l'on peut vérifier, car l'on a

$$mv^2 = \frac{25}{g} \times \overline{2822{,}4}^2 = 2 \times 10160640$$

Remarque. Pour $g = 9{,}8088$, les trois réponses sont :
1re $254{,}244^m$; 2e $2{,}824^m$; 3e $10{,}169{,}763^{kgm}$.

Problème 296

Calculer le travail de la pesanteur sur un corps pesant 350^k, *et parcourant* 250^m *sur la ligne de plus grande pente d'un plan incliné de* 30°.

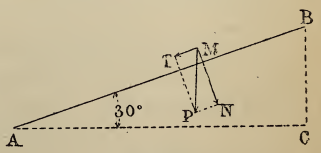


Fig. 399.

La partie utile du poids P est sa composante tangentielle

$$T = P \sin 30°$$

Le travail sera

$$P \sin 30 \times 250 = 350 \times \frac{1}{2} \times 250$$

Rép. 43750^{kgm}.

Remarque. On peut encore dire (M., n° 291) : le travail égale le produit $250 \times 350 \times \cos TMP = 250 \times 350 \sin 30^\circ$.

Ou bien le travail de la pesanteur de B en A est le même que de B en C ; or, suivant BC, on aurait un travail

$$350 \times BC = 350 \times \sin 30^\circ$$

Problème 297

Dans une pompe en exercice, le niveau de l'eau vis-à-vis le déversoir est élevé de 6^m *au-dessus du niveau dans le réservoir d'en bas.*

On propose :

1° *De calculer en kilogrammètres la force à employer pour soulever le piston ayant comme base* 150 *cent. carrés. Frottement négligé.*

2° *De dire comment on fait, dans le jeu de la pompe, la supputation du travail utile en kilogrammètres.* (Douai, dipl. Ens. sp.)

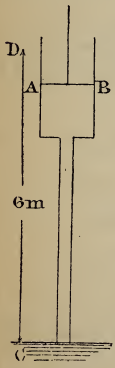


Fig. 400.

1° *Calculer en kilogrammètres la force à employer pour soulever le piston ayant pour base* 150 *cent. carrés.*

L'effort à développer pour soulever le piston AB en un point quelconque de la course est constant. En effet, il est égal à la différence des pressions que supportent ses deux faces ; si S est la surface de la base du piston, H la pression atmosphérique évaluée en colonne d'eau, la face supérieure supporte

$$S(H + DA)$$

et la face inférieure

$$S(H - AC)$$

La différence, qui donne l'effort E, est

$$E = S(H + DA) - S(H - AC) = S(DA + AC) = S \times DC$$

Dans le cas actuel, en prenant le décimètre pour unité,

$$E = 1{,}5 \times 60 = 90^k$$

2° *Comment fait-on, dans le jeu de la pompe, la supputation du travail utile en kilogrammètres ?*

C'est le produit de la quantité d'eau élevée par la hauteur d'élévation.

Problème 298

Un forgeron qui frappe avec une masse de 4^k, *et communique à cette masse une vitesse de* 4^m *par seconde, lui donne une puissance vive que l'on désire connaître.*

La puissance vive $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9,80} \times 4^2 = 3,26$

Rép. 3,26.

Problème 299

Un marteau-pilon pèse 10 *tonnes, il tombe de* 1^m50 ; *quelle force vive possède-t-il au bas de sa chute?*

On a $\frac{1}{2} mv^2 = P \times h$ (M., n° 300)

d'où $mv^2 = 2Ph = 2 \times 10\,000 \times 1,5 = 30\,000$

Rép. 30 000.

Problème 300

Un mouton destiné à battre les pilotis pèse 134^k. *Il est soulevé le long de la sonnette au moyen d'une corde de* 0^m032 *d'épaisseur qui passe sur une poulie de renvoi placée à la partie supérieure de la sonnette et s'enroule sur un treuil horizontal de* 0^m19 *de diamètre, muni à ses deux extrémités de manivelles de* 0^m43 *de rayon, sur lesquelles agissent deux ouvriers. Le mouton, soulevé à une hauteur de* 4^m16, *retombe par son poids sur une pièce qu'il enfonce verticalement de* 0^m31 *dans le sol. Déterminer l'effort de chaque ouvrier employé à soulever le mouton, et la résistance opposée par le sol à la pénétration du pieu.* (Douai, brevet Ens. sp.)

1° *Déterminons l'effort* P *que développe chaque ouvrier.*

Le moment puissant des deux ouvriers est

$$2 \times 0,43 \times P$$

En remarquant que le rayon d'enroulement vaut

$$\frac{1}{2}(0,19 + 0,032) = 0,111$$

le moment résistant est $0,111 \times 134$

On doit avoir $2 \times 0{,}43 \times P = 0{,}111 \times 134$

d'où **1° Rép.** $P = 17^{k}30$.

2° Supposons que le sol oppose toujours la même résistance R à l'enfoncement ; cette hypothèse n'est pas exacte, mais elle peut être faite dans cette sorte de questions.

Appliquons le théorème des forces vives ; si l'on désigne par v la vitesse du mouton au bas de sa course, qui est de

$$4^{m}16 + 0{,}31 = 4^{m}47$$

on a
$$\frac{1}{2} \times \frac{134}{g} v^2 = R \times 0{,}31$$

Or
$$v = \sqrt{2g \times 4{,}47}$$

donc, en remplaçant, on obtient

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{134}{g} \times \frac{2g \times 4{,}47}{0{,}31} = \frac{134 \times 4{,}47}{0{,}31}$$

2° Rép. $R = 1\,932^{k}$.

Remarque. On peut observer que l'on néglige le poids du pieu et le travail que la pesanteur a exercé sur lui.

Problème 301

Une voiture pesant 8000^{k} *doit être mise en mouvement avec une vitesse de* 1^{m} *par seconde. Quelle force constante pourra lui donner cette vitesse au bout de* 10 *secondes?*

Si b désigne l'accélération durant cette période, la formule

$$v = bt$$

donne
$$1^{m} = b \times 10$$

d'où
$$b = \frac{1}{10} \text{ de mètre}$$

Si, d'autre part, F est l'effort moyen développé pour actionner les 8000^{k}, la masse de la voiture étant $\frac{8000^{k}}{g}$, la formule

$$\frac{F}{b} = m$$

donne
$$\frac{F}{b} = \frac{8000}{g}$$

d'où
$$F = 8000 \times \frac{b}{g} = \frac{8000}{10g} = 81{,}5$$

Rép. $81^{k}5$.

Remarque. I. Plus la période de mise en train sera courte, plus l'effort sera grand; si cette période se réduisait à un instant très petit, l'effort serait très grand et les traits pourraient se rompre, c'est ce qui arrive fréquemment dans la pratique; *il faut démarrer lentement.*

II. On n'a pas tenu compte des frottements; avec eux la question est tout autre.

Problème 302

Quel travail faut-il développer pour entretenir une vitesse (Pr. 301) *de* 1^m *par seconde sur un plan incliné de* $\frac{1}{3}$?

Le travail *par seconde* sera égal au produit de l'effort F nécessaire pour retenir le corps sur le plan par le chemin l parcouru en une seconde.

L'effort F pour retenir le corps est donné par la formule

$$\frac{F}{Q} = \frac{h}{l} = \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} \qquad \text{(M., n° 159)}$$

d'où

$$F = \frac{8000}{\sqrt{10}}$$

Puisque l'espace parcouru dans une seconde est 1^m, on a

$$T = \frac{8000}{\sqrt{10}} \times 1 = 800\sqrt{10}$$

Rép. 2529^{kgm}.

Problème 303

Un train, locomotive et wagons, pèse 200 *tonnes; quel travail la vapeur doit produire de plus que sur un palier, pour lui faire gravir une rampe de* $\frac{20}{1000}$?

La vapeur doit vaincre en plus la composante T du poids 200 tonnes suivant le plan.

On a

$$T = 200000 \times \frac{20}{\sqrt{1000^2+20^2}} \qquad \text{(M., n° 159)}$$

Le travail en une seconde sera

Rép. $T = 3999^{kgm}$.

Problème 304

Le filet d'une vis porte 150 *spires sur une hauteur de* 0^m36. *La puissance est appliquée à une distance de l'axe égale à* 2^m. *Quelle est la force capable de faire équilibre à un poids d'une tonne appliquée sur la tête de la vis ?*

Calculer le travail développé pour élever ce poids d'une tonne de 0^m14, *et vérifier sur l'exemple proposé le principe de l'égalité du travail de la puissance et de la résistance.* (Bordeaux, Conc. acad., Ens. sp.)

1° L'équation d'équilibre de la vis est (M., n° 323)

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi l}$$

h étant le pas de la vis et l le bras de levier sur lequel agit la puissance.

Dans le problème $h = \frac{0,35}{150} = 0^m0024$

et $l = 2^m$

d'où $\frac{P}{1000^k} = \frac{0,0024}{2\pi \times 2}$

1re Rép. $P = 0^k191$.

2° Le travail pour élever le poids de 1 tonne de 0^m14 est évidemment $1000 \times 0,14 = 140^{kgm}$

Nous pourrons l'obtenir en cherchant le travail produit par la puissance 0^k191.

Le corps, pour s'élever de 0^m14, nécessite un nombre de tours égal à $0^m14 : 0,0024 = 58$ tours $\frac{1}{3}$

Le chemin parcouru par la puissance est donc

$$2\pi \times 58\frac{1}{3} \times 2$$

et le travail $2\pi \times 58\frac{1}{3} \times 2 \times 0,191 = 140^{kgm}$

Nous vérifions ainsi le principe de l'égalité du travail de la puissance et de la résistance.

Problème 305

Un cheval attelé à un manège travaille 8 *heures par jour en exerçant une traction de* 40^k ; *il parcourt une piste de* 4^m *de rayon en faisant* 8 *tours en* 3 *minutes :*

1° *Combien fera-il de kilogrammètres dans sa journée ?*

Un tour se fait en $\frac{3 \times 60}{8} = 22^s \frac{1}{2}$

En 8 heures ou $(8 \times 60 \times 60)$ secondes, il fera

$$\frac{8 \times 60 \times 60}{22^s \frac{1}{2}} = 1\,280 \text{ tours}$$

Le chemin parcouru sera donc

$$1\,280 \times 2\pi \times 4$$

et le travail $1\,280 \times 2\pi \times 4 \times 40 = 1\,286\,800$

1re Rép. $1\,286\,800^{kgm}$.

2° *Quelle est en chevaux-vapeur la force d'une machine qui ferait le même travail pendant le même temps ?*

Un cheval-vapeur équivaut à 75^{kgm} en 1^s ; or, en une seconde, le cheval parcourt la fraction de tour $\frac{8}{3 \times 60}$ et, par suite, le chemin

$$2\pi \times 4 \times \frac{8}{3 \times 60}$$

Le travail en une seconde est donc

$$2\pi \times 4 \times \frac{8}{3 \times 60} \times 40 = 44^{kgm}$$

Le travail du cheval en chevaux-vapeur est, par suite, égal à

$$\frac{44}{75} = 0 \text{ chev. } 59$$

2e Rép. 0 chev. 59

Remarque. On aurait pu trouver plus rapidement les $44^{kgm}6$ mesurant le travail en une seconde, si on eût voulu faire usage du résultat précédent ; il eût suffi de diviser 1286800 par le nombre de secondes contenu dans 8 heures.

Problème 305 bis.

Manège. *On attelle à un manège 4 chevaux qui exercent chacun une traction de* 30^{kg}. *La piste a* 3^{m} *de rayon, les chevaux font 5 tours en 3 minutes. Quel sera le travail au bout de 8 heures?*

Quelle serait, en chevaux-vapeur, la force d'une machine qui produirait le même travail pendant le même temps?

Travail en 8 heures.

Le problème précédent permet de poser immédiatement

$$T = 4 \times 30 \times (2\pi \times 3) \times \left(\frac{5 \times 8 \times 60}{3}\right) = 1\,803\,280^{kgm}$$

$$= N \times F \times \text{Circ.} \times n$$

N nombre de chevaux.
F force de traction.
n nombre de tours dans la journée.

Rép. 1 803 280.

Travail en chevaux-vapeur.

Le travail en une seconde est, en kilogrammètres,

$$4 \times 30 \times (2\pi \times 3) \times \frac{5}{3 \times 60}$$

en chevaux-vapeur,

$$\frac{4 \times 30 \times 2\pi \times 3 \times 5}{75 \times 3 \times 60} = 0 \text{ ch. } 8$$

Rép. 0 ch. 8.

Problème 306

Un cours d'eau débitant 400 mètres cubes par seconde a une vitesse moyenne de $0^{m}60$. *Quel travail moteur peut-il fournir?*

La force vive que recevrait par seconde une paroi placée dans le cours d'eau est mv^2 ou $\frac{400\,000}{g} \times 0{,}60^2 = 14\,694 \quad (g = 9{,}8)$

Le travail sera la moitié de cette expression, ou, en prenant $g = 9{,}80$

Rép. $7\,347^{kgm}$;

ou, en chevaux-vapeur, $7347 : 75 = 98$ chevaux environ.

Remarque. Un récepteur hydraulique ne pourra jamais, même théoriquement, fournir ce travail, car les palettes qui reçoivent l'action de l'eau marchent dans le sens du courant; donc la vitesse $0^{m}60$ n'est pas celle qui doit intervenir, c'est la vitesse relative qu'il faut prendre. On montre en hydraulique que, pour une vitesse déterminée d'un cours d'eau, il y a une vitesse correspondante de la roue qui fournit le maximum d'effet.

Problème 307

Quel est le travail disponible d'une chute d'eau de 3^{m} *qui débite* 2000 *mètres cubes par heure? L'exprimer en chevaux-vapeur.*

Le débit par seconde est $\frac{2000}{60 \times 60}$

Le travail en une seconde égale le poids de l'eau débitée multiplié par le chemin parcouru, soit

$$\frac{2000 \times 3 \times 1000}{60 \times 60} \quad \text{ou} \quad 1666^{kgm}6$$

En chevaux-vapeur il est

$$\frac{1666,6}{75} = 22 \text{ ch. } 22$$

Rép. 22 chevaux-vapeur 22.

Problème 308

Une conduite d'eau a $0^{m}1$ *de diamètre et* 200^{m} *de longueur, la vitesse de la colonne d'eau est de* $1^{m}20$. *Si on ferme brusquement le robinet, quelle sera la puissance vive qui tendra à briser le tuyau (coup de bélier), s'il n'y a pas de chambre d'air?*

Le poids de l'eau en mouvement est en kilog.

$$\frac{\pi \times \overline{0,1}^2}{4} \times 200 \times 1000 = 1570^{k}8$$

Sa force vive est

$$\frac{1570,8}{g} \times \overline{1,2}^2 = 230,8$$

La puissance vive est la moitié de cette expression.

Rép. 115,4.

Remarque. Si l'on observe que la fonte des tuyaux ne peut que céder très peu, sans se briser, de quelques millimètres à peine, pour un diamètre de 10 centimètres, on voit que l'effort que supporte la conduite est considérable. Supposons que sur 10 centimètres la fonte puisse céder de 2 millimètres, la colonne entière supporterait l'effet d'une force égale à

$$115{,}4 : 0{,}002 = 82{,}700^{kg}$$

Si cet effort est supérieur à celui auquel peut résister la fonte, il y aura rupture.

Problème 309

Un mobile pesant 12^k *tombe de* 20^m *de hauteur. Quel est le travail de la pesanteur et la force vive exercée contre le sol?*

1re Rép. Le travail de la pesanteur est $12 \times 20 = 240^{kgm}$.

2e Rép. La force vive mv^2 est le double du travail, c'est donc 480.

Problème 310

Un corps pesant 5^k *est animé d'une vitesse de* 25^m *par seconde. Quelle est la quantité de travail qu'il sera capable d'effectuer contre un corps qu'il rencontre à la fin de sa course? De quelle hauteur devrait-il tomber pour être capable de* 600^{kgm}? (Douai, dipl. Ens. sp.)

1o La force vive mv^2 du corps est

$$5 \times 25 = 125$$

le travail qui y correspond égale

$$\frac{125}{2} = 62{,}50$$

Rép. $62^{kgm}50$.

2o Pour que le corps soit capable d'effectuer en arrivant sur le sol un travail de 600 kilogrammètres, sa force vive doit être

$$2 \times 600 = 1\,200^{kgm}$$

Or le corps pesant 5^k, si x désigne sa vitesse, on a

$$1\,200 = mv^2 = \frac{5}{g} \cdot v^2$$

d'où

$$v = \sqrt{\frac{1\,200 \times g}{5}}$$

Mais en chute libre, pour acquérir une vitesse v, un corps doit tomber d'une hauteur h que fournit la formule

$$v = \sqrt{2gh}$$

d'où

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

On a dès lors $h = \frac{1200}{5} \times \frac{1}{2g} = 120^{\text{m}}$

Rép. 120^{m}.

Remarque. Ce dernier résultat peut être obtenu bien plus simplement : le travail de la pesanteur sur un corps de 5^{k} devant être 600^{kgm}, le chemin parcouru est

$$\frac{600}{5} = 120^{\text{m}}$$

Problème 311

Quelle accélération une force de 8000^{k} *communiquera-t-elle à un corps pesant* 20^{k} ?

Soit φ cette accélération, on a (M., n° 265)

$$\frac{8000}{\varphi} = \frac{20}{g}$$

d'où **Rép.** $\varphi = 400g = 3923^{\text{m}}50$.

Problème 312

Quelle force agissant pendant $0^{\text{s}}15$ *sur un boulet de* 12^{k} *lui donnera une vitesse de* 500^{m} *par seconde ?*

De la formule $v = bt$, on tire

$$b = \frac{v}{t} = \frac{500}{0,15}$$

C'est l'accélération que doit produire la force F appliquée au boulet.

Or (M., n° 265) $\frac{F}{b} = \frac{12}{g}$

d'où $F = \frac{b \times 12}{g} = \frac{500}{0,15} \times \frac{12}{9,8088} = 4078$

Rép. 4078^{kg}.

Problème 313

Un plan incliné a 3^m *de hauteur sur* 2^m *de base horizontale. Quel effort faut-il exercer horizontalement sur un corps pesant* 100^k *et posé sur ce plan pour l'empêcher de glisser?*

Ce même corps tombant de haut en bas sur ce plan, quelle vitesse acquerra-t-il au bas de sa course?

Calculer le travail effectué par la pesanteur pendant cette descente et vérifier la relation qui existe entre le travail de la pesanteur et la force vive acquise par ce corps. (Douai, dipl. Ens. sp.)

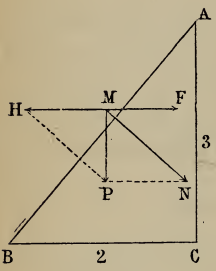


Fig. 401.

1° *Recherche de l'effort pour retenir le corps.*

Décomposons le poids en deux forces : l'une N normale et détruite par le plan, l'autre H horizontale et qu'il s'agit d'équilibrer par la force cherchée F.

Les triangles PMH et ABC donnent

$$\frac{MH}{MP} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$$

d'où $MH = 100 \times \frac{3}{2} = 150^k$

Rép. 150^k.

2° *Vitesse acquise par le corps au bas de sa course.*

Sa vitesse serait la même que si le corps tombait de A en C ; elle est donc

$$v = \sqrt{2g \times AC} = \sqrt{2g \times 3} = 7{,}68$$

Rép. 7^m68.

3° *Calcul du travail effectué par la pesanteur pendant cette descente et vérification de la relation qui existe entre le travail de la pesanteur et la force vive acquise par ce corps.*

Le travail de la pesanteur est

$$100 \times 3 = 300^{kgm}$$

La vitesse du corps au bas du plan est

$$v = \sqrt{2g \times 3}$$

Sa force vive mv^2 sera

$$\frac{100}{g} \times 2g \times 3 = 600$$

D'où l'*on voit que la force vive est le double du travail*, ce qui est le principe qu'il s'agit de vérifier.

Problème 314

Un poids de 5^k *est lancé de bas en haut avec une vitesse de* 50^m *par seconde. On demande :*

1° *Quelle hauteur ce corps peut-il atteindre.*

2° *Quelle serait la perte de force vive après* 3 *secondes d'ascension. Vérifier que la pesanteur a gagné cette force vive.*

3° *En supposant le corps lancé de haut en bas, quelle serait l'augmentation de force vive après* 3 *secondes. Vérifier que cette augmentation est due à la pesanteur.*

4° *Quelle serait la force parallèle à la base du plan qui maintiendrait ces* 5^k *suivant un plan incliné de* 45°. (Douai, dipl. Ens. sp.)

1° *Hauteur que le corps peut atteindre.*

On a $$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\overline{50}^2}{2g}$$

Rép. 127^m50.

2° *Perte de force vive après* 3 *secondes d'ascension ; la pesanteur a gagné cette force vive.*

La vitesse au bout de 3^s est

$$v = a - gt \qquad \text{(M., n° 187)}$$

$$v = 50 - 9{,}8088 \times 3 = 20^m5736$$

La force vive perdue est $m(a^2 - v^2)$

ou $m\left[a^2 - (a - gt)^2\right] = m(2agt - g^2t^2) = mgt(2a - gt)$

en remplaçant et remarquant que le poids égale mg

$$5 \times 3(2 \times 50 - 9{,}8088 \times 3) = 1058{,}55$$

Rép. La force vive perdue après 3^s est 1058,55.

Le travail pendant ce temps est le produit des 5^k par le chemin e parcouru en 3^s. Ce dernier est (M., n° 189)

$$e = at - \frac{gt^2}{2} = 50 \times 3 - \frac{9{,}8088 \times 9}{2} = 105^m86$$

Le travail est donc

$$5 \times 105{,}86 = 529^{kgm}30$$

Rép. *Ce travail équivaut précisément à la demi-force vive disparue.*

Remarque. Nous aurions pu *démontrer* et non pas seulement *vérifier* qu'il doit en être ainsi, mais nous avons voulu nous en tenir à la lettre de l'énoncé; dans le cas qui va suivre, nous donnerons une démonstration que l'on aurait pu fournir ici.

3° *Augmentation de force vive après 3 secondes, en supposant le corps lancé de haut en bas; cette augmentation est due à la pesanteur.*

La vitesse au bout de t^s est

$$v = a + gt$$

La force vive s'est accrue de

$$m(v^2 - a^2) = m\left[(a + gt)^2 - a^2\right]$$
$$= m(2agt + g^2t^2) = mgt(2a + gt) \qquad (1)$$

Pour $t = 3$

on trouve $1941^{kgm}4$

Le travail effectué par la pesanteur est le produit du poids 5^k ou P par le chemin e parcouru; or on a

$$e = at + \frac{gt^2}{2}$$

Le travail est dès lors

$$Pe = P\left(at + \frac{gt^2}{2}\right)$$

Or $P = mg$

donc $$Pe = mg\left(at + \frac{gt^2}{2}\right) = \frac{mgt(2a + gt)}{2}$$

L'on voit, en comparant cette égalité avec (1), que

$$Pe = \frac{1}{2}m(v^2 - a^2)$$

ce qu'il fallait établir.

4° *Force parallèle à la base du plan qui maintient ces* 5k *suivant un plan incliné à* 45°.

Le poids P se décompose en deux forces : l'une N normale, détruite par le plan ; l'autre T horizontale, que la force cherchée F doit équilibrer.

Or $T = F = P \text{ tg } 45° = 5^k$

Rép. 5^k.

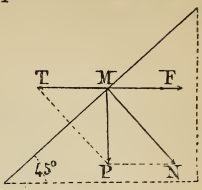


Fig. 402.

Problème 315

Une locomotive et son tender pèsent ensemble 32000^k ; *la résistance qu'ils opposent à la traction sur les rails est de* 130^k. *En combien de temps un effort direct et constant de* 250^k *leur fera-t-il parcourir une longueur de* 7000^m ?

La force accélératrice est

$$250 - 130 = 120^k$$

L'accélération sera (M., n° 265)

$$b = g \times \frac{120}{32000}$$

Le mouvement est uniformément accéléré, et la formule $e = \frac{bt^2}{2}$

donne $$t = \sqrt{\frac{2e}{b}}$$

En remplaçant b et e par leurs valeurs, on a

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 7000 \times 32000}{120 \times 9{,}80}} = 617^s$$

Rép. $1^m 17^s$.

Problème 316

Un train de chemin de fer pesant 50000^k *est animé d'une vitesse de* 9^m *par seconde. A l'approche d'une station, on veut l'arrêter dans l'espace de* 200^m *en serrant les freins. Quelle résistance supposée constante devra-t-on développer pour arrêter ce train ?*

Le travail T du frottement des freins doit annuler la force vive du train ; donc

$$\frac{mv^2}{2} = T$$

Le travail du frottement des freins est le produit des 200^m par la résistance R cherchée ; on aura

$$T = R \times 200 = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50000}{g} \times 9^2$$

d'où $$R = \frac{1}{2} \times \frac{50000}{9,80} \times \frac{9^2}{200} = 1033^k \text{ environ}$$

Rép. 1033^k.

Remarque. On néglige ici les résistances que le train lui-même oppose à son mouvement.

Problème 317

On veut élever avec une grue, en 3 *minutes, à la hauteur de* 3^m45, *une pierre pesant* 2000^k. *Les rayons du cylindre et de la manivelle sont* 0^m36 *et* 0^m70. *Le diamètre de la corde est* 4^{cm}. *Le rendement de la machine est* 0,60. *On propose de calculer en kilogrammes l'importance du moteur.* (Douai, diplôme Ens. sp.)

Le moteur devant être actionné par une force constante, le mouvement qu'il produira sera uniformément accéléré.

Soit b l'accélération à donner à la pierre pour l'élever à 3^m45 en 3 minutes.

De la formule $$e = \frac{bt^2}{2}$$

on tire $$b = \frac{2e}{t^2} = \frac{2 \times 3,45}{(3 \times 60)^2} = 0,00021$$

La tension de la corde est dès lors 2000^k augmentée de la force d'inertie que fait naître l'accélération (M., n° 280) et qui est

$$2000 \times \frac{0,00021}{g}$$

La tension est donc

$$2000 + 2000 \times \frac{0,00021}{g} = 2000 \left(1 + \frac{0,00021}{g}\right)$$

Cette résistance correspond à un rayon d'enroulement de

$$0{,}36 + \frac{0{,}04}{2} = 0^{m}38$$

Le *moment résistant* est alors

$$2000\left(1 + \frac{0{,}00021}{g}\right)0{,}38$$

Et comme le rendement de la machine est seulement de 0,60, si P désigne la puissance, $0^{m}70$ étant son bras de levier, on a

$$P \times 0{,}70 \times 0{,}60 = 2000\left(1 + \frac{0{,}00021}{g}\right) \times 0{,}38$$

d'où l'on tire $\quad P = \dfrac{2000\,(1{,}0000215) \times 0{,}38}{0{,}60 \times 0{,}70}$

Rép. $P = 1810^{k}$ environ.

Telle est l'importance du moteur.

Remarque. En chevaux-vapeur, on aurait

$$n = \frac{3{,}45 \times 2000}{3 \times 60 \times 75} = \frac{1}{2} \text{ cheval-vapeur environ.}$$

Problème 318

Un boulet pesant 24^{k} *sort d'une pièce avec une vitesse de* 600^{m} ; *il vient frapper un mur dans lequel il s'enfonce de* $0^{m}20$; *quelle a été la résistance opposée par la maçonnerie ?*

Supposons constante cette résistance R, et écrivons que la moitié de la force vive annulée égale le travail produit

$$\frac{1}{2}mv^2 = T$$

On a $\quad \dfrac{1}{2} \times \dfrac{24}{9{,}80} \times \overline{600}^2 = R \times 0{,}20$

d'où $\quad R = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{24}{9{,}8} \times \dfrac{\overline{600}^2}{0{,}20} = 2204082$

Rép. 2204082^{kgm}.

Problème 319

Chercher de combien de millimètres pénètre dans un mur un clou à la pénétration duquel le mur oppose une résistance

constante de 150^k; *un marteau pesant* 1^k *vient heurter contre ce clou avec une vitesse de* 2^m *par seconde.* (Lille, Bacc.)

On a encore, comme précédemment,

$$\frac{1}{2}mv^2 = T$$

En désignant par l l'enfoncement du clou, il vient

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{9,8} \times 2^2 = 150 \times l$$

d'où
$$l = \frac{2^2}{2 \times 9,80} \times \frac{1}{150}$$

Rép. $l = 0^m00136$.

Problème 320

Un corps pesant 5^k *est lancé de bas en haut avec une vitesse de* 50^m *par seconde; à* 30^m *du sol il rencontre un obstacle; on demande le travail effectué contre cet obstacle.*

Le temps mis pour atteindre l'obstacle est fourni par la relation

$$e = at - \frac{gt^2}{2}$$

qui devient
$$30 = 50t - \frac{gt^2}{2}$$

ou
$$gt^2 - 100t + 60 = 0$$

d'où
$$t = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 60g}}{g} = \frac{50 \pm 43,72}{9,8088}$$

Le signe — donne la racine correspondante au temps d'ascension (Pr. 202 et 201); alors $t = 0^s64$.

La vitesse au bout de ce temps est

$$v = a - gt = 50 - 0,64 \times 9,8088 = 43,72$$

La force vive perdue par le choc sera

$$mv^2 = \frac{5}{g} \times (43,72)^2 = 974$$

et le travail effectué contre l'obstacle en sera la moitié.

Rép. 487^{kgm}.

Remarque. On eût pu poser immédiatement (M., n° 197)

$$v = \sqrt{a^2 - 2eg} = \sqrt{50^2 - 2 \times 30 \times 9,8088} = 43^m72$$

On a alors

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{g}(a^2 - 2 \times eg) = \frac{5}{2}\left(\frac{a^2}{g} - 2e\right)$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{\overline{50}^2}{9{,}8088} - 60\right) = 487$$

Les calculs sont ainsi plus courts.

Nous avons cru utile d'indiquer la première solution, parce qu'il nous a semblé qu'elle se présenterait plus naturellement à l'esprit des élèves.

Problème 321

Une balle a $0^{m}016$ *de diamètre et pèse* 30^{gr}. *Elle possède au sortir du fusil une vitesse de* 450^{m} ; *en supposant qu'elle ait mis* $\frac{1}{1000}$ *de seconde pour parcourir le canon, de combien d'atmosphères a été la tension moyenne des gaz produits par la combustion de la poudre?*

Supposons la balle chassée du commencement à la fin avec un même effort constant R qu'il s'agit de trouver ; si b est l'accélération du mouvement de la balle dans le fusil, on a l'équation

$$v = bt$$

qui donne $$b = \frac{v}{t} = \frac{450}{\frac{1}{1000}} = 450000^{m}$$

Mais (M., n° 265) $$m = \frac{P}{g} = \frac{R}{b}$$

donc $$\frac{R}{b} = \frac{0{,}030}{9{,}8088}$$

d'où $$R = b \times \frac{0{,}030}{9{,}8088} = \frac{450000 \times 0{,}030}{9{,}8088} = 1376{,}31$$

La pression du gaz sur la balle a été de 1376^{k} ; or la surface de la balle est, en centimètres carrés,

$$\frac{\pi \times \overline{1{,}6}^2}{4} = 2^{cc}01$$

La pression sur 1 centimètre carré sera de

$$1376 : 2{,}01 = 684^{k}73$$

et, en atmosphères, de

$$684{,}73 : 1^{k}033 = 663 \text{ atmosphères environ.}$$

Rép. 663 atmosphères.

Problème 321 bis.

Travail de la vapeur. *Une machine marche à pleine vapeur; le piston a une surface* S, *une courbe* l, *la tension de la vapeur est* F, *celle de la contre-pression* F'; *trouver :*

1° *Travail par chaque coup de piston.*

La pression F' sur l'autre face du piston est ou la pression atmosphérique ou celle qui règne dans le condenseur.

La pression utile qui actionne le piston est F — F' par unité de surface, et pour la surface S, elle est (F — F') S.

Le travail pour une course est

Rép. (F — F') S*l*.

Remarque. Le produit S*l* n'est autre que le volume V du cylindre, dès lors le travail pour un coup de piston peut se représenter par (F — F') V

2° *Force de la machine en chevaux-vapeur, s'il y a* n *coups de piston par minutes.*

Par seconde, il y a $\frac{n}{60}$ coups; comme le travail par coup est (F — F') V, en une seconde il est

$$(F - F')\,V \times \frac{n}{60}$$

et en chevaux-vapeur

$$\frac{n\,(F - F')\,V}{60 \times 75} = \frac{n\,(F - F')\,V}{4500}$$

Rép. $\frac{n\,(F - F')\,V}{4500}$.

Problème 321 ter.

Travail produit par la détente d'un gaz. *Un gaz dont la tension est* n *atmosphères arrive dans un cylindre pendant que le piston parcourt* $\frac{1}{a}$ *de sa course, puis l'ouverture d'admission se ferme, et le piston est mû par la détente du gaz. Quel est le travail produit par cette détente, en supposant la température invariable?*

1re méthode. Représentation graphique du travail.

Désignons par S la surface du piston * exprimée en mètres carrés. L'admission à pleine vapeur a lieu dans la partie AB de la course égale à $\frac{l}{a}$.

Sur AC, élevons une perpendiculaire AA′ représentant la pression P à laquelle donnent lieu sur la surface du piston les n atmosphères.

Cette pression est

$$P = 10\,330^k \times n \times S,$$

puisqu'une atmosphère équivaut à $10\,330^k$ par mètre carré.

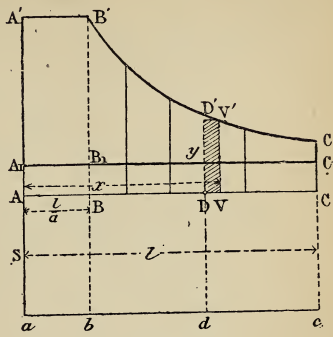


Fig. 403.

La surface du rectangle A′B′BA représente le travail pour cette première partie de la course (M., nº 296).

Pour obtenir le travail qui correspond à la détente, il suffit en chacun des points de BC d'élever des perpendiculaires représentant les pressions en ces points.

Ces pressions s'obtiennent par la loi de Mariotte. Ainsi à un point D situé à une distance x de A, correspond une pression y et un volume ADad, dont le produit est égal à celui du volume ABab par la pression P ; on a

$$y \times \mathrm{AD}ad = \mathrm{P} \times \mathrm{AB}ab$$

ou

$$y = \mathrm{P} \times \frac{\mathrm{AB}ab}{\mathrm{AD}ad} = \mathrm{P} \times \frac{l}{a \times x} \qquad (1)$$

En donnant à x diverses valeurs, on obtient les valeurs corrélatives de y qui donnent la courbe B′D′C′. L'aire de la partie B′D′C′CDB (M., nº 296) représente le travail de la détente.

Application. Cylindre de 0^m80 de diamètre ; course du piston de 0^m80 ; tension de la vapeur, 6 atmosphères ; détente au quart de la course.

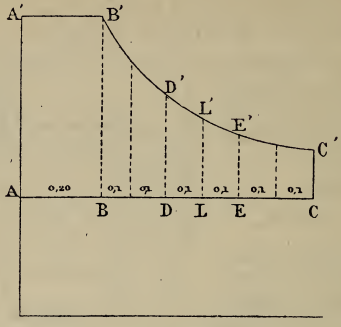
L'admission à pleine vapeur qui a lieu pendant le premier quart de la course donne le rectangle ABB′A où AA′ est une longueur qui représente la pression

$$P = 18\,330^k \times 6 \times S$$

* La figure CAac représente une section longitudinale du cylindre.

Au point D, milieu de la course, le volume de la vapeur devient double, la pression est évidemment moitié de P ; portons

$$DD' = \frac{1}{2} AA'$$



(Le lecteur est prié de mettre les lettres I entre B et D, I' entre B' et D', puis K entre E et C, K' entre E' et C'.)

Fig. 404.

En E distant de A de 0^m60, elle est $\frac{1}{3}$ P, et l'on a

$$EE' = \frac{1}{3} A'A$$

En C le volume a quadruplé, et la pression est $\frac{1}{4}$ P, en sorte que

$$CC' = \frac{1}{4} AA'$$

En joignant les points C', E', D', B' ainsi obtenus, on a une figure ACC'B'A' qui est appelée le *diagramme* d'un coup de piston.

La surface ACC'B'A' représente le travail total.

Son aire peut être obtenue par quadrature au moyen de la formule de Poncelet ou de Th. Simpson (M., nº 296).

Autre méthode. Tant que la pression demeure constante, la ligne A'B' du diagramme du travail reste horizontale ; quand il y a détente, elle devient une courbe B'D'C' qui n'est autre qu'une hyperbole équilatère dont les axes asymptotiques sont AA' et AC, car l'équation (1) fournit

$$xy = \frac{Pl}{a}$$

Or $\frac{Pl}{a}$ est une constante, et $xy =$ constante représente une hyperbole équilatère (G., nº 677).

L'aire B'BCC' peut dès lors s'obtenir au moyen du calcul intégral.

Chacun des petits rectangles DVD'V' (fig. 403) vaut DV $\times$ DD' ou $\Delta x \times y$; l'aire B'BCC' est donc la limite de la somme de AB à AC de toutes ces surfaces élémentaires, ce qui se représente par

$$B'BCC' = \lim \Sigma_{AB}^{AC} y \times \Delta x \quad \text{ou} \quad \int_{AB}^{AC} y dx^*$$

Or
$$y = \frac{Pl}{ax}$$

donc
$$B'BCC' = \int_{AB}^{AC} \frac{Pl}{a} \times \frac{dx}{x}$$

Le calcul intégral fournit pour valeur de cette somme

$$\frac{Pl}{a} \text{log. nép.} \frac{AC}{AB} = \frac{Pl}{a} \text{log. nép. } a$$

Cette formule porte le nom de *formule népérienne.*

Le travail total est donc

$$T = ABB'A' + BCC'B'$$
$$= \frac{Pl}{a} + \frac{Pl}{a} \text{log. nép. } a = \frac{Pl}{a}(1 + \text{log. nép. } a)$$

Calculs. Reprenons l'exemple précédent et appliquons-lui l'une et l'autre des deux méthodes.

1° *Quadrature par la formule de Simpson.*

La formule de Simpson est $S = \frac{1}{3} d\,(E + 2I + 4P)$ (G. n° 983)

Divisons BC en six parties égales (fig. 404).

On a $II' = \frac{2}{3} BB'$, $DD' = \frac{1}{2} BB'$, $LL' = \frac{2}{5} BB'$

$$EE' = \frac{1}{3} BB', \quad KK' = \frac{2}{7} BB', \quad CC' = \frac{1}{4} BB'$$

donc

$$B'BCC' = \frac{1}{3} BB'[(BB' + CC') + 2(DD' + EE') + 4II' + LL' + KK')]$$
$$= \frac{1}{3} 0{,}1 \times BB'\left[\left(1 + \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}\right)\right] = 0{,}277 \times BB'$$

---

* Le signe $\int$ n'est qu'une S allongée, abréviation de *somme*, et $\int_{AB}^{AC} ydx$ se lit *somme de* AB *à* AC *de* ydx; rechercher cette somme, c'est faire une *intégrale.*

Le travail total est

$$T = BB' \times 0{,}20 + BB' \times 0{,}277 = 0{,}477 \times BB'$$
$$= 0{,}477\,(10\,330 \times 6 \times \pi \times \overline{0{,}4}^2) \qquad (2)$$

2° *Formule népérienne.*

$$T = \frac{Pl}{a}\,(1 + \log.\ \text{nép.}\ a)$$

Or $a = 4$ et $\log.\ \text{nép.}\ N = \frac{\log.\ N}{M}$, M étant le module 0,4343...

$$\log.\ \text{nép.}\ 4 = \frac{\log.\ 4}{0{,}4343} = \frac{0{,}60206}{0{,}4343} = 1{,}38$$

donc $$T = (10\,330 \times 6 \times \pi \times \overline{0{,}4}^2) \times \frac{0{,}8}{4}\,(1{,}38 + 1)$$
$$= (10\,330 \times 6 \times \pi \times \overline{0{,}4}^2) \times 0{,}8 \times 0{,}595 \qquad (3)$$

Remarque. Le rapport des valeurs (2) et (3) trouvées pour T est celui de 477 à 476 ; l'erreur est donc au plus égale à $\frac{1}{476}$ ou environ $\frac{1}{500}$. La *quadrature approximative* fournit donc des résultats suffisamment exacts dans l'application.

Nous nous arrêterons là dans cette étude, la nature de cet ouvrage nous prescrivant des bornes que nous ne devons pas trop franchir.

Détente des gaz dans une enceinte inerte.

Ainsi on pourrait étudier la détente du gaz dans *une enceinte inerte*, c'est-à-dire ne communiquant ni ne recevant point de chaleur ; il s'ensuivrait, lors de la détente, un abaissement de température et, par suite, une variation de pression régie non plus par la *loi de Mariotte* PV = constante, mais par celle de *Laplace*

$$PV^{\gamma} = \text{constante, dans laquelle } \gamma = \frac{C}{C'}$$

C et C′ étant les capacités calorifiques du gaz sous pression constante et sous volume constant, pour l'air $\gamma = \frac{C}{C'} = 1{,}408$.

La *loi de Laplace* combinée avec celle de *Gay-Lussac* donne la *loi de Poisson* relative à la température que prend un gaz alors qu'il se détend ou qu'on le comprime ; en un mot, alors qu'il passe d'une pression p_1 à une pression p_2 ; elle est

$$\tau_2 = \tau_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

τ_2 et τ_1 sont des *températures absolues ;* elles sont égales aux températures centigrades augmentées de 273°.

Voici quelques résultats intéressants.

Détente. Si $p_1 = 7$ atmosphères, que le gaz se détende à $p_2 = 1$ atmosphère, et si $t_1 = 10°$, on trouve $t_2 = -117°$.

On voit par là quels grands froids produit la détente ; MM. Caillet et Pictet ont utilisé cette propriété pour condenser les gaz réputés permanents.

Compression. Le tableau suivant dispense d'explications.

Conditions initiales : $p_1 = 760$ et $t_1 = 10°$

Si l'on a	$p_2 = 3p_1$,	on trouve	$t_2 = 116°$
»	$p_2 = 7p_1$	»	$t_2 = 236°$
»	$p_2 = 10p_1$	»	$t_2 = 278°$

On voit par là la nécessité de refroidir les cylindres des souffleries à haute pression.

Effet de la contre-pression dans les machines à air ou à vapeur.

Pour obtenir le travail utile, il faut retrancher celui que fournit la contre-pression P' ; on peut exprimer ce dernier par le calcul ou par une quadrature.

Si nous portons (fig. 403) $AA_1 = P'$, le rectangle A_1AC_1C donne la valeur du travail de la contre-pression ; son expression algébrique est

$$T' = P' \times l$$

Le travail utile sera représenté par l'aire $A'B'C'C_1A_1$.

Si d désigne le diamètre du piston, l_1 la course, n le nombre d'atmosphères du gaz ou de la vapeur, n' celui de la contre-pression, $\frac{1}{a}$ le coefficient de détente, le travail disponible par tour est donné par la formule générale

$$T = \frac{Pl}{a}(1 + \log. \text{nép. } a) - P'l$$

$$= l\left[\frac{P}{a}(1 + \log. \text{nép. } a) - P'\right]$$

ou encore

$$T = \left[\frac{n}{a}(1 + \log. \text{nép. } a) - n'\right] 10\,330 \times \left(\frac{\pi d^2 l}{4}\right)$$

Avantage de la détente. Reprenons l'exemple numérique où nous supposons la contre-pression égale à 1 atmosphère.

Sans détente, le travail durant toute la course est

$$T_1 = \left(10\,330 \times \pi \times \frac{\overline{0,8}^2}{4}\right) \times 0,80 \times 5$$

Avec détente, il est

$$T_2 = \left(10\,330 \times \pi \times \frac{\overline{0,8}^2}{4}\right) (6 \times 0,595 - 1) \times 0,80$$

Formons les rapports $\frac{T_2}{T_1}$.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{6 \times 0,595 - 1}{5} = 0,51$$

Ainsi, avec quatre fois moins de vapeur, on obtient les 0,51 du travail donné à pleine vapeur, ce qui fait qu'avec autant de vapeur employée avec détente le travail est $0,51 \times 4 = 2,05$ plus grand que si on l'emploie sans détente.

On voit par là quelle économie résulte de la détente. La figure 403 rend aussi aisément compte de ce résultat, car le travail que représente l'aire $B'C'C_1B_1$ ne correspond à aucune quantité de vapeur dépensée.

L'économie que procure la détente augmente avec le degré de détente ; elle augmente aussi à mesure que la tension de l'air ou de la vapeur diminue. Ces deux résultats ressortent, le 1er de la formule népérienne, le 2e du rapport $\frac{T_2}{T_1}$. C'est pour cela que les machines de Watt, qui sont à *longue détente et à basse pression,* sont très économiques.

Indicateur de Watt. Les diagrammes dont nous venons de parler peuvent s'obtenir *automatiquement* au moyen de l'*indicateur de Watt.*

Problème 322

Un cylindre de 0m80 *de diamètre renferme un piston qui est pressé sur l'une de ses faces par un gaz dont la tension est de* 6 *atmosphères ; la course du piston est de* 1m20. *Quel sera le travail produit par chaque coup de piston?*

1° *Il n'y a pas de détente.*

Le travail produit est exprimé par le produit FSl, où F est la pression de la vapeur, S la section du cylindre, l la course ; on a donc $T = (6 \times 10\,330) \times (\pi \times \overline{0,4}^2) \times 1,20 = 373\,850$

Rép. 373 850kgm.

2° *Il y a détente à la moitié de la course.*

Nous renvoyons au problème précédent pour les explications.

La formule $T = \frac{Pl}{a}(1 + \log. \text{nép. } a)$

dans laquelle $P = (10\,330 \times 6 \times \pi \times \overline{0,40}^2) = 311\,540$

donne $T = \frac{311\,540 \times 1,20}{2}(1 + \log. \text{nép. } 2)$

Or $\log. \text{nép. } 2 = \frac{\log. 2}{0,4343} = \frac{0,30103}{0,4343} = 0,692$; donc

Rép. 316 250kgm.

3° *Il y a détente aux* $\frac{3}{4}$.

$$T = \frac{311\,540 \times 1,2}{\frac{4}{3}} \times \left(1 + \log. \text{nép. } \frac{4}{3}\right)$$

$$\log. \text{nép. } \frac{4}{3} = 0,285$$

Rép. $S = 360\,300$kgm.

Problème 323

Quel sera le travail disponible dans le cas du problème précédent ?

I. *L'autre face du piston communiquant avec l'atmosphère ?*

1° *Il n'y a pas de détente.*

$$T = FSl = 10\,330\,(6 - 1) \times (\pi \times \overline{0,4}^2) \times 1,20 = 311\,540$$

Rép. 311 540kgm.

2° *Il y a détente à la moitié de la course.*

Dans la formule

$$T = \left[\frac{n}{a}(1 + \log. \text{nép. } a) - n'\right] 10\,330\,\frac{\pi d^2}{4}\,.l$$

la parenthèse $\frac{6}{2}(1 + \log. \text{nép. } 2) - 1 = 4,076$; donc

Rép. $T = 253\,960$kgm.

3° *Il y a détente aux* $\frac{3}{4}$.

La même formule donne, en remarquant que la parenthèse est

$$\frac{6}{\frac{4}{3}}\left(1 + \log.\ \text{nép.}\ \frac{4}{3}\right) - 1 = 4{,}782$$

Rép. 298 350^{kgm}.

Remarque. *Économie de la détente.*

Si l'on représente par 1 le travail que produit la vapeur introduite à pleine pression pendant toute la course, la même quantité de vapeur fournit :

1° Avec une détente de $\frac{1}{2}$,

$$\frac{4{,}076}{5} \times 2 = 1{,}63$$

2° Avec une détente de $\frac{3}{4}$,

$$\frac{4{,}782}{5} \times \frac{4}{3} = 1{,}27$$

II. *L'autre face communique avec un condenseur où la pression est* 250 *millimètres.*

Les 250^{mm} équivalent à une pression qui, en atmosphère, est $\frac{250}{760}$.

On obtiendra le travail dans les différents cas de la même manière que précédemment ; dans la formule générale, on fera

$$n' = \frac{250}{760}$$

1° *Il n'y a pas de détente.*

Rép. 353 350^{kgm}.

2° *Détente à la moitié de la course.*

Rép. 295 770^{kgm}.

3° *Détente aux* $\frac{3}{4}$.

Rép. 340 160^{kgm}.

Remarques. I. Au lieu de se servir des formules générales, on peut s'aider des résultats trouvés dans la première partie du

problème ; il suffit d'ajouter à chacun d'eux le travail qui résulte d'un abaissement de la contre-pression de 1 atmosphère à 250mm.

Cet abaissement est de $760 - 250 = 510^{mm}$ ou $\frac{51}{76}$ d'atmosphère ; il lui correspond un travail égal à

$$10\,330 \times \pi \times \overline{0,4}^2 \times \frac{51}{76} \times 1,2 = 41\,810^{kgm}.$$

II. *Économie de la détente.*

Si 1 est le travail effectué par une masse de vapeur sans détente, celui effectué par la même masse avec détente est

1° Pour la détente $\frac{1}{2}$,

$$\frac{295\,770}{353\,350} \times 2 = 1,67$$

2° Pour la détente $\frac{3}{4}$,

$$\frac{340\,160}{353\,350} \times \frac{4}{3} = 1,30$$

En rapprochant ces nombres de ceux trouvés plus haut, l'on voit que la condensation apporte encore une économie dans l'emploi de la vapeur, mais toutefois les différences sont peu fortes, cela tient à la pression initiale élevée de la vapeur ; *la condensation n'est vraiment bien profitable que pour des machines à basses pressions.*

Problème 324

Quelle est en chevaux-vapeur la puissance du moteur nécessaire pour faire marcher une pompe dont le piston 0^m12 *de rayon et* 0^m40 *de course, avec une vitesse de* 15 *oscillations doubles par minute, la hauteur totale de la colonne d'eau étant* 25^m? *On sait que les diverses résistances passives absorbent dans cet appareil* $\frac{1}{5}$ *du travail moteur.*

Supposons la pompe à simple effet.

En une minute, la quantité d'eau élevée est 15 fois le volume du corps de pompe, soit

$$P = 15 \times (\pi \times \overline{0,12}^2 \times 0,40) = 271 \text{ lit. } 43$$

et par seconde $\quad 271,43 : 60 = 4$ lit. 524

Le travail utile par seconde est

$$4{,}524 \times 25 = 113^{kgm}\ 1$$

Comme il n'est que les $\frac{4}{5}$ du travail moteur, celui-ci sera en kilogrammètres $\frac{113{,}1 \times 5}{5}$, et en chevaux-vapeur

$$\frac{113{,}1 \times 5}{4 \times 75} = 1 \text{ cheval } 85$$

Rép. La force de la machine sera de 1 ch. 85.

Problème 325

Une machine à vapeur met en jeu un système de pompes qui élèvent l'eau d'un fleuve à 155^m *de hauteur pour l'alimentation d'une ville. On demande de calculer à* $\frac{1}{500}$ *près le rendement de ce système de pompes, en supposant :*

1° *Que la force de la machine mesurée sur l'arbre de couche soit de* 1 500 *chevaux-vapeur ;*

2° *Que les réservoirs de la ville reçoivent* 30 000 *mètres cubes en* 24 *heures.* (Concours général.)

Le travail utile en 24 heures est

$$T_u = 30\,000\,000 \times 155$$

Le travail moteur en 24 heures est en kilogrammètres

$$T_m = 1\,500 \times 75 \times (24 \times 60 \times 60)$$

Le rendement est

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{30\,000\,000 \times 155}{1\,500 \times 75 \times 24 \times 60 \times 60} = 0{,}478$$

Rép. 0,478.

L'erreur absolue étant moindre que 0,001, l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{478}$ du résultat trouvé ; elle est donc voisine de $\frac{1}{500}$.

QUESTIONS DE FROTTEMENT

DÉMARRAGE D'UN CORPS POSÉ SUR UN PLAN

§ I. — Démarrage d'un corps posé sur un plan horizontal.

1. On a vu (M., nº 327 et suiv.) la solution de la question alors que la force appliquée au corps est horizontale; nous allons étudier le cas où la force a une direction quelconque.

Soit à calculer la grandeur Z *de la force faisant avec l'horizon un angle* α *pour qu'elle soit capable de démarrer un corps de poids* P*; *soit* $f = \operatorname{tg} \alpha$ *le coefficient de frottement au départ.*

La force de frottement F est proportionnelle à la pression normale. (M., 1re loi, 334.) Si nous décomposons Z en deux forces, l'une Z' horizontale et l'autre Z'' verticale, la pression normale est

$$P - Z''$$

et la force de frottement

$$F = f(P - Z'')$$

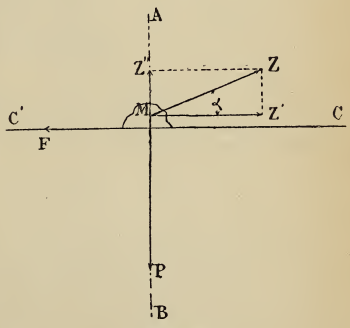


Fig. 405.

Le démarrage a lieu lorsque $Z' = F$; soit

$$Z' = f(P - Z'')$$

ou

$$Z \cos \alpha = f(P - \sin \alpha)$$

On en tire

$$Z = \frac{fP}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

2. Les valeurs que l'on obtient dans les questions de frottement s'inter-

* Nous désignerons toujours par P le poids du corps, N sa composante normale, T sa composante *tangentielle* ou suivant le plan. — La force déterminant l'équilibre ou le mouvement sera représentée par Z. — La force de frottement le sera par F.

prètent plus simplement en faisant usage de l'angle de frottement (M., n° 331).

Remplaçant donc f par tg φ *, il vient

$$Z = \frac{P \operatorname{tg} \varphi}{\cos \alpha + \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha} = \frac{P \sin \varphi}{\cos (\alpha - \varphi)} \qquad (1)$$

Telle est la valeur de la force nécessaire pour produire un démarrage.

3. Remarque. Les *forces effectives* qui sollicitent le corps sont le poids P et la force Z; on prouve qu'au moment du démarrage leur résultante R doit faire avec la normale un angle égal à l'angle φ.

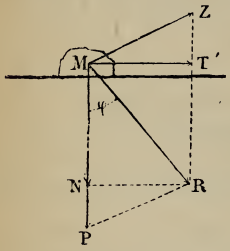


Fig. 406.

En effet, la force R se décompose en deux forces N' et T'; la force de frottement est fN'; or le triangle MT'R donne

$$MT' = RT' \operatorname{tg} \varphi \quad \text{ou} \quad T' = N' \operatorname{tg} \varphi = fN'$$

donc la force T' est capable de vaincre le frottement, et le corps est sur le point de démarrer.

Ce principe est général : *au moment du démarrage, toutes les forces effectives qui sollicitent un corps ont une résultante qui forme avec la normale au plan un angle égal à l'angle de frottement au départ.*

Nous ferons plusieurs fois usage de cette propriété pour établir d'une manière fort simple les conditions d'équilibre dans les questions de frottement.

4. Discussion. Il suffit de considérer la force Z comme agissant suivant la direction donnée dans la partie ACB du plan (fig. 405); il n'y a pas lieu de la considérer comme négative; ce qui nécessite que l'on ait

$$\cos (\alpha - \varphi) > 0$$

ou

$$-90^\circ < \alpha - \varphi < 90^\circ$$

L'inégalité $\alpha - \varphi < 90^\circ$ est toujours vérifiée, puisque α est au plus égal à 90° et que φ est inférieur à 45°; l'autre $-90 < \alpha - \varphi$ donne $\alpha > -(90^\circ - \varphi)$, c'est-à-dire que la force Z ne peut pas agir dans l'angle PMR $= \varphi$ (fig. 406). Ce résultat ressort encore de la remarque précédente, car alors il serait impossible que la force Z et le poids P eussent une résultante dirigée suivant une ligne MR faisant un angle φ avec la normale.

5. Cas particuliers. Dans le cas particulier où $\alpha = -(90^\circ - \varphi)$, la formule (1) donne $Z = \infty$; on dit qu'il y a alors *coincement*, c'est-à-dire que, quelle que soit la force Z, le corps ne peut pas être démarré si on le tire suivant MR, à plus forte raison si la force est dans l'intérieur de l'angle PMR.

Pour une valeur de α négative mais supérieure à $-(90^\circ - \varphi)$, la formule donne une valeur de Z qui, très grande pour α voisin de cet angle limite, diminue lorsque α se rapproche de 0. La propriété qu'a la résultante de faire un angle φ avec la normale permet de trouver la grandeur de Z (voir fig. 407), elle montre que cette force varie comme l'indique la formule; ainsi, pour l'angle α, on a MZ; pour α_1, on obtient MZ_1, et l'on a $MZ_1 < MZ$.

---

* Le coefficient de frottement f étant au plus égal à 1, l'angle φ a pour valeur limite 45°.

Pour $\alpha = 0$, la formule donne

$$Z = \frac{P \sin \varphi}{\cos \varphi} = P \operatorname{tg} \varphi = fP$$

C'est ce qu'on a trouvé dans le cours (M., n° 331).

Si α augmente, la valeur de Z varie en passant par un minimum; en effet, Z est minimum quand $\cos(\alpha - \varphi)$ est maximum, c'est-à-dire égal à 1; dès lors

$$\alpha - \varphi = 0; \quad \text{d'où} \quad \alpha = \varphi$$

Ainsi, c'est en tirant vers le haut, suivant une direction faisant avec l'horizontale un angle φ, que l'effort à exercer est minimum.

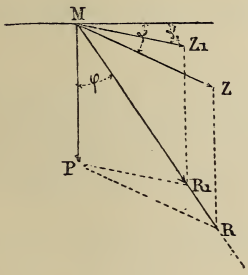


Fig. 407.

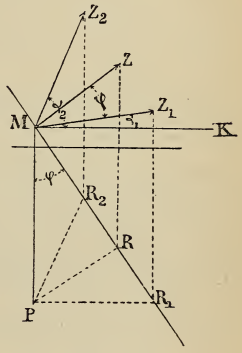


Fig. 408.

Une construction géométrique fournit aussi ce résultat. La figure 408 montre que Z minimum est fourni par le parallélogramme PRZM, lorsque le côté PR est perpendiculaire à la diagonale MR; mais, dans ce cas, l'angle ZMK a les côtés perpendiculaires aux côtés de l'angle PMR, et on a $ZMK = \varphi$.

Si l'on a $\alpha > \varphi$, la force Z croît continuellement, ainsi que l'indiquent la formule et la figure, jusqu'au moment où $\alpha = 90°$, alors $Z = P$.

§ II. — Démarrage d'un corps posé sur un plan incliné.

6. *Un corps est placé sur un plan incliné d'un angle α, déterminons la grandeur de la force capable de produire le démarrage.*

L'angle α peut être inférieur, égal ou supérieur à φ.

1° L'angle α est égal à l'angle φ.

7. Abandonnons le corps à lui-même.

Le poids P se décompose en deux forces, l'une *normale* N et l'autre *tangentielle* T.

La force normale N donne lieu à une force de frottement $F = fN$.

Or on a $T = P \sin \varphi$ et $N = P \cos \varphi$

dès lors $F = fN = fP \cos \varphi = P \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi = P$

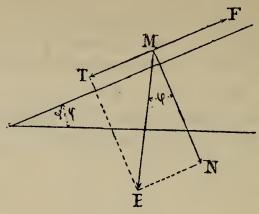


Fig. 409.

La force T étant égale à F, le corps sera sur le point de glisser; *donc un corps placé sur un plan qui est incliné d'un angle égal à l'angle de frottement y est juste en équilibre.*

8. **Remarques. I.** C'est sur ce principe qu'Amontons s'est basé pour étudier les lois du frottement. L'appareil dont il se servait était un plan mobile autour d'une charnière horizontale. Une corde s'enroulant sur un treuil permettait d'incliner plus ou moins le plan. Amontons plaçait sur ce plan une caisse chargée de balles de plomb, et le corps sur lequel il expérimentait formait le fond de la caisse. En faisant varier l'inclinaison α du plan, il arrivait un instant où la caisse partait. On avait alors $f = \operatorname{tg} \alpha$.

II. Observons que la seule force *effective*, le poids P, fait, avec la normale au plan, un angle $PMN = \varphi$.

III. Si l'angle α est notablement inférieur à φ, le corps restera sur le plan; ceci explique pourquoi des livres, par exemple, ne glissent pas sur un pupitre, ni les tuiles sur un toit.

Pour l'homme gravissant une côte, la pente ne doit pas être supérieure à 30°. Pour des pentes plus fortes, on fait usage de *marches* ou *escaliers*.

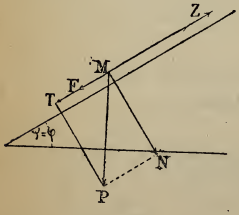


Fig. 410.

9. Proposons-nous maintenant de calculer la force dirigée suivant le plan qui, dans ce cas, serait capable de *démarrer le corps vers le haut.*

La force Z à développer doit vaincre la composante tangentielle T de la force P et la force de frottement F.

Or $F = Nf = N \operatorname{tg} \varphi$ (M., n° 334)

On a $Z = T + F$

ou $Z = P \sin \varphi + P \cos \varphi \times \operatorname{tg} \varphi = 2P \sin \varphi$

La force Z à développer est donc $2P \sin \varphi$.

10. **Remarques. I.** Si on observe que sans le frottement la force pour démarrer eût été $T = P \sin \varphi$, et que maintenant elle est $2P \sin \varphi$, on peut dire que *le frottement équivaut à une augmentation d'inclinaison d'un plan où le frottement serait nul.*

Nous aurons occasion de revenir sur cette remarque.

11. Les forces *effectives* qui sollicitent le corps sont le poids P et la force Z. Au moment du démarrage, leur résultante R doit faire un angle φ avec la normale MX′ (fig. 411).

Cette remarque permet de trouver géométriquement la force Z; elle permet aussi de la calculer; on a, en effet,

$$\frac{Z}{P} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi} = 2 \sin \varphi$$

d'où $$Z = 2P \sin \varphi$$

résultat trouvé précédemment.

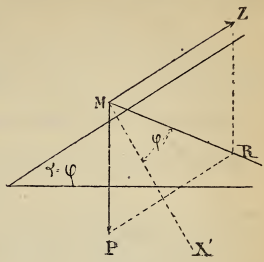


Fig. 411.

2° L'angle α est différent de l'angle φ.

I. Établissement des formules.

Cas où l'angle α est inférieur à l'angle φ.

Le corps restera sur le plan; nous pouvons nous proposer de le démarrer vers le haut ou vers le bas.

11. Démarrage vers le haut. Soit Z la force qui produit le démarrage vers le haut, β l'angle qu'elle fait avec la direction du plan; on voit immédiatement que cette force ne peut plus agir que dans la région XY′X′, sinon elle solliciterait le corps à descendre.

De la tendance au mouvement vers le haut naît une force de frottement F dirigée vers le bas, dont la grandeur est au démarrage $F = N \times f$ (M., n° 334, 1re loi), N étant la réaction normale et totale du plan.

Les quatre forces N, F, Z, P laissant le corps en équilibre, on a, en projetant sur les axes XX′, YY′,

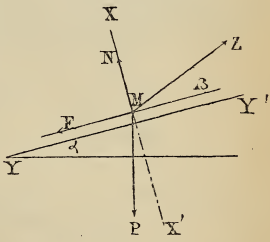


Fig. 412.

sur YY′ $$F + P \sin \alpha - Z \cos \beta = 0 \qquad (1)$$

sur XX′ $$-N + P \cos \alpha - Z \sin \beta = 0 \qquad (2)$$

De (1) on tire $$fN + P \sin \alpha - Z \cos \beta = 0$$

ou $$N = \frac{Z \cos \beta - P \sin \alpha}{f}$$

De (2) $$N = P \cos \alpha - Z \sin \beta$$

En égalant les deux valeurs de N, on obtient

$$\frac{Z \cos \beta - P \sin \alpha}{f} = P \cos \alpha - Z \sin \beta$$

l'on tire $$Z = P \cdot \frac{f \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta} \qquad (3)$$

ou, en remplaçant f par tg φ,

$$Z = P \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \beta + \operatorname{tg} \varphi \sin \beta} = P \frac{\sin \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \cos \varphi}{\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi}$$

ou
$$Z = P \cdot \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos (\beta - \varphi)} \qquad (a)$$

Telle est la force nécessaire pour produire le démarrage vers le haut.

12. Remarque. En ne tenant pas compte du frottement, on trouve

$$Z = P \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}$$

ce que l'on établit d'ailleurs directement (M., n° 151, 1°).

On voit donc que le frottement a pour effet *de substituer au plan où le frottement s'exerce un plan où il ne s'exercerait pas, mais dans lequel l'angle d'intersection serait augmenté de* φ.

Cette remarque est d'une grande importance et permet de résoudre promptement nombre de questions.

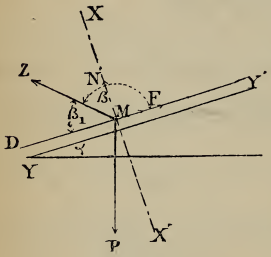


Fig. 413.

13. Démarrage vers le bas. La force Z ne peut agir au plus que dans la région XYX.

La force de frottement F est dirigée vers le haut. Soit β_1 l'angle ZMD.

Comme précédemment, on a

pr. sur YY'
$$Z \cos \beta_1 + P \sin \alpha - F = 0 \qquad (1)$$

pr. sur XX'
$$N + Z \sin \beta_1 - P \cos \alpha = 0 \qquad (2)$$

En remarquant que $F = Nf$, l'équation (1) donnant

$$N = \frac{Z \cos \beta_1 + P \sin \alpha}{f}$$

et l'équation (2) $\qquad N = P \cos \alpha - Z \sin \beta_1$

on a $\qquad Z \cos \beta_1 + P \sin \alpha = f (P \cos \alpha - Z \sin \beta_1)$

On en tire
$$Z = P \cdot \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos (\varphi - \beta_1)} \qquad (b)$$

14. Remarque. Cette formule peut se tirer de la formule (a), dans laquelle on change φ en $-\varphi$, et où l'angle β est $180 - \beta_1$; en effet, avec ces substitutions, la formule (a) devient.

$$Z = P \cdot \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos (180 - \beta_1 + \varphi)} = P \cdot \frac{\sin (\varphi - \alpha)}{\cos (\varphi - \beta_1)}$$

ce qui est la relation (b).

Cas où l'angle α *est plus grand que* φ.

15. Avec $\alpha > \varphi$, le corps glisserait de lui-même; il n'y a donc pas lieu de considérer le mouvement vers le bas, à moins qu'on ne veuille demander *l'effort nécessaire pour empêcher le corps de glisser.*

Cette question ainsi que celle du démarrage vers le haut peuvent se traiter d'une manière directe comme précédemment, mais les formules (*a*) et (*b*) fournissent aussi les solutions de ces deux cas.

On peut remarquer que la formule (*b*) donne, ainsi que cela doit être quand α est plus grand que φ, une valeur négative pour Z; car $\alpha - \varphi$ est positif, et $\varphi - \beta$ n'est jamais, dans le cas qui nous occupe, supérieur à 90° ou inférieur à — 90°.

16. En résumé, la formule

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

est une formule générale qui convient à tous les cas de démarrage, seulement il faut faire attention au signe de φ; il sera positif pour les mouvements vers le haut et négatif pour les mouvements vers le bas; il faut de plus compter les angles β à partir d'une même origine.

II. Discussion des formules.

17. Nous conduirons la discussion en examinant séparément les cas du démarrage vers le haut et du démarrage vers le bas.

18. Démarrage vers le haut. On a alors

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

Conditions de possibilité. L'angle α est inférieur à 90°, il en est de même de φ; l'angle β ne peut varier qu'entre des limites que nous allons préciser et qui seront fournies par la considération de la pression normale.

Il faut évidemment que l'on ait $N > 0$.

Or (n° 11 *) on a $N = P \cos\alpha - Z \sin\beta$

donc on aura $P \cos\alpha > Z \sin\beta$

d'où $\sin\beta < \frac{P}{Z} \cos\alpha$

ou, en remplaçant Z par sa valeur (3),

$$\sin\beta < \frac{\cos\beta + f \sin\beta}{f \cos\alpha + \sin\alpha} \cdot \cos\alpha$$

Or, le dénominateur étant positif, on peut écrire

$$\sin\beta\,(f \cos\alpha + \sin\alpha) < (\cos\beta + f \sin\beta) \cos\alpha$$

d'où $-\sin\beta \sin\alpha + \cos\beta \cos\alpha > 0$

ou $\cos(\beta + \alpha) > 0$

ce qui exige que l'on ait $-90° < \beta + \alpha < 90°$

ou $\beta < 90° - \alpha$

et $\beta > -90° - \alpha$ ou $\beta > -(90° + \alpha)$

Mais pour le mouvement ascendant la force ne pouvant agir au plus que dans la région XY'X', on voit (fig. 412) que β ne peut varier qu'entre $90° - \alpha$ et — 90°, c'est-à-dire que Z n'agit que dans la région SMX' (fig. 414). Nous allons voir qu'il y a lieu de resserrer encore la région où peut se trouver Z.

---

* N° 11 indique le renvoi au n° 11, p. 495.

Remarquons que pour $Z = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$ positif, le numérateur étant toujours positif, on doit avoir

$$\cos(\beta - \varphi) > 0$$

soit $\beta - \varphi < \varphi < 90^\circ$ et $\beta - \varphi > -90^\circ$

De la dernière inégalité, on tire

$$\beta > -90^\circ + \varphi$$

par suite, la force Z ne peut pas s'exercer dans l'angle $X'ML = \varphi$.

L'angle β ne peut donc varier, pour le démarrage ascendant, qu'entre $90^\circ - \alpha$ d'une part, et $-(90^\circ - \varphi)$ d'autre part.

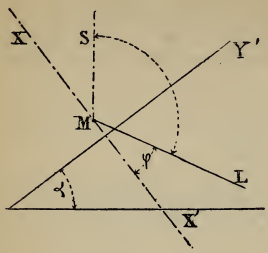


Fig. 414.

La force se trouve dans l'angle SML.

19. Remarque. La résultante des forces effectives P et Z doit se trouver dirigée suivant ML; ce résultat ne peut avoir lieu que si la force Z est dans l'angle SML.

20. Cas particuliers. Nous pouvons faire diverses hypothèses sur les valeurs possibles de α, β et φ, et voir comment varie la force Z.

I. $\alpha = 0$; on serait alors dans le cas d'un plan horizontal; l'effort à développer pour démarrer le corps serait

$$Z = P \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos(\beta - \varphi)}$$

1° Si $\beta = 0$, on a $Z = P \operatorname{tg} \varphi = fP$ (M., n° 332).

2° Si $\beta = \varphi$, on a $Z = P \sin\varphi$; c'est la *valeur minimum de la force à appliquer au corps pour le démarrer.*

Ces résultats ont été trouvés précédemment (n° 5).

II. $\alpha > 0$. Voyons comment varie Z avec l'angle β.

1° $\beta = -(90^\circ - \varphi)$. La force Z fait un angle φ avec la partie inférieure de la normale.

La formule $$Z = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

donne $Z = \infty$; le démarrage est impossible, quelque grande que soit la force; il y a une sorte d'*arc-boutement.*

2° $\beta = -\alpha$; la force Z est horizontale, alors

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

et si l'on a de plus $\varphi = 0$, il vient $Z = P \operatorname{tg} \alpha$, résultat connu.

3° $\beta = 0$; la force Z est alors dirigée suivant le plan, on a

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(-\varphi)} = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi}$$

3° Pour $\beta = 90 - \alpha$, la force est verticale, et on a

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(90 + \alpha - \varphi)} = P$$

Et, en effet, la force Z doit égaler P, puisque Z est verticale.

5° *Minimum de Z.* On peut se proposer de rechercher pour quel angle β l'effort Z à développer est minimum.

Le minimum de Z par rapport à β a lieu quand $\cos(\beta - \varphi)$ est égal à 1;

soit $$\beta - \varphi = 0; \quad \text{d'où} \quad \beta = \varphi$$

c'est en tirant suivant cette direction que l'on sera dans les meilleures conditions; on peut remarquer que cette direction est perpendiculaire à celle de la force qui produit l'arc-boutement (voir 1°).

21. Démarrage vers le bas. La discussion se fait d'une manière analogue à la précédente.

On a $$Z = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \beta_1)}$$

Conditions de possibilité. Comme précédemment, on doit avoir $N > 0$; soit

$$P \cos \alpha - Z \sin \beta_1 > 0$$

d'où $$\sin \beta_1 < \frac{P}{Z} \cos \alpha$$

Et, en remplaçant Z par sa valeur,

$$\sin \beta < \frac{\cos(\varphi - \beta_1)}{\sin(\varphi - \alpha)} \cos \alpha$$

Il y a maintenant à examiner les deux cas de α plus grand ou plus petit que φ.

Supposons $\alpha < \varphi$; on peut faire disparaître le dénominateur et écrire

$$\sin \beta_1 \sin(\varphi - \alpha) < \cos(\varphi - \beta_1) \cos \alpha$$

d'où, en développant, puis simplifiant,

$$\cos \varphi \cos(\alpha - \beta) > 0$$

Or $\cos \varphi$ est positif; il faut donc que l'on ait

$$\cos(\alpha - \beta_1) > 0$$

soit $$-90° < \alpha - \beta_1 < 90°$$

d'où $$\beta_1 < 90° + \alpha \quad \text{et} \quad \beta_1 > -(90° - \alpha)$$

En remarquant en outre que Z doit être positif, on trouvera des limites encore plus resserrées pour β.

En effet, $$Z = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \beta_1)}$$

Or $(\varphi - \alpha)$ étant positif, on doit avoir

$$\cos(\varphi - \beta_1) > 0$$

soit $$-90° < \varphi - \beta_1 < 90°$$

d'où $$\beta_1 < 90° + \varphi \quad \text{et} \quad \beta_1 > -(90° - \varphi)$$

En comparant les quatre inégalités en β_1, on voit que l'on a

$$90^\circ + \alpha > \beta_1 > -(90^\circ - \varphi)$$

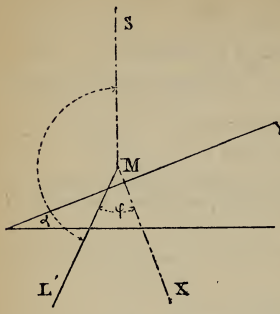


Fig. 415.

La force Z peut donc agir dans l'angle SML′ donné par la verticale et une droite ML formant vers le bas avec la normale un angle $L'MX' = \varphi$.

Supposons $\alpha < \varphi$. En faisant disparaître le dénominateur de l'inégalité

$$\sin \beta_1 < \frac{\cos(\varphi - \beta_1)}{\sin(\varphi - \alpha)} \cos \alpha, \text{ on a,}$$

à cause du signe négatif de $\sin(\varphi - \alpha)$,

$$\sin \beta_1 \sin(\varphi - \alpha) > \cos(\varphi - \beta_1) \cos \alpha.$$

On en tire $\cos \varphi \cos(\alpha - \beta_1) < 0$

d'où $\beta_1 > 90^\circ + \alpha$, $\beta_1 < -(90^\circ - \alpha)$.

La remarque que la force Z doit être positive fournit

$$\beta_1 > 90^\circ + \varphi, \quad \beta_1 < -(90^\circ - \varphi)$$

La comparaison de ces quatre inégalités conduit à

$$-(90^\circ - \varphi) > \beta_1 > 90^\circ + \alpha$$

d'où l'on voit que la force Z ne peut s'exercer que dans l'angle SML′. Elle agit alors pour *empêcher* le corps de glisser vers le bas.

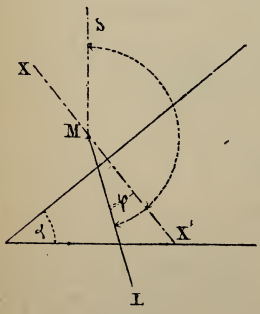


Fig. 416.

22. Cas particuliers. On peut examiner divers cas particuliers analogues à ceux de la discussion précédente. Voici les principaux :

I. $\alpha < \varphi$. La force Z varie avec les diverses valeurs de β_1.

1° $\beta_1 = -(90^\circ - \varphi)$, la force Z fait un angle φ avec la partie inférieure de la normale au plan; la formule donne $Z = \infty$; le démarrage est impossible, quelle que soit la force.

2° $\beta_1 = 0$, la force s'exerce suivant le plan; on a

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi}$$

3° $\beta_1 = \alpha$, la force est horizontale ; il vient

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)} = P \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)$$

4° $\beta_1 = 90^\circ$, la force Z est normale au plan; on a

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - 90)} = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}$$

5° $\beta_1 = 90 + \alpha$, la force est verticale; on a

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - 90^\circ - \alpha)} = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\varphi - \alpha)} = P$$

La force Z égale P, ce qui doit être.

6° *Minimum de* Z. Pour quel angle β_1 l'effort à développer est-il minimum? Le minimum de Z par rapport à β_1 a lieu quand on a

$$\cos(\varphi - \beta_1) = 1 \quad \text{ou} \quad \beta_1 = \varphi$$

On peut remarquer que la force est, dans ce cas encore, perpendiculaire à celle qui produit le coincement.

II. $\alpha > \varphi$. Si l'on remarque que la force ne peut être située que dans l'angle SML (fig. 416), les cas particuliers principaux pour $\alpha > \varphi$ sont les suivants :

1° $\beta_1 = -(90^\circ - \alpha)$, $Z = \infty$, voir ci-dessus.

2° $\beta_1 = -90^\circ$, Z appuie le corps sur le plan; on a

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi + 90^\circ)} = P \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \varphi}$$

3° $\beta_1 = (180^\circ - \alpha)$, c'est-à-dire que la force est horizontale et dans le sens de la montée du plan; on a

$$Z = \frac{P \sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi + 180^\circ - \alpha)} = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{-\cos(\varphi - \alpha)} = P \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

résultat analogue au 3° de $\alpha < \varphi$.

4° $\beta_1 = -(180^\circ)$, la force est suivant le plan; alors

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi + 180)} = P \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

résultat analogue au 2°.

5° $\beta = -(270^\circ - \alpha)$ ou $90^\circ + \alpha$, la force est verticale; c'est le même cas que le 5° de $\alpha < \varphi$.

6° *Minimum de* Z.

Il a lieu pour $\cos(\varphi - \beta_1) = -1$, car $\sin(\varphi - \alpha)$ est négatif; d'où

$$\varphi - \beta_1 = 180^\circ \quad \text{et} \quad \beta_1 = -(180^\circ - \varphi)$$

La direction pour laquelle Z sera minimum sera donc celle fournie par la perpendiculaire à la droite ML qui détermine l'angle de frottement.

III. Étude géométrique de la question.

23. On peut obtenir les divers résultats précédents par des considérations géométriques.

1° Ainsi, dans le cas du *mouvement ascendant*, il suffit, au moment du démarrage, que la résultante des forces effectives Z et P soit une force R faisant, avec la normale MX′, un angle égal à l'angle de frottement φ (fig. 417).

Cette simple remarque permet de trouver rapidement Z; on a, en effet,

$$\frac{Z}{P} = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin(\beta + 90^\circ - \varphi)}$$

d'où

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

résultat connu.

On a à faire les mêmes considérations pour le *mouvement descendant*, mais en remarquant qu'alors α est plus petit que φ.

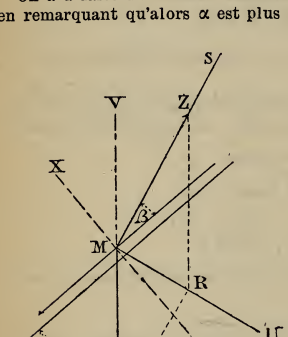


Fig. 417.

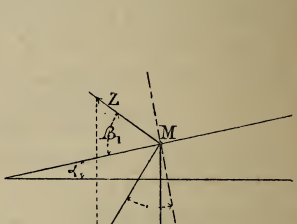


Fig. 418.

Il suffit (fig. 418) que la résultante R de Z et de P fasse un angle RMX égal à φ avec MX; on a

$$\frac{Z}{P} = \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\beta_1 + 90^\circ - \varphi)}$$

d'où

$$Z = P \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos(\beta_1 - \varphi)}$$

La discussion générale et les cas particuliers pourraient se faire par ces seules vues géométriques.

24. Remarque. Dans la *Mécanique appliquée*, ces considérations ont une grande valeur; beaucoup de questions de stabilité sont ainsi étudiées graphiquement; ce procédé fournit des résultats d'une manière simple et parlante.

25. Discussion. Discutons, par exemple, le cas du démarrage vers le haut, lorsque α est quelconque.

On obtient Z par une construction graphique, en faisant l'angle φ avec la normale en M, menant PR parallèle à MS, puis RZ verticale; on trouve MZ pour la grandeur de la force à employer (fig. 417).

On trouvera une valeur pour Z, si la construction du parallélogramme PRZM est possible, ce qui exige que la direction de Z soit comprise dans l'angle VMU, c'est-à-dire que β ne varie qu'entre $90^\circ - \alpha$ et $-(90^\circ - \varphi)$, résultat conforme à celui que nous a donné la discussion algébrique.

Si la force Z devait avoir la direction MU, elle serait infinie, il y a *arc-boutement;* à fortiori si cette force agissait dans l'angle UMX'.

26. Cas particuliers. En reprenant les cas particuliers de la discussion algébrique, on obtiendrait graphiquement les diverses valeurs de Z, et la considération des figures permettrait de donner l'expression algébrique de Z. On fera bien de s'exercer au rapprochement des deux discussions.

Minimum de Z. Le parallélogramme MPRZ, dans lequel les directions MP, MR sont connues, donnera la plus petite valeur de Z, quand l'on aura PR ou MZ perpendiculaire à MU, ainsi que l'indique la fig. 419; mais alors $\beta = \varphi$: résultat trouvé précédemment.

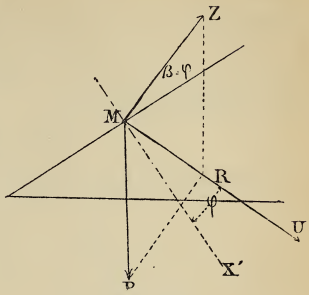


Fig. 419.

MOUVEMENT D'UN CORPS SUR UN PLAN

§ I. — Mouvement sur un plan horizontal en tenant compte du frottement.

27. Le mouvement d'un corps sur un plan donne naissance à une force de frottement * constante pendant toute la durée du mouvement, quelles que soient les variations de la vitesse (M., n° 329).

I. Mouvement uniforme.

28. Quand un corps se meut d'un mouvement uniforme sur un plan horizontal, la composante horizontale T de la force Z appliquée au corps est égale à la force de frottement F', à la condition toutefois que la composante normale U soit inférieure à P.

On a, en désignant par β l'angle ZMP,

$$U = Z \sin \beta, \quad T = Z \cos \beta$$

Désignons par N la réaction normale du plan; on a

$$F' = Nf'$$

et $$N = P - U = P - Z \sin \beta$$

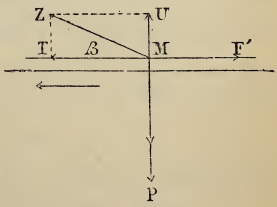


Fig. 420.

* Le coefficient de frottement pendant le mouvement sera désigné par f', l'angle de frottement par φ', la force de frottement par F'.

donc $$F' = f'(P - Z \sin \beta)$$

Mais $$F' = T$$

par suite, $$f'(P - Z \sin \beta) = Z \cos \beta$$

d'où $$Z = \frac{f' . P}{\cos \beta + f' \sin B}$$

et, en remplaçant f' par tg φ',

$$Z = \frac{P \sin \varphi'}{\cos(\beta - \varphi')}$$

Telle est la force qui entretiendra le mouvement uniforme.

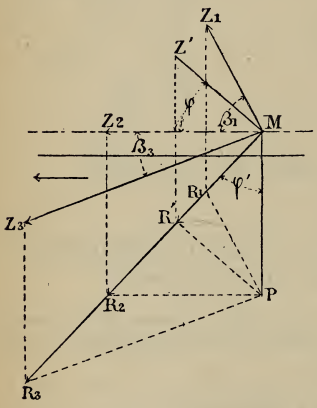


Fig. 421.

29. Solution géométrique. Pendant le mouvement, la résultante des forces effectives Z et P doit faire l'angle de frottement φ' avec la normale MP; ce qui permet par une construction géométrique de trouver Z.

30. Discussion. La discussion algébrique de la valeur de Z se ferait aisément (voir n° 17 et suiv.); nous donnerons seulement la discussion géométrique.

Il y a une solution tant que la construction du triangle MRP est possible, elle l'est toujours pour $\beta > 0$; et on s'aperçoit que Z a un minimum quand PR' est perpendiculaire à MR, alors l'angle de Z' avec l'horizontale est égal à φ'. Si $\beta = 0$, on voit aisément que $Z_2 = P$ tg $\varphi' = f'P$, ce que fournit aussi la formule.

Pour $\beta < 0$, la construction du triangle PMR n'est possible qu'autant que l'angle β est inférieur en valeur absolue à $90° - \varphi'$; la figure indique la construction pour un angle β_3; on voit que la force Z augmente à mesure qu'elle s'incline, et que pour $\beta = -(90° - \varphi')$ cette force serait infinie, il y aurait arc-boutement.

31. Remarque. On peut observer que de chaque côté de PR' correspondent des valeurs égales de Z. C'est aussi ce que montre la formule

$$Z = \frac{P \sin \varphi'}{\cos(\beta - \varphi')}$$

En y faisant $\beta = \varphi' \pm \alpha$, elle donne

$$Z = \frac{P \sin \varphi'}{\cos(\pm \alpha)} = \frac{P \sin \varphi'}{\cos \alpha}$$

II. Mouvement varié.

32. 1° *Corps lancé sur un plan horizontal avec une vitesse initiale* v_0.

Le mouvement du corps sera uniformément retardé, car la résistance au glissement est une force constante $F = f'P$ qui agit en sens inverse de la vitesse initiale. (M., n° 257.)

Si P est le poids du corps, m sa masse, on aura pour l'accélération négative de ce mouvement (M., n° 267)

$$j = -\frac{f'P}{m}$$

Or
$$m = \frac{P}{g}$$

dès lors
$$j = -f'g \qquad (1)$$

La vitesse sera (M., n° 257)

$$v = v_0 + jt = v_0 - f'gt \qquad (2)$$

et l'espace (M., n° 188)
$$e = v_0 t - \frac{1}{2} f'gt^2 \qquad (3)$$

Telles sont les trois formules qui permettront d'étudier le mouvement du corps sur le plan; celles du n° 197 du cours de mécanique n'en diffèrent que par la substitution de $f'g$ à g.

33. 2° *Le corps est soumis à l'action d'une force* Z *constante dirigée suivant le plan.*

Dans ce cas, la force qui produit le mouvement est $Z - f'P$; elle est constante, le mouvement est dès lors uniformément varié et a pour accélération

$$j = \frac{Z - f'P}{m}$$

Il ne reste qu'à introduire cette expression de j dans les formules du mouvement varié, pour avoir les formules des vitesses et des espaces.

§ II. — Mouvement sur le plan incliné.

Nous distinguerons trois cas :

1° Le corps est simplement posé sur le plan;

2° Le corps est lancé;

3° Le corps est soumis à l'action d'une force.

1° Le corps est simplement posé sur le plan.

34. Pour que le mouvement soit possible, il faut que l'on ait $\alpha > \varphi'$.

Les forces qui agissent sur le corps sont le poids P et la force de frottement F'.

Le seul mouvement possible étant le mouvement suivant le plan, le corps

peut être considéré comme soumis à l'action de la force de frottement F′ et de la composante T du poids P.

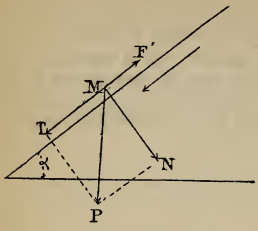


Fig. 422.

Si l'on désigne par j l'accélération dans ce mouvement, m étant la masse du corps (M., n° 267), on a

$$m = \frac{T - F'}{j} \qquad (1)$$

Or $\quad m = \frac{P}{g}, \quad T = P \sin \alpha,$

$$F' = f'N = f'P \cos \alpha$$

d'où

$$T - F' = P \sin \alpha - f'P \cos \alpha = P(\sin \alpha - f' \cos \alpha$$

On tire de (1) $j = g.(\sin \alpha - f' \cos \alpha)$

$$j = g . \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'}$$

l'accélération j *étant constante, le mouvement est uniformément accéléré.*

Si l'on suppose $\varphi' = 0$, on a $j = g \sin \alpha$, résultat bien connu; on voit par là que le frottement diminue l'accélération.

35. Remarques. I. Si $\alpha = \varphi'$, on a $j = 0$.

En sorte que si un corps est simplement posé sur un plan incliné pour lequel $\alpha = \varphi'$, il reste en équilibre, et s'il a un mouvement antérieur, son mouvement est uniforme. On obtient ainsi *le plan d'équilibre* parfois recherché dans les mines pour le roulage des bennes pleines.

II. Les formules de la vitesse et de l'espace sont celles du mouvement uniformément accéléré sans vitesse initiale.

$$v = g \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'} \qquad (2)$$

$$e = g \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'} \frac{t^2}{2} \qquad (3)$$

2° Le corps est lancé.

Il peut être lancé vers le haut ou vers le bas.

36. *Corps lancé vers le bas.* Soit v_0 la vitesse initiale; *les forces étant les mêmes* que dans le premier cas, l'accélération est la même, puisqu'elle ne dépend que des forces agissant sur le corps et non de la vitesse antérieurement acquise; on a

$$j = g \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'}$$

Mais ici il y a lieu de faire trois hypothèses.

1° $\alpha > \varphi'$. L'accélération j est positive, le mouvement est uniformément accéléré, et l'on obtient les formules

$$v = v_0 + g \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'} t, \quad e = v_0 t + g \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'} \frac{t^2}{2}$$

2° $\alpha = \varphi'$. Alors $j = 0$, et le mouvement est uniforme avec la vitesse v_0.

3° $\alpha < \varphi'$. L'accélération j est négative, car $\sin(\alpha - \varphi')$ est négatif; le mouvement est uniformément retardé, et, en rendant les sinus positifs, on a les formules

$$v = v_0 - g\frac{\sin(\varphi' - \alpha)}{\cos\varphi'}t, \quad e = v_0 t - g\frac{\sin(\varphi' - \alpha)}{\cos\varphi'}\frac{t^2}{2}$$

On peut rechercher avec ces relations à quel moment le corps s'arrête et quel espace il a parcouru.

Ainsi la vitesse est nulle au bout du temps t donné par la relation

$$t = \frac{v_0}{g}\frac{\cos\varphi'}{\sin(\varphi' - \alpha)}$$

et l'espace parcouru jusqu'au moment de l'arrêt est

$$e = \frac{v_0^2}{2g}\frac{\cos\varphi'}{\sin(\varphi' - \alpha)}$$

37. *Corps lancé vers le haut.* Si le corps est lancé vers le haut, la force du frottement est dirigée vers le bas et s'ajoute à la composante tangentielle du poids pour ralentir le mouvement. Le mouvement est uniformément retardé. En procédant comme précédemment, on trouve que l'accélération est

$$j = -g\frac{\sin(\alpha + \varphi')}{\cos\varphi'}$$

Les équations du mouvement sont

$$v = v_0 - g\frac{\sin(\alpha + \varphi')}{\cos\varphi'}t, \quad e = v_0 t - g\frac{\sin(\alpha + \varphi')}{\cos\varphi'}\frac{t^2}{2}$$

Le corps monte et son mouvement cesse lorsque $v = o$, ce qui permet de trouver la durée de cette ascension; elle est

$$t = \frac{v_0}{g}\frac{\cos\varphi'}{\sin(\alpha + \varphi')}$$

et le chemin parcouru est

$$e = \frac{v_0^2}{2g}\frac{\cos\varphi'}{\sin(\alpha + \varphi')} \tag{1}$$

38. A partir du moment où l'ascension cesse, le mobile peut se trouver dans deux cas différents.

1° Si l'on a $\alpha \leqq \varphi$, φ étant l'angle de frottement *au départ*, le repos du mobile subsiste.

2° Si, au contraire, on a $\alpha > \varphi$, le corps redescend; il se comporte absolument comme *un corps simplement posé sur le plan*, et les formules trouvées (n° 34) sont celles qui conviennent à son mouvement.

39. Remarques. I. Il faut observer que les lois du mouvement ascendant et du mouvement descendant ne sont pas données dans le même système de formules, ainsi que cela a lieu si on ne tient pas compte du frottement.

II. On sait qu'en chute libre, ou sur un plan incliné, abstraction faite du frottement, un corps reprend la même vitesse quand il repasse au même point; il n'en est pas de même si l'on tient compte du frottement.

Cherchons, en effet, quelle est la vitesse du corps quand il est revenu à son point de départ, où il possédait la vitesse v_0. Le corps est monté de la quantité

(n° 37) $$e = \frac{v_0^2}{2g} \frac{\cos \varphi'}{\sin (\alpha + \varphi')}$$

Lorsque le corps descend, l'espace parcouru est donné par la formule (n° 35, II)

$$e = \frac{g \sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'} \frac{t^2}{2}$$

En égalant ces deux valeurs de e, on obtient

$$\frac{v_0^2}{2g} \frac{\cos \varphi'}{\sin (\alpha + \varphi')} = g \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'} \frac{t^2}{2}$$

d'où l'on tire

$$t^2 = \frac{v_0^2}{g^2} \frac{\cos^2 \varphi'}{\sin (\alpha + \varphi') \sin (\alpha - \varphi')}$$

Cette valeur de t mise dans l'équation

$$v = g \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'} t \qquad \text{(n° 35, II)}$$

donne la vitesse que possède le mobile en revenant à son point de départ; on obtient après simplification

$$v^2 = v_0^2 \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\sin (\alpha + \varphi')}$$

Ce qui montre que la vitesse a diminué par le fait du frottement; et on le conçoit aisément, le frottement agit comme résistance dans les deux mouvements.

On voit aussi que si $\varphi' = 0$, il vient $v^2 = v_0^2$.

3° Le corps est soumis à l'action d'une force.

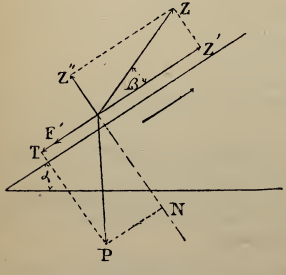


Fig. 423.

40. Soit Z la force dont la direction fait un angle β avec le plan incliné, et soit P le poids du corps.

La pression normale au plan est $N - Z''$ ou $P \cos \alpha - Z \sin \beta$; elle doit toujours être positive; la force de frottement sera $F' = f' (P \cos \alpha - Z \sin \beta)$.

Il y a à distinguer si le corps monte ou s'il descend, puis à trouver les conditions pour qu'il reste au repos.

41. *Le corps monte.* Dans ce cas, les forces dirigées suivant le plan dans le sens du mouvement ont pour somme algébrique

$$Z' - T - F'$$

ou $$Z \cos \beta - P \sin \alpha - F' \qquad (1)$$

Cette somme doit être supérieure à 0.

L'accélération sera cette somme divisée par m; soit

$$j = \frac{Z \cos \beta - P \sin \alpha - f' (P \cos \alpha - Z \sin \beta)}{m}$$

d'où
$$j = \frac{Z (\cos \beta + f' \sin \beta) - P (\sin \alpha + f' \cos \alpha)}{m}$$

ou
$$j = \frac{Z \cos (\beta - \varphi') - P \sin (\alpha + \varphi')}{m \cos \varphi'}$$

Connaissant l'accélération, on a aisément les formules de la vitesse et de l'espace.

42. *Le corps descend.* La force de frottement est alors dirigée vers le haut; la force qui produit le mouvement est la somme

$$P \sin \alpha - Z \cos \beta - F' = \frac{P \sin (\alpha - \varphi') - Z \cos (\beta - \varphi')}{\cos \varphi'} \qquad (2)$$

elle doit être supérieure à 0.

On obtient l'accélération j en divisant par m.

43. Remarque. Si pour une force Z donnée, les deux sommes (1) et (2) sont toutes deux négatives, le mouvement n'est possible ni vers le haut ni vers le bas; le corps reste au repos.

On tire alors de (1) $\quad P \sin \alpha + F' > Z \cos B$

de (2) $\quad Z \cos \beta > P \sin \alpha - F'$

soit la double inégalité

$$P \sin \alpha + F' > Z \cos \beta > P \sin \alpha - F'$$

On peut encore exprimer autrement ces conditions.

L'inégalité (1) donne $\quad P \sin (\alpha + \varphi') > Z \cos (\beta - \varphi')$

et (2) $\quad P \sin (\alpha - \varphi') < Z \cos (\beta + \varphi')$

Telles sont les conditions pour qu'il n'y ait pas mouvement sous l'action de la force Z; il faut encore y joindre la condition que la réaction normale soit positive, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$P \cos \alpha - Z \sin \beta > 0$$

TRAVAIL ABSORBÉ PAR LE FROTTEMENT D'UN CORPS SUR UN PLAN

Soit à calculer le travail absorbé par le frottement d'un corps de poids P qui parcourt une distance l.

1° Sur un plan horizontal.

2° Sur un plan incliné.

Le travail absorbé par le frottement s'obtient en multipliant la force de frottement F' par l'espace parcouru.

§ I. — Le plan est horizontal.

44. *Le corps se déplace sous l'action d'une force horizontale.*

On a alors $$\mathcal{T}F' = F' \times l = f'Pl$$
$$\mathcal{T}F' = f'Pl$$

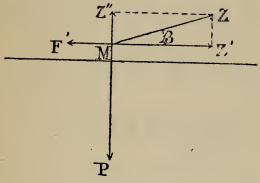


Fig. 424.

45. *La force Z est quelconque.*

La pression normale est, en désignant par β l'angle de la force avec le plan,

$$P - Z'' \quad \text{ou} \quad P - Z \sin \beta$$

La force de frottement

$$F' = f' (P - Z \sin \beta)$$

Le travail est donc

$$\mathcal{T}F' = f'l (P - Z \sin \beta)$$

46. Remarques. I. *Dans le cas du mouvement uniforme,* on a $Z' = F'$; d'où $$f' (P - Z \sin \beta) = Z \cos \beta$$

On en tire $$Z = \frac{P \sin \varphi'}{\cos (\beta - \varphi')}$$

alors $$\mathcal{T}F' = Pf'l . \frac{\cos \beta \cos \varphi'}{\cos (\beta - \varphi')} \qquad (1)$$

Si $\beta = 0$, on a $\mathcal{T}F' = Pf'l$, résultat trouvé au n° 44.

II. L'expression (1) augmente quand sin β diminue. Le travail est supérieur à $Pf'l$ alors que la force Z est au-dessous de l'horizontale, car sin β devient négatif; on conçoit ce résultat en remarquant qu'alors la pression normale augmentant, le frottement augmente pareillement.

§ II. — Le plan est incliné.

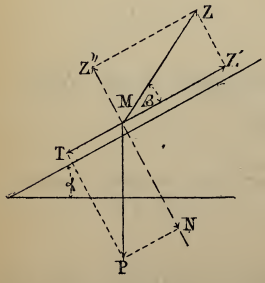


Fig. 425.

47. L'expression générale de la résultante normale des forces appliquées au corps est

$$N - Z'' \quad \text{ou} \quad P \cos \alpha - Z \sin \beta$$

La force de frottement est

$$F' = f' (P \cos \alpha - Z \sin \beta)$$

et le travail

$$\mathcal{T}F' = f'l (P \cos \alpha - Z \sin \beta)$$

On peut se proposer de rechercher ce que devient l'expression de ce travail pour les divers mouvements que peut prendre le corps. Ainsi on aurait à considérer les cas étudiés précédemment. Nous n'en prendrons qu'un seul.

48. *Corps cheminant sous la seule action de la pesanteur.*

On a alors $\alpha \geqq \varphi'$; la force de frottement est

$$F' = f'P \cos \alpha$$

et son travail

$$\mathcal{T}F = f'lP \cos \alpha$$

De plus, si le mouvement du corps est uniforme, $\alpha = \varphi'$; alors

$$\mathcal{T}F' = \operatorname{tg} \varphi' lP \cos \varphi' = Pl \sin \varphi' \quad \text{ou } Pl \sin \alpha$$

49. **Rendement du plan incliné.** Supposons un corps P se mouvant uniformément vers le haut sous l'action d'une force Z.

On a (n° 18)

$$Z = P \frac{\sin (\alpha + \varphi')}{\cos (\varphi' - \beta)}$$

Le *travail moteur*, pour une longueur l parcourue suivant le plan, est

$$\mathcal{T}m = \mathcal{T}z = Zl \cos \beta = Pl \cos \beta \frac{\sin (\alpha + \varphi')}{\cos (\varphi' - \beta)}$$

Le poids s'est élevé de $l \sin \alpha$, le *travail utile* est

$$\mathcal{T}u = Pl \sin \alpha$$

et le rendement

$$R = \frac{\mathcal{T}u}{\mathcal{T}m} = \frac{Pl \sin \alpha}{Pl \cos \beta \dfrac{\sin (\alpha + \varphi')}{\cos (\varphi' - \beta)}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \times \frac{\cos (\varphi' - \beta)}{\sin (\alpha + \varphi')}$$

50. **Discussion.** Si $\varphi' = 0$, on a $R = 1$; le frottement a donc pour but de diminuer le rendement.

On a un *rendement nul* pour $\alpha = 0$ ou pour un plan horizontal, et en effet, le corps ne se déplaçant pas verticalement, il ne peut y avoir de travail utile.

51. **Cas particuliers.** Si la force Z est parallèle à la base du plan incliné, on a $\beta = 180° - \alpha$, et R devient $R = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi')}$.

Le rendement s'annule pour $\alpha = 0$ ou pour $\alpha = 90° - \varphi'$; dans l'intervalle, pour une inclinaison définie, il doit donc passer par un maximum que nous allons trouver *.

On a

$$R = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi'}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi'}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \dfrac{\operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

Posons

$$\operatorname{tg} \varphi' = f' \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha' = x$$

On a

$$R = \frac{1 - f'x}{1 + \dfrac{f'}{x}}$$

d'où

$$f'x^2 - x(1 - R) + Rf' = 0$$

On en tire

$$x = \frac{1 - R \pm \sqrt{(1 - R)^2 - 4Rf'^2}}{2f'}$$

---

* Ce maximum peut s'obtenir rapidement par la méthode que nous employons dans la vis (n° 82), mais la marche suivie n'est pas très naturelle; celle que nous donnons ici, quoique plus longue, semble se présenter plus facilement à l'esprit.

Pour que x soit réel, on doit avoir

$$(1-R)^2 - 4Rf'^2 \geqq 0$$

d'où

$$R^2 - 2R\,(1+2f'^2) + 1 \geqq 0$$

Les racines de ce trinôme sont

$$R = 1 + 2f'^2 \pm \sqrt{(1+2f'^2)^2 - 1} = 1 + 2f'^2 \pm 2f'\sqrt{1+f'^2}$$

la plus petite racine est un maximum ; la valeur correspondante x est

$$x = \frac{1-R}{2f'} = -f' + \sqrt{1+f'^2}$$

On a dès lors

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\varphi' + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi'} = \frac{1}{\cos\varphi'}(1-\sin\varphi')$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\varphi'}(1-\sin\varphi')$$

ce qui devient successivement

$$\sin\alpha\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\alpha = \cos\alpha$$

ou

$$\sin(\varphi'+\alpha) = \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

d'où enfin

$$\varphi' + \alpha = 90^\circ - \alpha$$

ou

$$\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi'}{2}$$

Telle est la valeur de l'angle pour lequel le rendement est maximum.

52. On peut vérifier l'égalité du travail moteur et du travail résistant pour un corps qui se meut uniformément sur un plan incliné, sous l'action d'une vitesse initiale, de la pesanteur et du frottement.

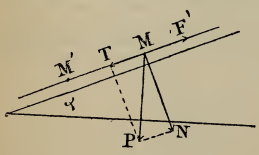


Fig. 426.

Le mouvement étant uniforme, il faut que la composante T du poids égale la force du frottement F'.

On en déduit la relation $\operatorname{tg}\alpha = f'$.

Considérons un chemin parcouru MM', la puissance est T, la résistance F'.

Le travail moteur est $T \times MM'$.

Le travail résistant $F' \times MM'$.

Donc le travail moteur égale le travail résistant.

FROTTEMENT DES TOURILLONS

53. Question préliminaire. Cherchons en quel point de l'*œil*, dans lequel se meut un tourillon, appuie ce tourillon, et quelles sont les conséquences des particularités qui peuvent se présenter sur le travail absorbé par le frottement.

Entre le tourillon et l'*œil* ou *coussinet*, il existe toujours un jeu ; au repos,

sous la seule action du poids, le contact fait par une génératrice C située dans le plan vertical des deux centres; mais que se passe-t-il dans le mouvement?

Soit DD le couple nécessaire pour faire tourner uniformément le tourillon; l'expérience nous apprend que le tourillon *roule* sur le coussinet en un point C′ (fig. 427), et qu'ensuite il *tourne* sur ce point.

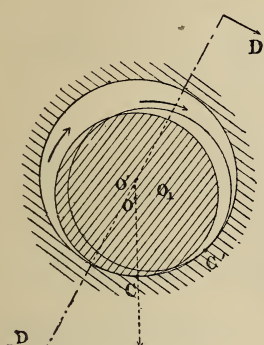


Fig. 427.

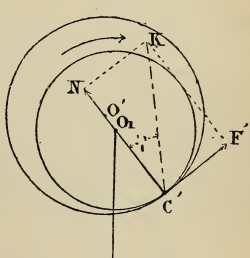


Fig. 428.

54. Déterminons ce point C′. Il y a en C′ (fig. 428) une force de frottement F′ en sens contraire du mouvement et une réaction normale N.

Les forces qui sollicitent le tourillon sont le couple DD′, le poids P, la réaction normale N et la force de frottement F′; le mouvement étant uniforme, la somme des moments par rapport au point O est nulle; il faut dès lors que la résultante des deux forces N et F′ soit une force K égale et de sens contraire à P, afin que K et P constituent un couple, car seul un couple peut détruire un autre couple DD′.

Or, dans le triangle NKC′, on a

$$\operatorname{tg} NC'K = \frac{NK}{NC'} = \frac{F'}{N} = \frac{Nf'}{N} = f' = \operatorname{tg} \varphi'$$

d'où

$$NC'K = \varphi'$$

Si l'on remarque que l'angle $PO_1C' = NC'K = \varphi'$, on en déduit une construction pour trouver C′ : par le centre O_1, on mène une droite dans la *direction de la résultante de toutes les forces qui sollicitent le système tournant* *; puis on fait avec cette ligne un angle au centre égal à φ', il détermine le point C′.

55. Cette particularité *du déplacement du point de contact* a une conséquence sur le travail absorbé par le frottement.

---

* Dans le cas pris pour exemple, cette résultante est verticale parce que le tourillon est supposé soumis à l'action de poids seulement; mais généralement les actions qui agissent sur lui ne sont pas verticales: elles peuvent avoir des directions obliques (voir 57).

Le triangle NC'K fournit les relations

$$K = \sqrt{N^2 + F'^2} = \sqrt{N^2 + f'N^2} = N\sqrt{1 + f'^2}$$

d'où $$F' = Nf' = K\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = P.\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

Telle est la force de frottement, elle est sensiblement Pf'.

56. Le travail absorbé par le frottement est, pour un tour entier,

$$T = F' \times 2\pi r = \frac{Pf'}{\sqrt{1 + f'^2}} \times 2\pi r$$

ou approximativement $$T = Pf' \times 2\pi r$$

La conséquence du relèvement du point C' sur le travail du frottement est de le diminuer dans le rapport de 1 à $\sqrt{1 + f'^2}$; mais pour des matières dures bien graissées, on a $f' = 0{,}08$; dès lors $1 + f'^2 = 1{,}0064$ et $\sqrt{1 + f'^2} = 1{,}0032$; la diminution du travail est donc insensible.

57. Remarque. Nous prendrons toujours $2Pf'\pi r$ pour le travail absorbé dans un tour; on voit que ce travail est d'autant plus petit que r est plus petit, ce qui indique qu'il faut faire les tourillons très résistants, afin de leur donner le moindre diamètre possible.

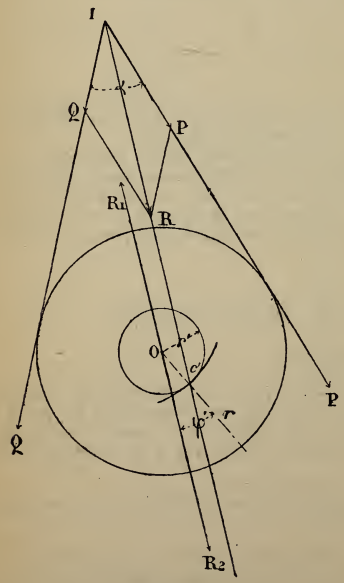


Fig. 429.

58. *Équilibre de la poulie fixe, en tenant compte du frottement.*

Supposons la poulie en mouvement uniforme.

Soient P la puissance et Q la résistance. Ces forces se rencontrent en I, où nous les composons en une résultante R.

Appliquons en O deux forces R_1, R_2 égales et parallèles à R.

Les deux forces R et R_1 déterminent un couple qui fait tourner la poulie; l'autre force R_2 n'est autre que la résultante P dont il est question au renvoi du n° 54.

Le point C' est le point de contact; l'angle $R_2OC' = \varphi'$. En ce point C' est une force de frottement F' dont l'expression est

$$F' = f'.\frac{K}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

Maintenant on peut raisonner de deux manières; on peut dire : Le couple R, R_1 équilibre la force du frottement F'; or, le moment de R_1 étant nul, le moment du couple se réduit à celui de R ou à ceux de ses deux composantes P et Q; ou bien on peut dire d'une manière plus directe : Les forces qui sollicitent la poulie sont P,

Q, P′ et la réaction normale et C; en prenant les moments par rapport au point de rotation O, celui de la réaction disparaît, en sorte que dans les deux cas, il reste : moment de F′ = somme des moments de P et de Q.

Si r désigne le rayon de la poulie, r' celui du tourillon, on a dès lors

$$Pr - Qr = \frac{f'R}{\sqrt{1+f'^2}}\, r'$$

Si on désigne par α l'angle des deux brins de la corde, on a

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$$

ou

$$P = Q + \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{r'}{r} \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \qquad (1)$$

D'où l'on voit que P est supérieur à Q.

59. Pour avoir la valeur de P, le mieux est de procéder par *approximations successives* comme il suit :

La quantité $\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \cdot \frac{r'}{r}$ est très petite, car f' est petit et r' une petite fraction de r; de plus P est très peu différent de Q, dès lors on voit qu'en prenant pour première valeur de P

$$P_1 = Q + \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \cdot \frac{r'}{r} \sqrt{Q^2 + Q^2 + 2Q^2 \cos \alpha}$$

c'est-à-dire la valeur vraie où l'on remplace sous le radical P par Q, on a une valeur P_1 très approchée; elle peut s'écrire

$$P_1 = Q\left(1 + \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{r'}{r} \sqrt{2(1+\cos\alpha)}\right) = 2Q\left(1 + \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \frac{r'}{r} \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

Cette première valeur mise dans la formule (1) fournira une seconde valeur P^2 plus approchée, dont on pourra se servir pour en avoir une troisième, et ainsi de suite.

60. *Travail nécessaire pour entretenir le mouvement uniforme d'une voiture sur un plan horizontal.*

Poids du véhicule V.
Poids de la charge C.
Poids d'une roue q.
Rayon des roues R, des tourillons r.
Coefficients de frottement f'' pour le roulement, f' pour le frottement de glissement.

Considérons une voiture à deux roues, supposons son centre de gravité G sur la verticale de l'essieu; soit T l'effort de traction pour entretenir le mouvement uniforme, nous allons déterminer cet effort.

En O, appliquons deux forces horizontales *

$$\frac{T_2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{T_1}{2} \quad \text{égales à} \quad \frac{T}{2} \qquad (1)$$

---

* Il y a la moitié de la traction pour chaque roue.

Les deux forces $\frac{T}{2}$ et $\frac{T_2}{2}$ constituent un couple; il reste $\frac{T_1}{2}$.

Au tourillon est appliquée la force verticale $\frac{V+C}{2}$ (car il y a deux roues) et la force $\frac{T_1}{2}$; leur résultante est

$$P=\sqrt{\left(\frac{T_1}{2}\right)^2+\left(\frac{V+C}{2}\right)^2}$$

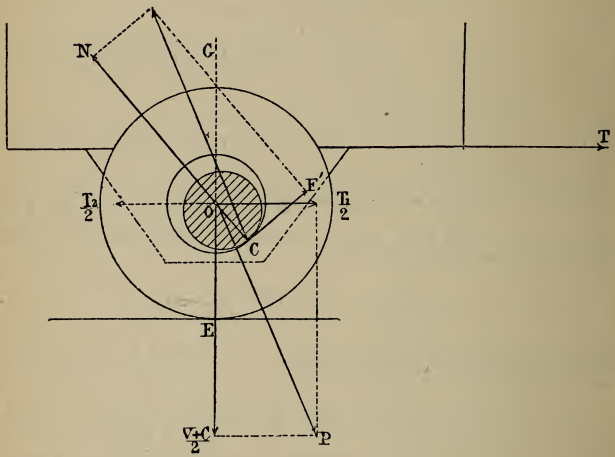


Fig. 430.

La charge sur le sol en E est $\left(\frac{V+C}{2}\right)+q$; la résistance au roulement est, par suite (M., n° 342),

$$\frac{f'}{R}\left(\frac{V+C}{2}+q\right)$$

La force du frottement est (n° 55)

$$P.\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}=\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\sqrt{\left(\frac{T_1}{2}\right)^2+\left(\frac{V+C}{2}\right)^2}$$

Supposons maintenant que la roue ait tourné d'un mouvement uniforme d'un angle α; la somme des travaux de toutes les forces dans ce déplacement devra être nulle, car dans une machine en équilibre le travail moteur égale le travail résistant.

Le point E se sera déplacé de $R\alpha$; il en sera de même de la voiture horizontalement; et C' se sera déplacé de $r\alpha$.

On aura

$$\frac{T}{2}.R\alpha-\frac{f'}{R}\left(\frac{V+C}{2}+q\right)\times R\alpha-\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\sqrt{\left(\frac{T_1}{2}\right)^2+\left(\frac{V+C}{2}\right)^2}\times\alpha r=0$$

d'où l'on déduit, en remarquant que $T = T_1$,

$$T = \frac{2}{R}\left[f''\left(\frac{V+C}{2}+q\right)+\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\,r\sqrt{\left(\frac{T_1}{2}\right)^2+\left(\frac{V+C}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{R}\left(f'(V+C+2q)+\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\,r\sqrt{T^2+(V+C)^2}\right)$$

En négligeant T^2 sous le radical, ce que l'on peut faire approximativement, car l'effort de traction T est petit par rapport à $(V+C)$, on a une valeur approchée de T :

$$T = (V+C+2q)\left(\frac{f''}{R}+f'\cdot\frac{r}{R}\cdot\frac{V+C}{V+C+2q}\right)$$

61. Remarque. La seconde parenthèse renferme deux parties, dont la première $\frac{f''}{R}$ est indépendante des poids. La considération de la valeur de cette parenthèse conduit aux divers types de véhicule; elle se nomme *coefficient de traction*, et on la représente par A.

On a $$T = (V+C+2q)\,A = A \times Q$$

Q étant le poids total de la voiture.

62. Travail pour entretenir le mouvement uniforme.

Ce travail sera celui de la traction.

On a Travail par tour $= 2\pi R\,(V+C+2q)\left(\frac{f''}{R}+f'\frac{r}{R}\,\frac{V+C}{V+C+2q}\right)$

Or Q est le poids total de la voiture; si Q est le poids non roulant, c'est-à-dire Q moins les roues ou $(V+C)$, on a

$$\text{Travail par tour} = 2\pi Q\,.\left(f''+f'r\frac{Q'}{Q}\right)$$

Le travail par *mètre d'avancement* est

$$\text{Travail par mètre} = \frac{Q}{R}\left(f''+f'r\frac{Q'}{Q}\right) \qquad (1)$$

63. Remarque. Cette dernière expression montre qu'une voiture est d'autant plus facile à mouvoir que R est plus grand; ceci explique l'emploi des grandes roues de certaines voitures destinées à porter de lourdes charges; les omnibus, à cause de leurs grandes roues, se tirent plus aisément d'embarras que les tramways à petites roues, dans un chemin boueux ou couvert de neige; souvent ceux-ci sont arrêtés.

On voit encore par la formule (1) que plus le rayon r des tourillons est petit, plus le travail absorbé est faible; c'est pour cela que les affûts de canon, par exemple, sont faits en matière très résistante, afin de leur donner le plus petit diamètre possible compatible avec la solidité.

Transformation d'un traîneau en voiture.

On peut montrer qu'il y a économie de travail en transformant un traîneau en voiture.

64. Traîneau. Le cheval est attelé à une sorte de brancard fixé vers le milieu

de la partie glissante ou patin, ou bien il agit directement sur le traîneau au moyen d'une corde attachée à l'avant.

Nous avons vu qu'on se place dans les meilleures conditions quand la direction de la corde ou du brancard fait avec le plan horizontal un angle égal à l'angle de frottement φ'. Sur un sol glacé, où le frottement est faible, le point d'attache du brancard devra être relevé, ou bien la corde sera prise très longue.

Le travail dépensé par le cheval, abstraction faite de la fatigue que lui occasionne la pression de la sellette, est celui que fait naître le frottement. Pour 1 mètre, il est

$$T = Q \times f'$$

Q étant le poids total.

65. Traîneau à voiture. Nous avons trouvé précédemment (n° 62) que le travail dans le déplacement d'une voiture est par mètre

$$T' = \frac{Q}{R}\left(f'' + f'r\frac{Q'}{Q}\right) = \frac{Qf''}{R} + f'\frac{r}{R}Q'$$

En prenant $Q' = Q$, ce qui est sensiblement vrai, on a

$$T' = Qf'\frac{r}{R} + f''\frac{Q}{R} \qquad (1)$$

La quantité $f''\dfrac{Q}{R}$ (M., n° 342) est la résistance au roulement, elle est très faible relativement à Qf', résistance au glissement; quant à $Qf'\dfrac{r}{R}$, c'est une quantité qui n'est qu'une très minime fraction de Qf', car r est petit relativement à R; il s'ensuit donc que T' est notablement inférieur à T, et qu'il y a un réel avantage à transformer les traîneaux en voitures.

66. Poulie à frottement réduit. L'axe d'une poulie A repose sur les circonférences de quatre roues ou galets B. Lorsque la poulie est en mouvement, son axe, en tournant, imprime aux galets un mouvement très lent.

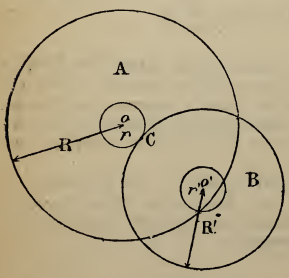


Fig. 431.

Le travail absorbé par le frottement, pour chaque tour de la poulie, est diminué par l'emploi de ce système.

Soient, en effet, R et R' les rayons de la poulie et des galets, r et r' ceux de leurs tourillons, P la charge que supporteront les tourillons, Q le poids d'un galet.

Pour un tour entier de la poulie, son frottement dans un tourillon absorbe un travail $T = f'P \times 2\pi r$.

Dans la disposition actuelle, ce frottement est remplacé par celui des tourillons des galets; or, pour un tour de la poulie, la circonférence ne tourne que d'un arc dont la longueur est celle de la circonférence $2\pi r$ des tourillons de la poulie; par suite, les tourillons des galets n'ont avancé que d'un arc égal à

$$2\pi r\frac{r'}{R'}$$

Le poids total de l'appareil est $P + 4q$; le travail du frottement est, par suite,

$$T' = f'(P + 4q)\,2\pi r\,\frac{r'}{R'}$$

On a dès lors

$$\frac{T'}{T} = \frac{f'(P + 4q)\,2\pi r\,\frac{r'}{R'}}{f'P \times 2\pi r} = \frac{P + 4q}{P}\,\frac{r'}{R'}$$

A la vérité, le rapport $\frac{P + 4q}{P}$ est supérieur à l'unité, mais il en diffère peu pour une charge P importante (comme serait une cloche, par exemple, *cloche de Metz où se trouve un système anologue*), et d'ailleurs, si la charge est faible, on fait les galets très légers (*machine d'Atwood*). Si ce rapport n'est pas voisin de 1, il est au plus égal à 2 ou 3 unités. Le rapport $\frac{r'}{R'}$ peut être fait assez petit pour que $\frac{T'}{T}$ soit une faible fraction de l'unité; on voit que généralement le travail absorbé par le frottement sera diminué.

BARDAGE D'UNE PIERRE

Considérons une pierre; l'effort pour la faire glisser sera, si $f' = 0{,}60$, par exemple,

$$T = 0{,}60\,P$$

On facilite son déplacement en employant des rouleaux, c'est l'opération du *bardage*.

67. Chemin parcouru par la pierre. On peut d'abord établir que *la pierre chemi ne deux fois plus vite que le rouleau.*

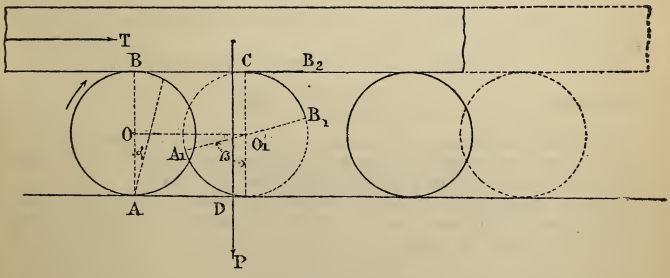


Fig. 432.

On y arrive de deux manières :

Pour un déplacement élémentaire, on a une rotation d'un angle α autour du point A; dans cette rotation, B se déplace d'une quantité double du déplace-

ment de O. On peut encore dire : Considérons le rouleau O en O_1 ; les points A et B du rouleau sont venus en A_1 et B_1 ; or arc $A_1D = AD = OO_1$ et arc $B_1C = BC = OO_1$; le point B de la pierre et le point B du rouleau se séparent et sont toujours à la même distance du nouveau point de contact ; donc, quand le point de contact sera C, le point B de la pierre sera en B_2, et l'on aura $CB_2 = CB_1$, d'où $CB_2 = OO_1$; le déplacement de la pierre est donc $BB_2 = 2OO_1$, c'est-à-dire que la pierre va deux fois plus vite que le rouleau.

Lorsque le rouleau de rayon r aura fait un tour, la pierre se sera avancée de $4\pi r$.

68. Effort de traction. Soient P le poids de la pierre et p celui du rouleau. Le poids P se décompose en deux autres P', P'' sur chacun des rouleaux.

Soient f'' le coefficient de roulement sur le sol ou plutôt sur les *madriers* posés sur le sol, f_1'' sur la pierre. La pierre se transporte uniformément, la somme des travaux est nulle, et l'on a

$$\mathfrak{T} . T = \text{travaux du frottement}$$

Considérons un déplacement qui ait fait tourner les rouleaux d'un angle β.

On a $$OO_1 = A_1D = 2\pi r \times \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) = 2r\beta$$

$$\mathfrak{T}T = T . 2(2\beta r) = 4T . \beta r$$

Travail de frottement en $A = f''(P' + p)2\beta$

» » $B = f_1''(P')2\beta$

d'où Travail du frottement pour le 1er rouleau $= f''(P' + p)2\beta + f_1''(P')2\beta$

» » pour le 2e rouleau $= f''(P'' + p)2\beta + f_1''(P'')2\beta$

On a dès lors $$4T\beta r = f''(P + 2p)2\beta + f_1''(P)2\beta$$

d'où $$T = \frac{f''(P + 2p) + f_1''(P)}{2r}$$

et en négligeant le poids des rouleaux

$$T = P . \frac{f'' + f_1''}{d}$$

69. Remarque. On voit que T est inversement proportionnel au diamètre des rouleaux.

Exemple $P = 100K$, $f'' = f_1'' = 0{,}01$, $r = 0^m 10$

On obtient $$T = \frac{1}{10} P = 10 \text{ kilogr.}$$

Il ne faudra maintenant que 10 kilog., tout à l'heure il en fallait 60.

Les anciens employaient le *bardage;* les maçons en font un fréquent usage; de même les fondeurs pour traîner les moules dans les étuves.

Il est à remarquer qu'il faut au moins trois rouleaux pour opérer le bardage; au bout d'un certain chemin, le fardeau abandonne le premier rouleau, que l'on vient placer en avant.

COIN

70. Équilibre du coin en tenant compte du frottement.

Considérons un coin fendant une bûche et s'enfonçant uniformément sous l'action d'une force P ; supposons que le contact ait lieu symétriquement. Les deux lèvres de la fente exercent des pressions N et N′ égales par raison de symétrie, et qui donnent naissance à des forces de frottement fN, f'N′ dirigées vers le haut.

L'équilibre dynamique ayant lieu, les forces projetées sur la ligne xx' donnent, en désignant par α le demi-angle du coin,

$$P - 2N \sin \alpha - 2f'N' \cos \alpha = 0$$

d'où

$$P = 2N (\sin \alpha + f' \cos \alpha) = 2N \frac{\sin (\alpha + \varphi')}{\cos \varphi'}$$

On en tire $$N = \frac{P \cos \varphi'}{2 \sin (\alpha + \varphi')}$$

Telle est la force qui sollicite une des moitiés de la bûche à s'écarter de l'autre.

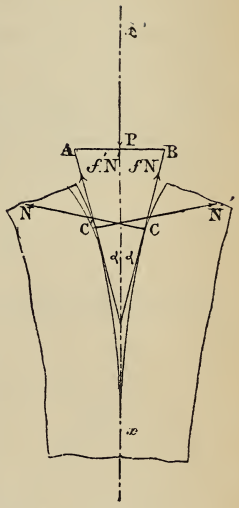


Fig. 433.

71. Influence du frottement. Si φ égale 0, on a $N = \frac{P}{2 \sin \alpha}$ (1) ; si φ a une valeur déterminée, cos φ est plus petit que 1 et $\sin (\alpha + \varphi') > \sin \alpha$, dès lors la force d'écartement prend une moindre valeur que (1). Le rôle du frottement est donc de diminuer l'effet du coin.

72. Influence de l'angle α. Si α tend vers 0, N tend vers $\frac{P}{2}$ cotg φ'. Plus α est petit, plus N est grand, le maximum de N est $\frac{P}{2}$ cotg φ'. Ceci explique pourquoi les haches, les ciseaux, en général les outils *coupants* du menuisier et du charpentier doivent être *aiguisés en long*, c'est-à-dire doivent avoir un biseau aigu.

73. Ce que devient le coin abandonné à lui-même.

Voyons ce qui se passe si nous enlevons la force P qui détermine l'équilibre.

Le coin reste ou il est expulsé.

Supposons que le coin soit expulsé, et désignons par Z la force qu'il faut appliquer sur la tête AB pour obtenir un mouvement ascensionnel uniforme. On obtient, en remarquant que les forces de frottement sont dirigées vers le bas,

$$-Z + 2N \sin \alpha - 2f'N \cos \alpha = 0$$

d'où $$Z = 2N (\sin \alpha - f' \cos \alpha) = 2N \frac{\sin (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'}$$

Pour qu'il y ait réellement lieu d'appliquer cette force Z sur la tête du coin, on doit avoir Z positif, c'est-à-dire

$$\sin(\alpha - \varphi') > 0 \; ; \quad \text{d'où} \quad \alpha > \varphi'$$

L'expulsion a donc lieu quand l'on a $\alpha > \varphi'$, ou, pour être plus exact, quand l'on a $\alpha > \varphi$, φ étant l'angle de frottement au départ.

Si l'on a $\alpha < \varphi$, le coin ne sortira pas.

74. Remarque. Les coins en usage dans l'industrie se divisent en deux catégories.

Les premiers ont $\alpha < \varphi$, *ils ne sortent pas*, ce sont les *coins de serrage à demeure :* par exemple, les clefs des voûtes, les clefs pour maintenir les pièces d'un bâti sur les semelles, les clavettes de divers organes de machines, etc.

La seconde catégorie de coins comprend ceux qui *ne peuvent rester en place* si on les abandonne à eux-mêmes.

VIS

Équilibre de la vis en tenant compte du frottement.

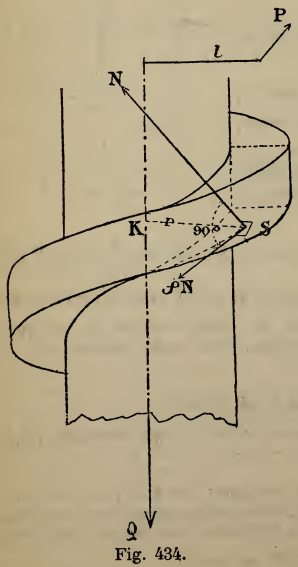


Fig. 434.

75. Montée. Considérons un élément S de surface de contact entre la vis et l'écrou. Supposons que la vis s'élève en entraînant un poids Q; à l'élément S de contact il y a une réaction N de l'écrou sur la vis, et il y naît une force de frottement fN appliquée à la vis. Le plan de N et de fN est parallèle à l'axe P de la vis.

Désignons par P la force appliquée à l'extrémité d'un bras de levier l et qui donne au système un mouvement uniforme.

En prenant par rapport à l'axe les moments des forces P et Q et des deux forces N et fN qui se trouvent en chacun des éléments de contact, on a

$$Pl = \Sigma M_N \, * + \Sigma M_{fN}$$

car le moment de Q est nul.

Or $\quad M_N = N \sin i \times r$

et $\quad M_{fN} = fN \cos i \times r$

r désignant le rayon KS et i l'angle de l'hélice.

Donc

$$Pl = \Sigma N \sin i \times r + \Sigma fN \cos i \times r$$

Si on prend un élément près du

---

* M_N se lit *mu* de N; il exprime le moment de N par rapport à un axe.

noyau, l'angle i' de l'hélice à laquelle il appartient est supérieur à l'angle i d'un élément moyen, et c'est le contraire pour les bords; il en est inversement pour les rayons; nous prendrons approximativement r, rayon moyen pour tous les rayons, de même l'angle i_1 correspondant, pour l'angle i; d'ailleurs, si l'on remarque que la largeur du *filet* est toujours très petite par rapport au rayon total, on voit que l'on est sensiblement dans le vrai; on a donc

$$Pl = r_1 \sin i_1 \Sigma N + r_1 f' \cos i_1 \Sigma N = r_1 (\sin i_1 + f' \cos i_1') \Sigma N$$

La vis se meut uniformément; donc, en projetant toutes les forces sur l'axe, on a

$$Q - \Sigma N \cos i + \Sigma f' N \sin i = 0$$

et, en usant des hypothèses ci-dessus,

$$Q = (\cos i_1 - f' \sin i_1) \Sigma N$$

Dès lors, en remplaçant f' par tg φ', il vient

$$Pl = r_1 \frac{\sin (i_1 + \varphi')}{\cos \varphi'} \Sigma N$$

et

$$Q = \frac{\cos (i_1 + \varphi')}{\cos \varphi'} \Sigma N$$

On en déduit

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1}{l} \operatorname{tg} (i_1 + \varphi') \qquad (1)$$

76. Remarques. 1° Sans le frottement, on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1}{l} \operatorname{tg} i_1 \qquad (2)$$

Or, si h est le pas de vis, $\operatorname{tg} i_1 = \frac{h}{2\pi r_1}$

Donc $$\frac{P}{Q} = \frac{hr}{2\pi lr} = \frac{h}{2\pi l}$$

résultat trouvé (M., n° 323).

2° Si l'on compare la formule (1) avec la formule (2), on voit que les choses se passent avec le frottement comme si l'on augmentait l'angle i_1 dans une vis où le frottement ne s'exercerait pas et qu'on fît cet angle égal à $i_1 + \varphi'$.

77. Descente. Pour la descente, on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1}{l} \operatorname{tg} (i_1 - \varphi') \qquad (3)$$

78. Discussion. Les formules (1) et (3) donnent lieu à une discussion.

1° Dans le mouvement ascendant, si $i_1 + \varphi' = 90°$, on trouve $\frac{P}{Q} = \infty$.

Une telle vis ne peut pas *monter;* une force P aussi grande qu'on le voudrait ne pourrait pas vaincre une force Q aussi faible qu'elle fût. Cela se conçoit: d'après la remarque 2° n° 76, la vis équivaut à une vis sans frottement d'angle $i_1 + \varphi' = 90°$, c'est-à-dire à un plan *vertical,* et alors jamais la force *horizontale* E ne peut déterminer le mouvement ascendant vertical.

2° Dans le mouvement descendant, on peut avoir $i_1 < \varphi'$, alors P est négatif, ce qui signifie que la vis ne descendra pas sous l'action de Q; quel que soit Q, il faudra aider au mouvement descendant.

79. Usage des vis. Comme les coins, les vis se divisent en deux catégories. Si l'on a $i_1 > \varphi'$, la vis descendra sous la seule action de son poids ou d'une force Q qui la sollicite suivant son axe; si l'on a, au contraire, $i_1 < \varphi'$, la vis ne descend jamais, quelque force qui la sollicite suivant son axe.

Les vis, d'après ces propriétés, sont dites de *transmission* ou *d'arrêt*.

Le calcul appliqué à la *vis à filets triangulaires* montre qu'il faut remplacer f' par $\frac{f}{\cos \beta}$, β étant le demi-angle au sommet du triangle générateur, ce qui revient à augmenter le frottement.

On emploie les vis d'arrêt dans les *vis de fixation*, telles que vis à bois, par exemple, ou vis à écrous; on les trouve dans la clé anglaise, la presse à copier, le cric de vérin, etc.

Les *vis de transmission* se rencontrent comme organes du mouvement dans les machines.

80. Application. Soit une vis dans laquelle

$$\operatorname{tg} i_1 = 0{,}15, \quad f' = 0{,}12$$

Sans frottement, on aurait $\frac{Pl}{Qr_1} = 0{,}15$

Avec frottement, on a pour l'ascension

$$\frac{Pl}{Qr_1} = 0{,}27$$

La vis est donc un mauvais organe au point de vue de l'utilisation des forces.

81. On peut se proposer de rechercher quelles sont les conditions pour qu'une *vis de pression ne remonte pas par le fait de la pression qu'elle exerce sur un obstacle quand on l'abandonne à elle-même.*

Supposons une vis capable de remonter d'elle-même sous l'action de la réaction; désignons par Pl le moment de la force à appliquer pour équilibrer cette réaction Q en sorte que le mouvement devienne uniforme.

La formule (3) de l'exercice précédent (n° 77) *, en prenant P et Q en valeur absolue, donne

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1}{l} \operatorname{tg} (i_1 - \varphi')$$

Si l'on trouve $P = 0$, on en conclut que sous la seule action de la réaction Q le mouvement uniforme se continue s'il préexiste; mais si la vis est en repos, à cause que l'angle de frottement φ au départ est supérieur à φ', le mouvement sous l'action de Q sera impossible, et la vis ne remontera pas. Or l'on a

$$P = 0 \quad \text{pour} \quad \operatorname{tg} (i_1 - \varphi') = 0$$

soit

$$i_1 - \varphi' = 0 \quad \text{ou} \quad i_1 = \varphi'$$

---

* Il est à remarquer que c'est réellement cette formule qui convient; un rapprochement des mots *remonter* et *monter* pourrait induire en erreur. Le cas qui nous occupe est réellement une sorte de *descente* sous l'action de la réaction Q.

Le mouvement est encore moins possible si, dans ces conditions, on trouve P négatif, car cela indique qu'il faut aider au mouvement et non équilibrer la réaction Q; or P est négatif pour $i_1 < \varphi'$.

Donc la vis ne remontera pas, alors que l'on a $i_1 \leq \varphi'$.

82. Rendement de la vis.

Il s'agit, par exemple, d'élever uniformément un poids Q.

La force P à employer est donnée par la relation

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1}{l} \cdot \operatorname{tg}(i_1 + \varphi') \qquad (1)$$

Pour un tour de la vis, h étant le pas de la vis, on a

$$\mathcal{T}P = P \times 2\pi l$$

et

$$\mathcal{T}Q = Q \times h = Q 2\pi r_1 \operatorname{tg} i_1$$

Le rendement R est

$$R = \frac{\mathcal{T}Q}{\mathcal{T}P} = \frac{Q \times 2\pi r_1 \operatorname{tg} i_1}{P \times 2\pi l} = \frac{Q}{P} \frac{r_1}{l} \cdot \operatorname{tg} i_1$$

En remplaçant $\frac{Q}{P}$ par sa valeur tirée de (1), il vient

$$R = \frac{\mathcal{T}Q}{\mathcal{T}P} = \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg}(i_1 + \varphi')}$$

83. Discussion. 1° Le rendement égale 1, si φ' devient nul; la tangente augmentant rapidement avec l'angle, la formule montre combien est grande l'influence du frottement sur la transmission du travail dans des vis à filets peu inclinés.

2° Si $i_1 + \varphi' = 90°$, on a $R = 0$. Nous avons déjà vu que, dans ce cas, la force P ne peut pas déplacer la vis et élever le poids Q.

3° *Maximum du rendement.* Nous allons trouver l'angle i_1 pour lequel le rendement est maximum.

On a

$$R = \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg}(i_1 + \varphi')} = \frac{\sin i_1 \cos(i_1 + \varphi')}{\cos i_1 \sin(i_1 + \varphi')}$$

On en peut tirer

$$\frac{1 + R}{1 - R} = \frac{\sin(2i_1 + \varphi')}{\sin \varphi'}$$

Le maximum de R est le même que celui de $\frac{1 + R}{1 - R}$, car cette quantité augmente avec R; or cette expression est maximum par rapport à la variable i_1 quand on a

$$\sin(2i_1 + \varphi') = 1$$

ou

$$2i_1 + \varphi' = 90°$$

soit

$$i_1 = 45° - \frac{\varphi'}{2}$$

Telle est la valeur de l'angle des filets de la vis qui donne un rendement maximum.

Le maximum du rendement est

$$R = \frac{\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varphi'}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\varphi'}{2}\right)}$$

Par une série de transformations, on arrive encore à l'expression

$$R = \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2}} \right)^2$$

FROTTEMENT D'UNE CORDE SUR UN CYLINDRE

84. Pour résister à une force considérable Q, on enroule la corde sur laquelle agit cette force autour d'un cylindre fixe. On peut établir que *si l'arc embrassé croît en progression arithmétique, la force que peut équilibrer une même puissance croît en progression géométrique.*

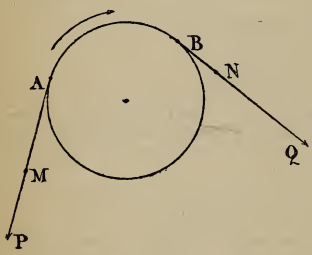


Fig. 435.

Ainsi, une force considérable Q tend à entraîner la corde MN; si l'on a soin de faire glisser cette corde sur un cylindre, la force P, qu'il est suffisant d'appliquer à la corde pour équilibrer la force Q et rendre le mouvement uniforme, est moindre que Q. Il s'agit d'établir un rapport entre P, Q et l'arc embrassé AB.

1re démonstration. Préliminaires. La force Q est égale à P augmentée du frottement sur AB. Si nous doublons la force Q, il faudra aussi doubler la force P pour que l'équilibre subsiste; en effet, on doit avoir 2Q égale à 2P plus les frottements; mais comme les frottements sont proportionnels aux pressions normales, et que, toutes les forces étant doublées, les pressions ont dû doubler, par suite les forces de frottement sont doubles des précédentes, et l'on a réellement une force 2P correspondant à 2Q. De même, si la force Q était 3, 4, 5... *n* fois plus grande, P serait aussi 3, 4, 5... *n* fois plus grande; on aurait encore la même proportionnalité si Q était 2, 3, 4, 5... fois plus petit; et généralement si P ou Q deviennent *m* fois ce qu'ils étaient, Q ou P varieront dans le même rapport.

85. Principe. *La force* P *étant constante, la force* Q *croît en progression géométrique pour des arcs croissant en progression arithmétique.*

Considérons la corde glissant uniformément en embrassant un arc AB (fig. 436) que nous supposons divisé en quatre parties égales.

Si on coupe la corde en C, il faut appliquer en ce point une force Q_1 égale à la tension de la corde en ce même point; l'on a

$$Q_1 = mP$$

m étant plus grand que 1.

La corde étant coupée en D, la partie CD considérée isolément est soumise à l'action d'une force $Q'_1 = Q_1$ en C et d'une force Q_2 en D égale à la tension

de la corde en ce point. La force entraînée Q'_1 étant devenue m fois supérieure à la force P entraînée dans le premier cas, puisque l'on a $Q_1 = mP$, il s'ensuit que la force entraînante Q_2 vaut m fois la force entraînante Q_1 (Prélim.). On a donc

$$Q_2 = mQ_1 = m^2P$$

On a aussi pour la force en E

$$Q_3 = mQ_2 = m^3P$$

Et, d'une façon générale, pour des angles croissant comme la suite des nombres entiers, ou les termes d'une progression arithmétique 1, 2, 3..., les forces croissent comme les termes

$$mP, \quad m^2P, \quad m^3P$$

d'une progression géométrique.

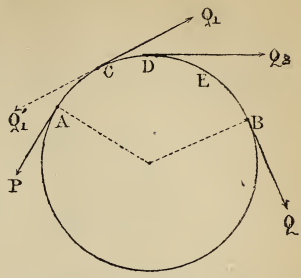


Fig. 436.

Ce qui est la relation qui lie les efforts aux arcs embrassés.

86. Remarque. La proposition que nous venons d'établir ne donne aucun rapport absolu de grandeur entre P et Q en fonction de l'angle d'embrassement et du coefficient de frottement; la démonstration suivante complète cette question.

87. 2e démonstration. Prenons un petit élément de corde MM'; soit Q' la force que détermine le mouvement uniforme en entraînant la résistance P'; N étant la réaction totale appliquée à l'élément, $F = f'N$ est la force de frottement.

Les forces appliquées à l'élément sont P', Q', N' et F.

En projetant sur la normale NO, et désignant par α l'angle NOM', on a

$$N - P' \sin\frac{\alpha}{2} - Q' \sin\frac{\alpha}{2} = 0 \quad (1)$$

La projection sur la direction de la tangente xx' donne

$$f'N + P' \cos\frac{\alpha}{2} - Q' \cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad (2)$$

De (1) on tire

$$N = \sin\frac{\alpha}{2} \times (Q' + P')$$

et de (2), $f'N = \cos\frac{\alpha}{2} \times (Q' - P')$

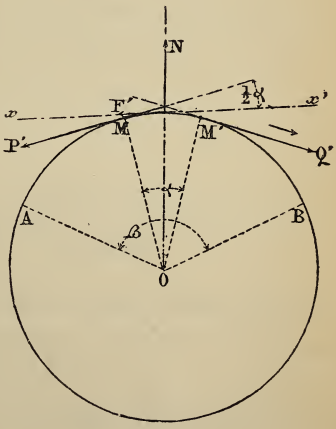


Fig. 437.

d'où

$$f' = \frac{Q' - P'}{Q' + P'} \times \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

et, en transformant,
$$\frac{Q'}{P'} = \frac{1 + f' \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - f' \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Or, l'angle α étant petit, la tangente peut se confondre avec l'angle. On a

$$\frac{Q'}{P'} = \frac{1 + \frac{f'\alpha}{2}}{1 + \frac{f'\alpha}{2}}$$

ou
$$Q' = P' \times \frac{1 + \frac{f'\alpha}{2}}{1 - \frac{f'\alpha}{2}}$$

Soit $AB = \beta$ l'arc embrassé par la corde, divisons cet arc en n parties égales et posons
$$\beta = n\alpha \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{\beta}{n}$$

Désignons par Q_1, Q_2..., Q les tensions de la corde en chacun des points de division. On a

$$Q_1 = P \frac{1 + f' \frac{\alpha}{2}}{1 - f' \frac{\alpha}{2}}$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{1 + f' \frac{\alpha}{2}}{1 - f' \frac{\alpha}{2}}$$

$$Q_3 = Q_2 \frac{1 + f' \frac{\alpha}{2}}{1 - f' \frac{\alpha}{2}}$$

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

$$Q = Q_{n-1} \frac{1 + f' \frac{\alpha}{2}}{1 - f' \frac{\alpha}{2}}$$

Le produit, membre à membre, fournit

$$Q = P \left(\frac{1 + f' \frac{\alpha}{2}}{1 - f' \frac{\alpha}{2}} \right)^n$$

ou, en remplaçant α par sa valeur $\frac{\beta}{n}$,

$$Q = P \left(\frac{1 + \frac{f'\beta}{2n}}{1 - \frac{f'\beta}{2n}} \right)^n$$

et, en posant $\frac{f'\beta}{2} = K$

$$Q = P\left(\frac{1+\frac{K}{n}}{1-\frac{K}{n}}\right)^n \qquad (1)$$

Cherchons la valeur de la parenthèse; elle peut s'écrire

$$\left(\frac{1+\frac{K}{n}}{1-\frac{K}{n}}\right)^n = \left[\left(\frac{1+\frac{K}{n}}{1-\frac{K}{n}}\right)^{\frac{n}{K}}\right]^K$$

En posant encore $\frac{n}{K} = m$, la parenthèse comprise dans le crochet devient

$$\left(\frac{1+\frac{K}{n}}{1-\frac{K}{n}}\right)^{\frac{n}{K}} = \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m}$$

où m tend vers l'infini quand le nombre de divisions n augmente indéfiniment.

Or la formule du développement du binôme de Newton apprend à calculer chacun des termes de cette fraction, quand m est infini; la limite de

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

n'est autre que le nombre $e = 2{,}741...$, que l'on apprend à calculer en mathématiques spéciales; et $\lim. \left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{e}$

Dès lors on a $\lim. \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m} = \frac{e}{\frac{1}{e}} = e^2$

Si l'on remarque que la formule (1) qui sert de point de départ n'est vraie que pour α infiniment petit, c'est-à-dire pour n infiniment grand, on voit que l'on a, non plus approximativement, mais exactement, par des remplacements successifs,

$$Q = P \times e^{2k} = Pe^{\frac{2 \cdot f'\beta}{2}}$$

enfin $$Q = Pe^{f'\beta}$$

Ce qui montre que pour les angles β croissant en progression arithmétique, les forces Q croissent en progression géométrique.

88. Remarques. I. La quantité $e^{f'\beta}$ devient considérable, dès que β est un peu grand, et elle croît très rapidement et sans limite.

Exemple : Pour une corde en chanvre sec sur bois rugueux, on a $f' = 0{,}50$.

Si nous supposons $\beta = 180° = \pi$, on trouve $e^{f'\beta} = 4{,}81$

pour $\beta = 360° = 2\pi$, » $e^{f'\beta} = 23{,}10$

pour $\beta = 2 \times 2\pi$, » $e^{f'\beta} = 535$

On voit dès lors combien est grande l'adhérence d'une corde sur un cylindre. Ainsi pour une corde faisant un tour $\beta = 2\pi$, il faut 23^k1 pour entraîner 1^k; si la corde fait deux tours, il faut 535^k pour entraîner ce même kilog. (Remarquer que $535 = \overline{23,1}^2$.)

II. Les applications de cette adhérence des cordes sur les cylindres sont nombreuses.

1° Pour arrêter les barques, les mouches sur la Seine et le Rhône, on attache une corde à l'arrière et on la passe à une borne en bois plantée sur le ponton; on tend un peu la corde; le bateau exerce l'action Q; le marinier développe P. On arrête lentement en laissant un peu filer la corde, en *mollissant*, suivant le terme consacré.

2° L'obélisque de Luxor a été manœuvré en faisant usage de la propriété de l'adhérence des cordes; on fait de même pour laisser reposer de lourdes pièces.

3° Le mouton à estamper est fondé sur cette propriété. La masse tombante est fixée à une corde passant sur une poulie toujours en mouvement et laissant un brin libre. Si l'on tend la corde, et il n'est pas nécessaire de développer un grand effort, une moyenne tension suffit, le mouton est enlevé. Pour le laisser tomber, on lâche la corde.

Ici $\beta = 180°$; on aura $Q = P \times 4,81$; si le mouton est de 100^k, il suffira de développer $P = 20^k$ environ.

4° *Treuil à corde adhérente.* La corde ne fait que trois ou quatre tours sur le cylindre, elle est tendue par un poids P relativement léger qui suffit pour l'empêcher de glisser sous l'action du fardeau Q à élever. Le nombre de tours d'enroulement est $n + \frac{1}{2}$; dès lors, au repos, on a, en désignant par f le coefficient de frottement au départ,

$$Q_1 = Pe^{f\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

Le poids à enlever, Q, devra être inférieur à la quantité Q_1. L'avantage de ce treuil est que la corde n'a pas besoin de s'enrouler sur elle-même; elle se déplace horizontalement.

Le cabestan (fig. 95, M., n° 147 *bis*) indique comment, par le moyen d'un ouvrier qui tend la corde, on fait naître la force P qui peut équilibrer la force à vaincre Q.

Fig. 438.

5° On peut descendre sûrement d'une grande hauteur sans grande fatigue et sans autre appareil qu'une corde passée sur un cylindre en bois. L'homme, les pieds fixés en A à un bout de la corde à laquelle il se tient d'un bras, agit par sa main libre en B sur l'autre brin de la corde, qu'il laisse filer.

En B est la force P, en A la force Q.

On a $P + Q =$ poids de l'homme U

La formule $Q = Pe^{f\pi}$

pour $f = 0,50$ donne $Q = P \times 4,80$

Si $U = 70$ kilog.

on trouve $P = 12$ kilog.

Une tension de 12 kilog. sera suffisante pour se laisser glisser aussi lentement qu'on le voudra.

CHOC DES CORPS

CHOC DES CORPS MOUS

89. Théorème. *Lorsque deux corps mous sphériques* S, S′ *se choquent, il y a à chaque instant du choc égalité entre les quantités de mouvement perdues et gagnées par ces deux corps, qui ensuite n'en forment plus qu'un dont la vitesse est* u.

Soit m masse du corps S, v sa vitesse,
et m' » S′, v' »

Considérons les deux sphères S, S′ cheminant suivant la ligne des centres dans le même sens, et soit $v > v'$.

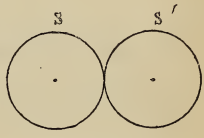


Fig. 439.

Il arrive un moment où S atteint S′; au moment du choc, il naît une réaction de chacun des corps sur l'autre qui tend à pousser S′ en avant et à repousser S en arrière. Si R est la valeur de la réaction à un moment déterminé du contact, l'action de S′ sur S étant de ralentir cette dernière sphère, l'accélération j de ce mouvement retardé sera donnée par la relation

$$R = mj$$

De même l'action S sur S′ sera d'accélérer le mouvement de la sphère S′, et l'accélération de ce mouvement sera fournie par la relation $R = m'j'$.

On a donc à l'instant quelconque que l'on considère

$$mj = m'j' \qquad (1)$$

Or si v_1, v_1' désignent les vitesses des corps à cet instant, que nous supposons distant de θ de l'origine, on a

$$v_1 = v - j\theta, \quad v_1' = v' + j'\theta$$

La relation (1) devient

$$m(v - v_1) = -m'(v' - v_1')$$

Cette expression montre *qu'à chaque instant il y a égalité entre la quantité de mouvement perdue par le corps dont le mouvement se ralentit, et celle gagnée par le corps dont le mouvement s'accélère.* *C. Q. F. D.*

90. Recherche de la vitesse U.

Il arrive un moment où les deux corps s'étant comprimés autant que le permettent les conditions du choc, ils vont de concert, ne formant plus qu'une seule masse, sans jamais se désunir; cela n'aurait pas lieu si les corps possédaient quelque élasticité.

La quantité de mouvement perdue par S est

$$m(v-u)$$

celle gagnée par S′ est $$m'(u-v')$$

D'après ce qui précède, on a l'égalité

$$m(v-u)=m'(u-v')$$

d'où l'on tire la valeur de u.

$$u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}$$

Telle est la vitesse commune aux deux corps; elle est égale à la somme des quantités de mouvement possédés par les corps avant le choc, divisée par la somme des masses.

91. Remarque. Ce résultat aurait pu se déduire immédiatement du théorème des quantités de mouvement et des impulsions élémentaires qui est le théorème (M., n° 277) généralisé; *la somme des impulsions élémentaires égale la variation de la quantité de mouvement.* Or, avant le choc, la quantité de mouvement du système est $mv+m'v'$; après le choc, elle est $(m+m')u$, mais aucune force n'est intervenue; donc la somme des impulsions élémentaires est nulle, et l'on a

$$mv+m'v'-(m+m')u=0$$

d'où $$u=\frac{mv+m'v'}{m+m'}$$

92. Examen des différents cas qui peuvent se présenter.

1° $$m=m'$$

Les masses sont égales.

On a alors $$u=\frac{v+v'}{2}$$

Deux corps mous égaux cheminent après le choc avec une vitesse commune égale à la moyenne des vitesses avant le choc.

2° $$m=m' \quad \text{et} \quad v=-v'$$

Les masses sont égales, les vitesses sont égales et de sens contraires.

On obtient $$u=0$$

Les deux corps s'arrêtent mutuellement.

3° $$m=m' \quad \text{et} \quad v'=0$$

Les masses sont égales, et l'un des corps est au repos.

La formule donne $$u=\frac{mv}{m+m}=\frac{v}{2}$$

L'ensemble chemine avec une vitesse égale à la moitié de celle que possédait le corps en mouvement.

93. Théorème de Carnot. *Dans le choc de deux corps non élastiques, la force vive perdue est égale à la somme des forces vives qui correspondent aux vitesses gagnées ou perdues par chacun des deux corps.*

La force vive initiale du système S, S′ était, avant le choc,

$$mv^2+m'v'^2$$

elle est après le choc $$(m+m')u^2$$

La force vive perdue est dès lors

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2$$

Il s'agit d'établir que cette force vive perdue est égale à sa somme

$$m(v - u)^2 + m'(u - v')^2$$

qui représente la somme des forces vives correspondant aux vitesses $v - u$ et $u - v'$, l'une $u - v'$ gagnée par S', l'autre $v - u$ perdue par S.

Pour démontrer l'égalité

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2 = m(v - u)^2 + m'(u - v')^2 \qquad (1)$$

il suffit de remplacer u par sa valeur, on obtient une identité.

On peut encore y arriver autrement.

De la relation $$mv + m'v' = (m + m')u$$

trouvée précédemment, on tire, en multipliant par $2u$,

$$2u^2(m + m') - 2u(mv + m'v') = 0$$

Cette quantité ajoutée au premier membre de la relation (1) fournit immédiatement le second.

94. Remarques. I. *Que devient la force vive perdue dans le choc des corps mous?*

Toute force vive correspond à un travail aussi indestructible que l'est la matière. Que devient donc la force vive qui disparaît dans le choc des corps mous?

Pour les corps mous, cette force vive perdue correspond à la déformation des corps et à des mouvements qu'acquièrent ces corps; ces mouvements peuvent affecter le système entier et nous apparaître sous forme de vibrations et même de *son,* ou bien ils peuvent affecter les molécules et se révéler à nous sous forme de *chaleur,* d'électricité, etc.

II. *Puissants effets du choc sur un corps mou.*

Le choc d'une masse d'acier, d'un marteau, par exemple, produit sur une masse de matière non élastique une déformation que l'on pourrait encore obtenir en chargeant la masse d'acier de poids considérables.

Supposons un marteau de 250^{kg} tombant sous la seule action de la pesanteur d'une hauteur de 3^m, et s'enfonçant de 0^m05.

Sa chute engendre un travail de $250 \times 3 = 750^{kgm}$.

La pression P qui pourrait faire avancer la panne du marteau de 0^m05 devrait être telle qu'elle produisit les 750^{kgm}; on aura donc

$$P \times 0{,}5 = 750^{kgm}; \quad \text{d'où} \quad P = 15\,000^{kg}$$

Ainsi les 250^{kg} qui tombent de 3^m de haut produisent *immédiatement* le même effet de déformation que $15\,000^{kg}$ qui presseraient simplement sur le corps pendant un temps assez considérable.

On comprend, d'après cela, l'emploi des chocs dans les arts et dans l'industrie : marteaux de toutes sortes, martinet, marteau-pilon, sonnettes, moutons pour pilotis, etc.

III. *Durée de la période du choc.* Les deux sphères S, S' ont commencé à se déformer au contact, cette déformation s'est accentuée jusqu'au moment où les deux corps ont cheminé avec la vitesse u, cette vitesse est restée constante. Quelle a été la durée de cette déformation?

Si nous reprenons l'exemple précédent, en supposant que le marteau éprouve

une égale résistance à l'enfoncement à tous les instants, nous avons trouvé cette résistance égale à 15 000^{kg}; le mouvement du marteau est, dans ce cas, uniformément retardé, et l'accélération j est donnée par la relation

$$15\,000 = mj \qquad (1)$$

m étant la masse du marteau.

Mais on a $\quad m = \frac{250}{g}, \quad v = jt \quad$ et $\quad v = \sqrt{2gh}$

v étant la vitesse du marteau au moment du choc et h la hauteur 3^m de chute.

La relation (1) fournit, par des remplacements successifs,

$$t = \frac{250}{15\,000} \cdot \sqrt{\frac{3 \times 2}{g}} = 0^s,013 \ *$$

On voit combien est *petite la durée du choc*, mais le choc n'est pas *instantané.*

Ce double résultat permet de rendre compte de certains faits singuliers.

Ainsi une balle fait un trou à un carreau de verre sans produire de fissures rayonnantes ou autres; la courte durée du choc n'a pas permis au mouvement de la balle de se transmettre au reste du carreau.

CHOC DES CORPS ÉLASTIQUES

95. Soit à chercher quelle est la vitesse de deux corps élastiques après leur choc.

Ce que nous avons dit pour le choc des corps mous nous permettra d'entrer ici dans moins d'explications.

Cette proposition : *A chaque instant il y a égalité entre la quantité de mouvement perdue par le corps dont le mouvement se ralentit et celle gagnée par le corps dont le mouvement s'accélère*, convient aussi bien aux corps élastiques qu'aux corps mous.

Seulement, dans les corps parfaitement élastiques, il y a après le choc une période qu'il convient d'examiner.

96. Période de retour des corps à leur première forme. Considérons les deux sphères S, S′ de l'exercice précédent, lorsqu'elles ont cessé de se comprimer, et supposons-les élastiques.

L'élasticité de S va agir sur S′ et augmenter la vitesse de S′, tandis que l'élasticité de S′ agissant sur S ralentira le mouvement de S, et, de même que dans le cas de la compression, la quantité de mouvement que perd la sphère S dans cette seconde période et à chaque instant égale à celle que gagne la sphère S′.

Les corps, étant parfaitement élastiques, reviendront absolument à leur forme primitive, et, dans ce retour à leur premier état, ils passeront par des états intermédiaires correspondant à ceux dans lesquels ils se trouvaient lors de la compression; il s'ensuit que la vitesse perdue par S, de même que la vitesse

---

* Ce résultat n'est qu'approximatif, on a supposé la résistance constante; il est probable, au contraire, qu'elle va en croissant.

gagnée par S′ dans ce retour à la première forme, sont précisément égales à la vitesse perdue par S et à celle gagnée par S′ dans la première période du choc.

Pour les corps mous il n'y a pas cette seconde période, et les corps cheminent avec la vitesse u.

La sphère S avait perdu une vitesse $v - u$

et S′ avait gagné $u - v'$

leur vitesse commune était u.

Si ces sphères sont élastiques dans la seconde période, la sphère S perdra encore $v - u$, et S′ gagnera de nouveau $u - v'$; la vitesse finale w de la sphère S sera donc $w = u - (v - u) = 2u - v$

La vitesse finale w' de la sphère S′ sera

$$w' = u + (u - v') = 2u - v'$$

En remplaçant u par sa valeur (Ex. 172), il vient, après simplifications,

$$w = \frac{mv + 2m'v' - m'v}{m + m'}$$

$$w' = \frac{m'v' + 2mv - mv'}{m + m'}$$

97. Remarque. Pour ne pas ralentir l'exposition de la question, nous avons omis à dessein quelques détails que nous reprenons ici.

Dans la période de retour, la vitesse de S diminue et celle de S′ augmente; il peut arriver un moment où la vitesse S devienne nulle, puis change de sens; elle s'annule quand la quantité de mouvement de cette sphère est détruite, et, l'élasticité de S′ continuant à agir, le corps S prend en sens inverse un mouvement dont la vitesse augmente jusqu'à la fin de la seconde période du choc.

Les formules que nous venons d'établir contiennent ces résultats.

Ces formules sont générales; elle conviennent à tous les cas; il suffit de changer les signes des vitesses quand on change le sens des mouvements.

98. Cas particuliers. *Mouvements dans le même sens.*

1° $\mathbf{m = m'}$, les masses sont égales.

On obtient
$$w = \frac{mv + 2mv' - mv}{2m} = v'$$

$$w' = \frac{mv' + 2mv - mv'}{2m} = v$$

Les corps échangent leurs vitesses.

Si une des sphères, S′ par exemple, *est au repos*, on a

$$w = 0, \quad w' = v$$

La sphère choquante reste au repos, tandis que la sphère fixe part avec la vitesse de la première sphère. Ce cas se vérifie dans le jeu de billard. On peut le vérifier autrement.

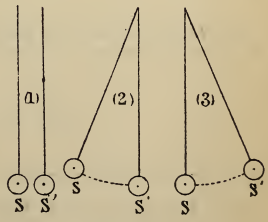


Fig. 440.

Deux billes d'ivoire S, S′ sont en contact; on écarte S d'un angle α et on l'abandonne à elle-même, elle vient choquer S′ et reste aussitôt au repos, communiquant sa vitesse à S′, qui remonte d'un angle α; sa bille S′ venant à retomber, le même phénomène se produira, et ainsi de suite.

On rend cette expérience encore plus sensible en disposant, par exemple, sept billes d'ivoire (fig. 441) en contact; si on soulève celle d'une extrémité d'un angle α, qu'on la laisse retomber, elle reviendra aussitôt au repos, les cinq billes intermédiaires ne bougeront pas, et la bille extrême seule se soulèvera d'un angle α; etc.

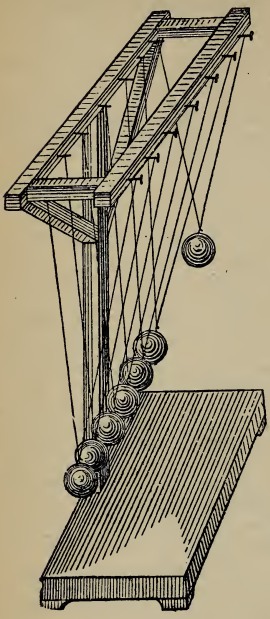


Fig. 441.

2° $\mathbf{m} \lesseqgtr \mathbf{m}'$, les masses sont différentes.

$m > m'$. Si l'on a $m > m'$ et $v > v'$, les valeurs de w et w' sont toutes deux positives, quel que soit le rapport des vitesses v et v'.

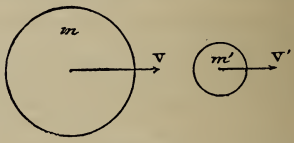


Fig. 442.

$m < m'$. Mais si l'on a $m < m'$ avec $v > v'$, il peut se faire, la valeur de w' restant toujours positive, que celle de w devienne nulle ou négative.

w sera nulle, quand on aura

$$mv + 2m'v' - m'v = 0$$

d'où

$$\frac{m}{m'} = \frac{v - 2v'}{v} = 1 - \frac{2v'}{v}$$

w sera négative, alors que l'on aura

$$mv + 2m'v' - m'v < 0$$

d'où

$$\frac{m}{m'} < 1 - \frac{2v'}{v}$$

Remarque. Si l'une des masses m' devient infinie et est au repos, ce qui est le cas d'un obstacle fixe, on a

$$w = \frac{mv - m'v}{m + m'} = \frac{\frac{m}{m'} - v}{\frac{m}{m'} + 1}$$

qui, pour $m' = \infty$, devient $w = -v$.

C'est le cas d'une bille de billard lancée contre la bande; elle revient avec une vitesse égale à celle qu'elle possédait au moment du choc.

99. *Mouvements en sens contraire.*

1° $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$, les masses sont égales.

Les formules donnent, en changeant v' en $-v'$, à cause du mouvement contraire de S,

$$w = \frac{mv - 2mv' - mv}{2m} = -v'$$

$$w' = \frac{-mv' + 2mv + mv'}{2m} = v$$

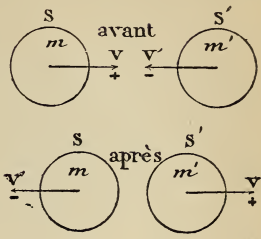


Fig. 443.

Les corps échangent leurs vitesses; la sphère S' repart avec la vitesse v de la sphère S; celle-ci revient sur ses pas avec la vitesse v' de la sphère S', ce qui justifie le signe négatif de v'.

Si en même temps les vitesses sont égales

$$v = v'$$

on a $$w = -v, \quad w' = v$$

2° $\mathbf{m > m'}$, les masses sont différentes.

Les formules générales deviennent, en tenant compte du signe de v',

$$w = \frac{mv - 2m'v' - m'v}{m + m'}$$

$$w' = \frac{mv' + 2mv - m'v'}{m + m'}$$

Considérons les quantités de mouvement des deux boules.

(**a**) Si l'on a $mv = m'v'$, soit $\frac{m}{m'} = \frac{v'}{v}$, les formules deviennent

$$w = \frac{-mv - m'v}{m + m'} = -v$$

$$w' = \frac{mv' + m'v'}{m + m'} = v'$$

Les deux boules reviennent sur leurs pas avec *leurs mêmes vitesses.*

(**b**) Avec $$mv > m'v' \quad \text{ou} \quad \frac{m}{m'} > \frac{v'}{v}$$

l'expression $$w = \frac{mv - 2m'v' - m'v}{m + m'}$$

donne $$w > \frac{mv - 2mv - m'v}{m + m'}$$

soit $$w > -v$$

et de même pour vv' $$w' > v'$$

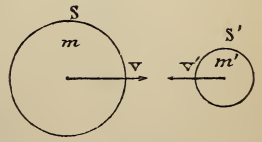


Fig. 444.

Ces résultats indiquent que, dans ce cas, la sphère S' revient toujours plus vite qu'elle n'allait avant le choc; quant à la sphère S, sa vitesse pouvant être supérieure à $-v$, elle peut devenir nulle, ce qui aurait lieu pour

$$mv - 2m'v' - m'v = 0$$

soit $$\frac{m}{m'} = \frac{v' + v}{v} = \frac{v'}{v} + 1$$

elle peut aussi rester positive, c'est-à-dire que la sphère S continue son mouvement avec une moindre vitesse; ceci a lieu quand on a

$$mv - 2m'v' - m'v > 0$$

ou

$$\frac{m}{m'} > \frac{v'}{v} + 1$$

100. Au moyen des formules précédentes, on peut faire voir *qu'il y a conservation de la force vive dans le choc des corps élastiques.*

De ce que nous avons dit sur le *retour à la forme primitive,* on peut déduire que la force vive perdue dans la première période du choc doit se retrouver dans la seconde, en sorte que, soit avant, soit après le choc, la somme des forces vives doit être la même.

Avant le choc, cette somme est $mv^2 + m'v'^2$

après, elle est $mvv^2 + m'vv'^2$

On doit avoir $mv^2 + m'v'^2 = mv^2 + m'v'^2$

ce que l'on vérifie en remplaçant vv et vv' par leurs valeurs tirées de l'exercice précédent : on obtient une identité.

PROBLÈMES SUR LE FROTTEMENT

Problème 326

Un bloc de pierre pesant 1 200k *repose sur un sol dur ; quelle force pourra vaincre le frottement au départ?* f = 0,75.

La force est parallèle au chemin parcouru.

1° *Le sol est horizontal.*

On a (M., n° 331)

$$Z = 1200 \times 0{,}75 = 900^k$$

Rép. 900k.

2° *On tend à faire remonter une pente de* 15mm *par mètre.*

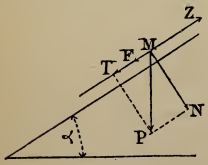


Fig. 445.

La force Z doit vaincre la composante *tangentielle* T du poids P et la force de frottement F.

On a $T = P \sin \alpha$

et $F = fN$ (M., n° 334, 1°)

Or $F = 0{,}75N = 0{,}75P \cos \alpha$

donc

$$Z = F + T = P\,(0{,}75 \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Mais $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{1\,000}$

d'où $\cos \alpha = 0{,}999...$

ou $\sin \alpha = 0{,}014...$

d'où $Z = 1200\,(0{,}75 \times 0{,}999... + 0{,}014...) = 918$ environ.

Remarque. Ce résultat se déduit immédiatement du n° 20.

$$Z = P \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

Or $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}75$ d'où $\varphi = 36^\circ\, 53'$

$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}015$ d'où $\alpha = 0^\circ 51'$

dès lors $Z = 1\,200 \times \dfrac{0{,}612}{0{,}7938} = 918^k$

Rép. $Z = 918^k$ environ.

3° *On fait descendre une pente de* 15^{mm} *par mètre.*

On a

$$Z = F - T = 1\,200\,(0{,}75 \cos \alpha - \sin \alpha)$$

d'où, en faisant usage des calculs précédents,

Rép. $Z = 882^k$ environ.

Remarque. Le n° 22 donne aussi

$$Z = P \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi}$$

Problème 327

Quelle force employer pour conserver le mouvement uniforme dans les différents cas du n° précédent? $f' = 0{,}65$.

Les résultats sont les mêmes que précédemment ; il suffit de remplacer f par f', car dans le mouvement uniforme il y a équilibre entre les forces qui agissent sur le corps.

1re Rép. 780^k...

2e Rép. 796^k02...

3e Rép. 726^k420...

Problème 328

Quel devra être l'angle d'un plan incliné pour qu'en lançant un corps sur ce plan avec une vitesse de 2^m, *il le descende d'un mouvement uniforme?* $f' = 0{,}42$.

Pour que le corps chemine d'un mouvement uniforme, il suffit que les forces qui agissent sur lui se fassent équilibre, et la vitesse de son mouvement, en vertu de l'inertie, sera 2^m.

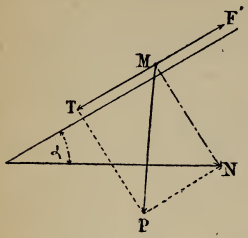


Fig. 446

Mais comme le poids est la seule force effective qui sollicite le corps, il faut que la force de frottement F soit égale à la composante tangentielle T du poids, soit

$$F' = Nf' = P \cos \alpha \times f' \text{ et } T = P \sin \alpha$$

et, puisque $F' = T$,

$$P \cos \alpha \times f' = P \sin \alpha$$

d'où $$f' = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\, \alpha$$

Or $$f' = \text{tg}\, \varphi'$$

donc $$\text{tg}\, \alpha = \text{tg}\, \varphi' \quad \text{ou} \quad \alpha = \varphi'$$

Il faut que l'angle du plan soit égal à l'*angle de frottement* pendant le mouvement (voir nº 36).

Rép. $\text{tg}\, \alpha = 0{,}42$; d'où $\alpha = 22^\circ\, 47'$.

Problème 329

Un traîneau pèse 810^k *et fait* 7^k *à l'heure; le coefficient de frottement du fer sur la terre battue est* $f' = 0{,}30$. *Quel sera le travail que le frottement absorbera en une heure?*

1º *La route est horizontale.*

On a (nº 44)

$$T = Pf'l = 810 \times 7\,000 \times 0{,}30 = 1\,701\,000$$

Rép. $1\,701\,000^{kgm}$.

2º *Elle monte de* 25^{mm} *par mètre.*

La force du frottement dans ce mouvement uniforme est, en désignant par α l'angle du plan,

$$F' = f'N = f'P \cos \alpha$$

Le travail sera $$T = f'lP \cos \alpha$$

Or, d'après les données,

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{25}{1\,000}$$

d'où $\alpha = 14^\circ\, 3'$ et $\cos\alpha = 0{,}970$

d'où $T = 0{,}30 \times 7\,000 \times 810 \times 0{,}970 = 1\,649\,970^{k}$

Rép. $1\,649\,970^{kgm}$.

3° *La route descend de* 25^{mm} *par mètre.*

C'est la même réponse que dans le 2°.

Car, dans les deux cas, la pression normale étant toujours N, le travail absorbé *par le frottement* est le même.

Remarque. Le problème suivant, à partir du 3°, n'est, pour ainsi dire, que l'examen des cas particuliers de la question de frottement (n° 33).

Problème 329 bis.

Un corps du poids P *est posé sur un plan. Une force* Z *le fait glisser sur ce plan; le coefficient de frottement est* f'. *Trouver l'accélération du mouvement produit et l'espace parcouru au bout du temps* t.

1° *Le plan est horizontal, la force est parallèle au plan.*

La question n° 33 donne

Rép. $j = \dfrac{Z - f'P}{m}$

et $$e = \frac{1}{2} j t^2 = \frac{1}{2} \frac{Z - f'P}{m} t^2$$

2° *Le plan est horizontal, la force* Z *fait un angle* β *avec le plan.*

Soient Z' et Z'' les composantes horizontales et verticales de Z. La force accélératrice est Z' — F.

Or $$Z' = Z \cos\beta$$

et $$F = (P - Z'')\, f' = (P - Z \sin\beta)\, f'$$

dès lors $$Z' - F = -Pf' + Z \sin\beta f' + Z \cos\beta$$
$$= Z\,(f' \sin\beta + \cos\beta) - P f'$$

L'accélération j est

Rép. $$j = \frac{Z\,(f' \sin\beta + \cos\beta) - Pf'}{m} \qquad (1)$$

et l'espace $$e = \frac{1}{2} j t^2$$

Remarque. La valeur j du 1° peut se déduire de (1), en y faisant $\beta = 0$.

3° *Le plan est incliné de* α ; *la force, parallèle au plan, est dirigée vers le bas.*

Comme c'est la force donnée qui *fait glisser* le corps, il faut prendre le mouvement du corps dans le sens de la force.

L'accélération est (n° 42), en désignant par β l'angle de la force et du plan,

$$j = \frac{P \sin \alpha - Z \cos \beta - F'}{m}$$

ou

$$j = \frac{P \sin (\alpha - \varphi') - Z \cos (\beta - \varphi'}{m \cos \varphi'}$$

Dans le cas qui nous occupe, $\beta = 180°$; dès lors il vient

Rép. $$j = \frac{P \sin (\alpha - \varphi') + Z \cos \varphi'}{m \cos \varphi'}.$$

De plus, $$e = \frac{jt^2}{2}$$

Remarque. Ce résultat peut être trouvé directement. La force accélératrice est

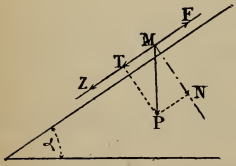


Fig. 447.

$$T + Z - F' = T + Z - Nf$$
$$= Z - P \cos \alpha \times f' + P \sin \alpha$$

L'accélération sera

$$j = \frac{Z - P \cos \alpha \times f' + P \sin \alpha}{m}$$
$$= \frac{Z \cos \varphi' + P \sin (\alpha - \varphi')}{m \cos \varphi'}$$

valeur déjà trouvée.

4° *La force est dirigée vers le haut.*

Soit directement, comme ci-dessus, ou par application des formules (n° 41), au cas où $\beta = 0$ et où le corps monte, on trouve

Rép. $$j = \frac{Z \cos \varphi' - P \sin (\alpha + \varphi')}{m \cos \varphi'}.$$

5° *Le plan est incliné de* α ; *la force, dirigée vers le bas, fait un angle* β *avec le plan ; elle est au-dessus du plan.*

La force accélératrice est (fig. 448)

$$U = T + Z' - F'$$

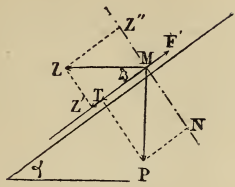


Fig. 448.

Or $$T = P \sin \alpha, \quad Z' = Z \cos \beta$$

et $$F' = (N - Z'')\, f' = (P \cos \alpha - Z \sin \beta)\, f'$$

Dès lors l'accélération du mouvement est

$$j = \frac{U}{m} = \frac{P \sin \alpha + Z \cos \beta - (P \cos \alpha - Z \sin \beta) f'}{m}$$

ou bien

Rép. $$j = \frac{P \sin (\alpha - \varphi') + Z \cos (\beta - \varphi')}{m \cos \varphi'}.$$

Remarque. Cette formule aurait pu se déduire directement de celle du n° 52, où l'on aurait remplacé β par $180° - \beta$.

L'espace parcouru au bout du temps t est toujours

$$e = \frac{jt^2}{2}$$

6° *Le plan est incliné de α; la force, dirigée vers le bas, fait un angle β avec le plan; elle est en dessous du plan.*

L'accélération s'obtient en changeant dans le cas précédent β en $-\beta$.

Rép. $$j = \frac{P \sin (\alpha - \varphi') + Z \cos (\beta + \varphi')}{m \cos \varphi'}$$

L'espace est $$e = \frac{jt^2}{2}$$

Problème 330

Un corps de poids P *est lancé sur un plan horizontal avec une vitesse* v_0. *Quand s'arrêtera-t-il? Quel espace aura-t-il parcouru, le coefficient de frottement étant* f'? (Amiens, Bacc.)

Le mouvement du corps est uniformément retardé, et la force

retardatrice est le frottement $F' = f'P$; l'accélération est, en valeur absolue, $j = \frac{f'P}{m} = f'g$

Les formules qui permettent d'étudier le mouvement du corps sont $e = v_o t - \frac{jt^2}{2}$, $v = v_o - jt$

1° Le corps s'arrête quand l'on a $v = 0$, soit

$$v_o - jt = 0$$

d'où $t = \frac{v_o}{j} = \frac{v_o}{f'g}$

Rép. $t = \frac{v_o}{f'g}$.

2° L'espace parcouru jusqu'au point d'arrêt est

$$e = v_o \times \frac{v}{f'g} - \frac{f'g}{2}\left(\frac{v_o}{f'g}\right)^2$$

On en tire

Rép. $e = \frac{v_o^2}{2f'g}$.

Problème 330 bis.

Un corps de poids P *est lancé sur un plan horizontal avec une vitesse* a; *il s'arrête après avoir parcouru une longueur* l; *quel est le coefficient de frottement?*

Les formules (2) et (3) (n° 32) donnent, en remarquant qu'au moment de l'arrêt la vitesse est nulle,

$$0 = a - f'gt$$

$$l = at - \frac{1}{2} f'gt^2$$

La première égalité donne

$$t = \frac{a}{f'g} \qquad (1)$$

Cette valeur mise dans (2) fournit

$$l = \frac{a^2}{f'g} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{f'g}\right)^2 \times f'g = \frac{a^2}{2f'g} \qquad (2)$$

d'où l'on tire

Rép. $f' = \frac{a^2}{2gl}$. (3)

Ce résultat est indépendant du poids.

Application des formules trouvées dans cet exercice.

I. Un cube en chêne posé sur un madrier de chêne est mis en mouvement avec une vitesse initiale de 6 mètres par seconde, on demande :

1° La durée de son mouvement;

2° L'espace parcouru;

Le coefficient de frottement pendant le mouvement 0,42.

La formule (1) donne pour la durée du mouvement

$$t = \frac{a}{f'g} = \frac{6}{0{,}42 \times 9{,}8} = 1^{s}\,\frac{2}{3}$$

Pour l'espace parcouru, la formule (2) donne

$$l = \frac{a^2}{2f'g} = \frac{6^2}{2 \times 0{,}42 \times 9{,}8} = 4^{m}5$$

Ces résultats peuvent montrer la rapidité avec laquelle les corps en mouvement sont ramenés au repos dans les conditions pratiques.

II. Un cube en chêne placé à l'extrémité d'un madrier en chêne reçoit une impulsion par un coup sec de la paume de la main; il s'arrête après avoir parcouru $1^{m}20$; quelle vitesse initiale lui a-t-on imprimée? Coefficient de frottement 0,42.

La formule (2) $$l = \frac{a^2}{2f'g}$$

fournit $$a^2 = 2f'gl = 2 \times 0{,}42 \times 9{,}8 \times 1{,}2 = 9{,}87$$

$$a = 3^{m}14$$

Problème 330 ter.

Une force Z fait glisser, d'un mouvement uniforme, un corps de poids P sur une surface horizontale, le coefficient de frottement est f'; dire :

1° *L'intensité de cette force, si elle est parallèle au plan.*

Rép. $Z = P \operatorname{tg} \varphi' = Pf'$

2° *La force fait un angle β avec le plan.*

On a (n° 30)

Rép. $Z = P \dfrac{\sin \varphi'}{\cos(\beta - \varphi')}$ ou $Z = P \dfrac{f'}{f' \sin \beta + \cos \beta}$.

3° *Pour quel angle cette force sera-t-elle minimum ?*

La force Z sera minimum quand on aura

$$\cos(\beta - \varphi') = 1 \quad \text{ou} \quad \beta = \varphi'$$

c'est aussi ce que l'on a trouvé (n° 30).

Problème 331

Un corps lancé sur un parquet uni et horizontal parcourt en glissant 1^m80, *et il s'arrête à cause du frottement. Calculer la vitesse initiale, en supposant le coefficient de frottement de* 0,25. (Conc. général, 1875.)

Si P désigne le poids du corps, le frottement équivaut à une force retardatrice de 0,25P, et l'accélération négative du mouvement uniformément retardé du corps est donnée par la formule $j = \frac{F}{m}$, qui devient pour la question donnée

$$j = \frac{-0{,}25P}{m} = -0{,}25g$$

Les formules du mouvement du corps sont

$$e = v_o t + \frac{jt^2}{2} = v_o t - 0{,}25g\,\frac{t^2}{2} \qquad (1)$$

et

$$v = v_o + jt = v_o - 0{,}25gt \qquad (2)$$

Quand le corps s'arrête, $v = 0$; on aura alors

$$0 = v_o - 0{,}25gt$$

d'où

$$t = \frac{v_o}{0{,}25g} = \frac{4v_o}{g}$$

et l'espace parcouru étant 1^m80, la relation (1) deviendra

$$1{,}8 = v_o\,\frac{4v_o}{g} - \frac{0{,}25g}{2} \times \frac{16v_o^2}{g^2} = \frac{4v_o^2}{g} - \frac{4v_o^2}{2g} = \frac{2v_o^2}{g}$$

On en tire

Rép. $v_o = 2^m96$.

Problème 332

Quel travail consommera le frottement d'un corps de 50^k *sur une surface horizontale par mètre de chemin* ($f' = 0{,}45$), *si son mouvement est uniforme ?*

1° *La force est parallèle au plan ;*
2° *Elle fait un angle de* 20° *avec ce plan ;*
3° » » — 20° »
4° *Elle fait l'angle pour lequel cette force est minimum.*

1° *La force est parallèle au plan.*

La pression normale étant 50^k, la force de frottement est

$$50^k \times 0{,}45$$

Son travail par mètre est

$$50 \times 0{,}45 = 22^{kgm}$$

Rép. 22^{kgm}.

2° *La force fait un angle de* 20° *avec le plan.*

Il faut chercher la valeur de la force Z qui détermine le mouvement uniforme.

La force de frottement est

$$F = (P - Z'')\ 0{,}45$$

elle doit égaler Z' ; donc

$$Z' = (P - Z'')\ 0{,}45$$

d'où

$$Z \cos 20^\circ = (P - Z \sin 20^\circ)\ 0{,}45$$

d'où l'on tire

$$Z = \frac{P \times 0{,}45}{\cos 20^\circ + 0{,}45 \sin 20^\circ}$$

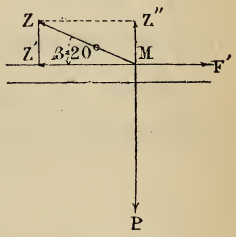


Fig. 449.

Alors on a

$$F = (P - Z \sin 20^\circ)\ 0{,}45 = \frac{P \times 0{,}45 \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ + 0{,}45 \sin 20^\circ}$$

Le travail de frottement par mètre de chemin parcouru sera

$$F \times 1 = P \times \frac{0{,}45 \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ + 0{,}45 \sin 20^\circ}$$

Rép. $19^{kgm}23$.

Remarque. D'une manière générale, si α est l'angle de la force, f' le coefficient de frottement, on a

$$Z = \frac{Pf'}{\cos \alpha + f' \sin \alpha} \qquad (1)$$

et $$\text{Travail} = Pf' \times \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + f'\sin\alpha}$$

ou, en posant $f' = \operatorname{tg}\varphi'$,

$$\text{Travail} = P\,\frac{\sin\varphi'\cos\alpha}{\cos(\varphi' - \alpha)} \qquad (2)$$

3° *La force fait un angle de* — 20° *avec le plan.*

En procédant de même que dans le deuxième cas, on obtient

$$\text{Travail} = P\,\frac{\sin\varphi'\cos\alpha}{\cos(\varphi' + \alpha)} = P\,\frac{\sin\varphi'\cos 20^\circ}{\cos(\varphi' + 20^\circ)}$$

On peut encore obtenir ce résultat en remplaçant dans (2) α par $-\alpha$.

En introduisant le coefficient de frottement, on a aussi

$$\text{Travail} = P \times \frac{0{,}45\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ - 0{,}45\sin 20^\circ}$$

Rép. $26^{\text{kgm}}24$.

4° *La force fait l'angle pour lequel elle est minimum.*

L'expression $Z = \dfrac{Pf'}{\cos\alpha + f'\sin\alpha} = \dfrac{P\sin\varphi'}{\cos(\alpha - \varphi')}$

est minimum quand on a $\cos(\alpha - \varphi') = 1$

soit $\alpha - \varphi' = 0$, d'où $\alpha = \varphi'$

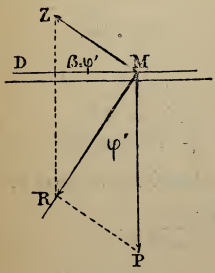


Fig. 450.

On peut arriver autrement à ce résultat. Quand il y a mouvement uniforme, la résultante R du poids P et de la force Z fait avec la normale MP précisément l'angle φ' de frottement, et la figure montre que Z est minimum quand PR est perpendiculaire à MR, c'est-à-dire quand l'angle ZMD $= \varphi'$.

Dès lors, soit en consultant la figure, soit en remplaçant α par φ' dans la formule (2), on obtient

$$\text{Trav.} = P\sin\varphi'\cos\varphi' = \frac{P}{2}\sin 2\varphi'$$

En calculant $\sin\varphi'$ et $\cos\varphi'$ en fonction de $\operatorname{tg}\varphi' = 0{,}45$ et remplaçant, il vient

Rép. $18^{\text{kgm}}7$.

Problème 333

Un corps de poids Q *glisse uniformément sur une surface horizontale pour laquellle le coefficient de frottement est* f' *sous l'action d'une force* Z; *quel angle fait la force avec le plan?*

Soient Z et Z'' les composantes de Z et F' la force de frottement. On doit avoir $Z' = F'$

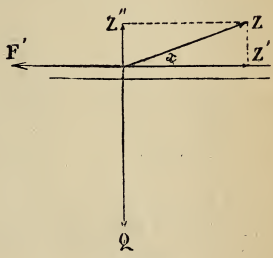


Fig. 451.

Or

$F' = f'(Q - Z'') = f'(Q - Z \sin x)$

et $Z' = Z \cos x$

La relation $Z' = F'$ devient

$$Z \cos x = f'(Q - Z \sin x) \quad (1)$$

ou $Z\sqrt{1 - \sin^2 x} = f'(Q - Z \sin x)$

Élevant au carré

$$Z^2(1 - \sin^2 x) = f'^2(Q^2 - 2QZ \sin x + Z^2 \sin^2 x)$$

ou $\sin^2 x\,(f'^2 + 1)\,Z^2 - \sin x \times 2QZf'^2 + f'^2Q^2 - Z^2 = 0$

d'où $\sin x = \dfrac{QZf'^2 \pm \sqrt{Q^2Z^2f'^4 - (f'^2 + 1)\,Z^2\,(f'^2Q^2 - Z^2)}}{Z^2\,(f'^2 + 1)}$

d'où

Rép. $\sin x = \dfrac{1}{Z\,(1 + f'^2)}\left(Qf'^2 \pm \sqrt{Z^2\,(1 + f'^2) - f'^2Q^2}\right) \quad (2)$

Discussion. Pour que la valeur de $\sin x$ soit réelle, il faut que l'on ait

$$Z^2\,(1 + f'^2) - f'^2Q^2 \geqq 0$$

ou

$$Z \geqq \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}}\,Q$$

Or

$$\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\sec \varphi'} = \sin \varphi'$$

donc on doit avoir $Z \geqq Q \sin \varphi'$

La valeur minimum de Z est $Q \sin \varphi'$, et pour cette valeur

si $x = \dfrac{1}{Z\,(1 + f'^2)}\,Qf'^2 = \dfrac{1}{Q \sin \varphi'} \times \dfrac{Q}{\sec^2 \varphi'} \times \operatorname{tg}^2 \varphi' = \sin \varphi$

d'où $x = \varphi'$

Ce résultat est aisé à justifier; nous avons déjà vu plusieurs fois que la valeur minimum de Z, pour démarrer ou faire mouvoir uniformément un corps, était donnée par la direction $x = \varphi'$; Z ne peut donc pas être inférieur à la valeur qui correspond à cet angle.

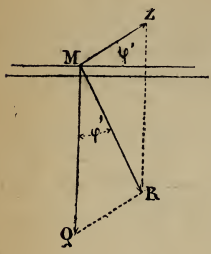


Fig. 452.

Examen des deux valeurs de sin x.

En se rapportant au n° 30, on trouve aisément l'explication des deux valeurs. On a vu, en effet, que pour des directions symétriques par rapport à la direction de la force Z alors qu'elle est minimum, les valeurs de Z étaient égales ; or cette direction du minimum $x = \varphi'$ est précisément fournie par le premier terme de la valeur de x ; le radical avec son double signe fournit donc des directions symétriques par rapport à celle du minimum et qui conviennent parfaitement.

Il faut toutefois que, pour être acceptables, les valeurs de x soient comprises entre 90° et $-(90° - \varphi')$.

Examen d'un cas particulier.

Si $Z = f'Q$, on voit à priori qu'il suffit que la force soit horizontale pour entretenir le mouvement uniforme ; la formule doit donc fournir

$$x = 0$$

Elle donne $\sin x = \frac{Q}{Z}\frac{f'^2}{1+f'^2} \pm \frac{Q}{Z}\frac{f'^2}{1+f'^2}$

et l'on obtient

1° $\sin x = 0$ d'où $x = 0$

ce qui est le résultat cherché.

2° On a aussi

$$\sin x = \frac{2Qf'^2}{Z(1+f'^2)} = 2 \times \frac{f'}{1+f'^2}$$

Ce résultat indique que Z peut bien être horizontale, mais que ce n'est pas nécessaire.

En effet,

$$\sin x = \frac{2f'}{1+f'^2} = 2 \times \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{1+\operatorname{tg}^2\varphi'} = \sin 2\varphi'$$

On en tire $x = 2\varphi'$

et l'on peut vérifier que la valeur $x = 2\varphi'$ satisfait à la relation (2).

On remarquera que les deux valeurs 0 et $2\varphi'$ sont symétriques par rapport à la direction du minimum, ce qui est conforme au résultat fourni par la discussion générale.

Problème 334

Quelle force Z *pourra donner à un corps pesant* $P = 100^k$ *une accélération de* $j = 1^m$ *sur un plan horizontal? le coefficient de frottement est* $f' = 0,45$

1° *La force est parallèle au plan.*

Le frottement à vaincre est $f'P$; la force Z capable d'entretenir le mouvement dans lequel l'accélération est j s'obtient par la relation

$$Z - f'P = mj$$

Or

$$m = \frac{P}{g}$$

Dès lors

$$Z = P\frac{j}{g} + f'P = P\left(\frac{j}{g} + f'\right)$$

Dans le cas actuel,

$$Z = 100\left(\frac{1}{9,80} + 0,45\right) = 55^k193$$

Rép. 55^k193.

2° *La force fait avec le plan un angle* α *de* 10°.

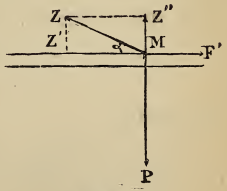


Fig. 453.

La force de frottement est

$$F' = (P - Z'')f' = (P - Z\sin\alpha)f'$$

La force accélératrice est

$$Z' - F' = Z\cos\alpha - f'(P - Z\sin\alpha)$$
$$= Z(f'\sin\alpha + \cos\alpha) - f'P$$

et l'on a

$$Z(f'\sin\alpha + \cos\alpha) - Pf' = mj$$

d'où l'on tire

$$Z = \frac{P\left(\frac{j}{g} + f'\right)}{f'\sin\alpha + \cos\alpha} \qquad (1)$$

Pour les données du problème, il vient

$$Z = \frac{100\left(\frac{1}{9,80} + 0,45\right)}{0,45\sin 10^\circ + \cos 10^\circ} = 52^k868$$

Rép. 52^k868.

3° *La force fait avec le plan un angle de* $-\alpha = 10°$.

On obtient, en procédant comme au 2°, ou simplement en changeant dans (1) α en $-\alpha$ ou $10°$ en $-10°$,

$$Z = \frac{P\left(\frac{j}{g} + f'\right)}{-f' \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{P\left(\frac{j}{g} + f'\right)}{\cos \alpha - f' \sin \alpha}$$

et, dans l'application,

$$Z = \frac{100\left(\frac{1}{9,80} + 0,45\right)}{-0,45 \sin 10° + \cos 10°} = 60^{k}862$$

Rép. $60^{k}862$.

4° *La force fait avec le plan l'angle pour lequel elle est minimum.*

La valeur de Z

$$Z = \frac{P\left(\frac{j}{g} + f'\right)}{f' \sin \alpha + \cos \alpha}$$

est minimum dans les conditions où

$$f' \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\cos (\alpha - \varphi')}{\cos \varphi'}$$

est maximum.

Cette expression est maximum quand on a

$$\cos (\alpha - \varphi') = 1$$

soit

$$\alpha - \varphi' = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \varphi'$$

On a alors

$$Z = \frac{P\left(\frac{j}{g} + f'\right)}{f' \sin \varphi' + \cos \varphi'} = P\left(\frac{j}{g} + f'\right) \cos \varphi'$$

L'application donne, en posant $\operatorname{tg} \varphi' = 0,45$,

$$Z = 100\left(\frac{1}{9,80} + 0,45\right) \frac{1}{\sqrt{1 + 0,45^2}}$$

Rép. $Z = 50^{k}355$.

Remarque. La valeur de Z obtenue au 3° donnerait lieu à discussion ; disons seulement que α ne peut pas être inférieur à $-(90 - \varphi')$, sinon il y aurait *arc-boutement ;* ce résultat se tire de ce que le dénominateur doit être positif. Nous avons suffi-

samment présenté des discussions de ce genre pour que le lecteur puisse s'essayer à celle-ci.

Problème 335

Mêmes questions qu'au problème 334, *pour faire monter le corps le long d'un plan incliné de* 20°.

1° *La force est parallèle au plan.*

La force accélératrice K est (fig. 454)

$$K = Z - F' - T$$

Or $\quad F' = f'N = f'P \cos \alpha \quad$ et $\quad T = P \sin \alpha$

dès lors $\quad K = Z - P\,(f' \cos \alpha + \sin \alpha)$

L'accélération j est

$$j = \frac{K}{m} = \frac{Kg}{P}$$

$$j = g\,\frac{Z - P\,(f' \cos \alpha + \sin \alpha)}{P}$$

Dans l'application, on demande la force qui peut donner à un corps de 100^k *une accélération de* 1^m.

De la formule précédente, on tire :

$$Z = P\left[\frac{j}{g} + (f' \cos \alpha + \sin \alpha)\right]$$

et l'application donne

$$P = 100\left(\frac{1}{9{,}80} + 0{,}45 \cos 20^\circ + \sin 20^\circ\right) = 86^{kgm}687$$

Rép. 86^{kgm}687.

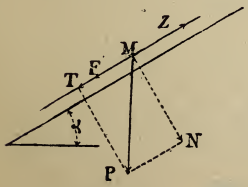


Fig. 454.

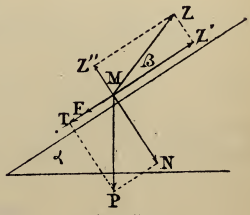


Fig. 455.

2° *La force fait avec le plan un angle de* 10°.

La force accélératrice est (fig. 455)

$$K = Z' - F' - T$$

$$= Z \cos \beta - f'\,(P \cos \alpha - Z \sin \beta) - P \sin \alpha$$

et l'accélération

$$j = g\,\frac{Z\,(\cos\beta + f'\sin\beta) - P\,(\sin\alpha + f'\cos\alpha)}{P}$$

On en tire $$Z = P\,\frac{\frac{j}{g} + (f'\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\beta + f'\sin\beta}$$

L'application donne

Rép. $Z = 81^{k}68$.

3° *La force fait avec le plan un angle de* — 10°.

On obtient directement

$$Z = P\,.\,\frac{\frac{j}{g}\,(f'\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\beta - f'\sin\beta}$$

valeur qui peut s'obtenir en changeant dans la précédente β en $-\beta$.

L'application à — 10° donne

Rép. $95^{k}77$.

4° *La force fait avec le plan l'angle pour lequel elle est minimum.*

La force Z est minimum, quand le dénominateur

$$\cos\beta + f'\sin\beta$$

de l'expression du 2° est maximum ; or on peut l'écrire

$$\frac{\cos(\beta - \varphi')}{\cos\varphi'}$$

Cette expression est maximum pour $\beta = \varphi'$.

Alors $$Z = P\left[\frac{j}{g} + (f'\cos\alpha + \sin\alpha)\right]\cos\varphi'$$

Remarque. Les quatre résultats que l'on vient d'obtenir donnent ceux du problème précédent, si l'on y fait $\alpha = 0$.

Problème 336

Mêmes questions qu'au problème 334, *alors qu'il s'agit de faire descendre le corps le long d'un plan incliné de* 20°.

On peut traiter ces questions directement comme nous venons de le faire dans l'exercice précédent ; mais on pose immédiate-

ment les résultats, en remarquant que la composante T du poids aide la force Z.

1re Rép. $Z = P\left(\frac{j}{g} + f' \cos \alpha - \sin \alpha\right) = 18^k286.$

2e Rép. $Z = \frac{P\left(\frac{j}{g} + f' \cos \alpha - \sin \alpha\right)}{\cos \beta + f' \sin \beta} = 17^k21.$

3e Rép. $Z = P \frac{\frac{j}{g} + f' \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \beta - f' \sin \beta} = 21^k09.$

4e Rép. $Z = P \cos \varphi' \left(\frac{j}{g} + f' \cos \alpha - \sin \alpha\right) = 18^k008.$

Problème 337

Deux corps P *de* 10^k *sont attachés aux extrémités d'une corde qui passe sur une poulie : le premier glisse sur un plan horizontal avec un frottement* $f' = 0,30$; *l'autre tombe suivant la verticale ; la corde qui tire le premier corps est parallèle au plan. Quel sera le chemin parcouru au bout de la première seconde ?*

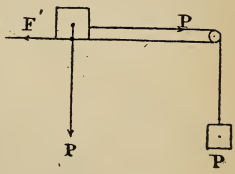


Fig. 456.

La force qui détermine le mouvement est

$$K = P - F'$$

Or $$F' = f'P$$

La masse en mouvement étant $\frac{2P}{g}$, l'accélération b du système est donnée par la formule

$$F = mb \quad \text{ou} \quad P - f'P = \frac{2P}{g} \times b$$

qui fournit $$b = \frac{g\,(1 - f')}{2}$$

La formule $$e = \frac{bt^2}{2}$$

donne, pour l'espace parcouru pendant une seconde,

$$e_1 = \frac{b}{2}$$

donc $$e_1 = \frac{b}{2} = \frac{g}{2} \times \frac{1 - f'}{2}$$

L'application fournit

$$e_1 = \frac{9{,}80}{2} \times \frac{1 - 0{,}3}{2} = 1^{m}72$$

Rép. $1^{m}72$.

Remarques. I. La formule

$$b = \frac{g}{2} \times \frac{1 - f'}{2}$$

devient pour $$f' = 0, \quad b = \frac{g}{2}$$

II. Le poids P des corps n'entre pas dans le résultat.

Problème 338

Même question ; le corps remonte un plan incliné de 30°.

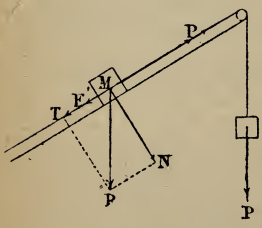


Fig. 457.

La force accélératrice est

$$K = P - F' - T = P - f'P\cos\alpha - P\sin\alpha$$

La masse en mouvement étant 2P, l'accélération est

$$j = \frac{P - f'P\cos\alpha - P\sin\alpha}{\frac{2P}{g}}$$

$$= g \times \frac{1 - f'\cos\alpha - \sin\alpha}{2}$$

Et comme l'espace parcouru pendant la première seconde est moitié de l'accélération, on a

$$e_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{1 - f'\cos\alpha - \sin\alpha}{2}\right)$$

L'application donne

Rép. $$e_1 = \frac{g}{2}\left(\frac{1 - 0{,}30\cos 30^\circ - \sin 30^\circ}{2}\right) = 0^{m}589.$$

Problème 339

Même question ; le corps descend un plan incliné de 30°.

La force accélératrice est $K = P + T - F$

On obtient comme ci-dessus

$$j = g \times \frac{1 - f' \cos \alpha + \sin \alpha}{2}$$

Rép. $e = 3^m041$.

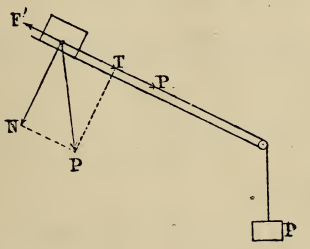


Fig. 458.

Problème 340

Même question ; le premier corps monte sur un plan incliné de 30°, $f' = 0{,}20$; *le second descend le long d'un autre plan dont l'inclinaison est* 60°; *le coefficient de frottement* $f_1' = 0{,}30$.

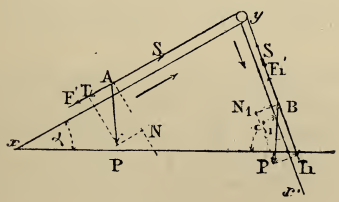


Fig. 459.

Le mouvement a lieu suivant le sens xyx'.

Désignons par S la tension du fil. Pour la boule A, *seule*, on a une force accélératrice

$$K = S - F' - T = S - f'P \cos \alpha - P \sin \alpha$$

et une accélération

$$j = g \times \frac{S - f'P \cos \alpha - P \sin \alpha}{P} \qquad (1)$$

Pour la boule B seule, on a une force accélératrice

$$K = -S + T_1 - F_1' = -S + P \sin \alpha' - f_1' P \cos \alpha'$$

et une accélération

$$j = g \times \frac{-S + P \sin \alpha' - f_1' P \cos \alpha'}{P} \qquad (2)$$

Cette accélération est évidemment la même que pour A.
En additionnant (1) et (2) et divisant par 2, il vient

$$j = g \times \frac{\sin \alpha' - \sin \alpha - f' \cos \alpha - f_1' \cos \alpha'}{2}$$

L'espace parcouru pendant la première seconde sera

$$e_1 = \frac{2}{j}$$

$$e_1 = g \times \frac{\sin \alpha' - \sin \alpha - f' \cos \alpha - f_1' \cos \alpha'}{4}$$

Rép. $e = 0^m105$.

Remarques. I. On peut arriver autrement au même résultat. La force accélératrice dans le mouvement de l'ensemble du système est

$$U = T_1 - F_1' - F' - T = P \sin \alpha' - f_1' P \cos \alpha' - f' P \cos \alpha - P \sin \alpha$$

La masse en mouvement étant 2P, l'accélération est par suite

$$j = \frac{U}{m} = U \times \frac{g}{P}$$

d'où $$j = g \times \frac{\sin \alpha' - \sin \alpha - f_1' \cos \alpha' - f' \cos \alpha}{2}$$

II. C'est prématurément que l'énoncé indique le sens du mouvement ; il pourrait se faire, suivant les valeurs relatives des coefficients de frottement, que ce fût le corps A qui entraînât le corps B ; le résultat négatif de j en avertirait ; il faudrait alors considérer la question sous son vrai point de vue.

Problème 341

Dans le problème précédent, le frottement est le même sur les deux plans ; quel devra être le coefficient de frottement pour que les deux corps soient en équilibre ?

L'équilibre s'entend du repos ou du mouvement uniforme ; les conditions pour ces deux sortes d'équilibre sont les mêmes, il

suffit de remplacer dans celles qui conviennent au mouvement uniforme φ par φ' ou f par f'

Pour le mouvement uniforme, l'accélération j est nulle ; on a donc (Probl. 340) $\sin\alpha' - \sin\alpha - 2f'(\cos\alpha' + \cos\alpha) = 0$

d'où $$f' = \frac{\sin\alpha' - \sin\alpha}{2(\cos\alpha' + \cos\alpha)}$$

Rép. $f = 0{,}133$.

Problème 342

Un mobile descend un plan incliné en parcourant une distance de 35^m. *La projection de ce chemin sur le plan horizontal est égale à* 18^m. *Le coefficient de frottement est* 0,20. *Quel temps le mobile mettra-t-il à parcourir la distance de* 35^m ? (Nancy, bacc.)

La force accélératrice du mouvement est

$$Q = T - F' = P\sin\alpha - f'P\cos\alpha$$

et l'accélération

$$j = \frac{Q}{m} = g \times \frac{Q}{P}$$

$$j = g \times (\sin\alpha - f'\cos\alpha)$$

Le triangle ABC fournit

$$AC = AB\cos\alpha$$

d'où $$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{18}{35}$$

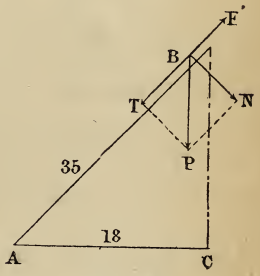


Fig. 460.

Or $$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{18}{35}\right)^2} = \frac{\sqrt{35^2 - 18^2}}{35}$$

donc $$j = 9{,}80\left(\frac{\sqrt{35^2 - 18^2}}{35} - \frac{18}{35} \times 0{,}20\right) = 7^m336$$

Le temps mis pour parcourir 35^m est donné par la formule

$$e = \frac{jt^2}{2}$$

qui fournit $$t = \sqrt{\frac{2e}{j}}$$

En remplaçant e et j par leurs valeurs, il vient

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 35}{7{,}336}}$$

Rép. $t = 3^s08$.

Problème 343

Une force horizontale de 260k *sollicite un corps pesant* 345k *à monter le long d'un plan incliné de* $\alpha = 25°$, *le coefficient de frottement étant* 0,15. *On demande le temps que le corps mettra à parcourir* 100m, *et quelle sera la vitesse au bout de ce temps.*

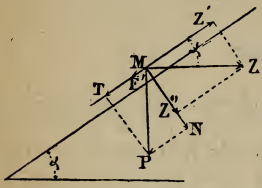


Fig. 461.

La force accélératrice est

$$Q = Z' - F' - T$$

Or

$$F' = f'(N + Z'') = f'(P \cos \alpha + Z \sin \alpha)$$

donc $\quad Q = Z \cos \alpha - f' (P \cos \alpha + Z \sin \alpha) - P \sin \alpha$

et l'accélération est $\quad j = \frac{Q}{m} = g \times \frac{Q}{P}$

$$j = g \times \frac{Z \cos \alpha - f' (P \cos \alpha + Z \sin \alpha) - P \sin \alpha}{P}$$

$$= g \times \frac{\cos \alpha (Z - f'P) - \sin \alpha (Zf' + P)}{P}$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, on a

$$j = 9{,}80 \times \frac{260 \times 0{,}906 - 0{,}15(345 \times 0{,}906 + 260 \times 0{,}423) - 345 \times 0{,}243}{345}$$

ou $\quad j = 0^{m},74$

Les formules du mouvement uniformément accéléré

$$e = \frac{jt^2}{2}, \quad v = jt$$

fournissent pour un espace de 100m un temps

$$t = \sqrt{\frac{2e}{j}} = 16^{s}4$$

et une vitesse, au bout de ce temps, qui est

$$v = jt = \sqrt{2ej} = 12^{m}2$$

Rép. $t = 16^{s}4$, $v = 12^{m}2$.

Problème 344

Un corps est sollicité à monter le long d'un plan incliné de 30°. *Le corps pèse* 400k. *Quelle force faudra-t-il lui appliquer parallèlement à la ligne de plus grande pente, pour lui faire parcourir un espace de* 20m *en* 5s ? *Le coefficient de frottement* $f' = 0{,}10$.

L'accélération dans ce mouvement se tire de la formule

$$e = \frac{jt^2}{2}$$

qui donne $j = \frac{2e}{t^2}$

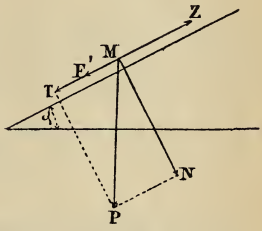


Fig. 462.

A la force accélératrice

$$Z - T - F'$$

correspond l'accélération

$$j = \frac{Z - T - F'}{m}$$

On en tire $Z = mj + T + F'$

Or $T = P \sin \alpha, \quad N = P \cos \alpha$

$$F' = Nf' = f'P \cos \alpha \quad \text{et} \quad j = \frac{2e}{t^2}$$

donc

$$Z = \frac{2me}{t^2} + P \sin \alpha + f'P \cos \alpha = P\left(\frac{2e}{gt^2} + \sin \alpha + f' \cos \alpha\right)$$

L'application donne

$$Z = 400\left(\frac{1{,}6}{g} + \sin 30^\circ + 0{,}10 \cos 30^\circ\right) = 400 \times 0{,}75$$

Rép. 300k environ.

Problème 345

On lance un corps avec une vitesse de 10m *sur un plan incliné de* 30°. *Quel chemin aura-t-il parcouru avant de s'arrêter ? Le coefficient de frottement* $f' = 0{,}40$.

1° *Le corps est lancé vers le haut.*

La force retardatrice du mouvement est

$$T + F' = P \sin \alpha + f' P \cos \alpha$$

L'accélération j est négative, et sa valeur absolue est

$$j = \frac{P \sin \alpha + f' P \cos \alpha}{m} = g (f' \cos \alpha + \sin \alpha)$$

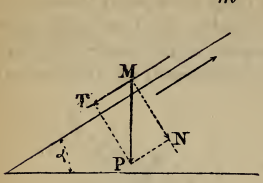


Fig. 463.

Les formules du mouvement retardé sont

$$v = v_o - jt \text{ et } e = v_o t - \frac{jt^2}{2}$$

Le point culminant sera atteint pour $v = 0$,

soit $\qquad v_o = jt$

d'où l'on déduit l'espace parcouru

$$e = \frac{v_o^2}{2j} \qquad \text{(M., n° 197.)}$$

On aura donc pour l'espace parcouru jusqu'au sommet de la course

$$e = \frac{v_o^2}{2g (f' \cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{10^2}{2 \times 9{,}80 (0{,}40 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)} = 6^m$$

Rép. 6^m.

Remarque. Il s'agit de savoir si à ce moment le corps redescendra de lui-même. On a

$$\text{tg } \varphi' = f' = 0{,}40$$

d'où $\qquad \varphi' = 22^\circ$ environ

Si l'angle φ de frottement *au départ*, qui est supérieur à φ', est néanmoins moindre que 30°, angle d'inclinaison du plan, le corps descendra de lui-même et ne s'arrêtera jamais; son mouvement sera accéléré.

2° *Le corps est lancé vers le bas.*

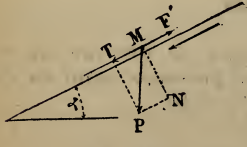


Fig. 464.

La force accélératrice du mouvement est

$$T - F' = P \sin \alpha - f' P \cos \alpha$$

Or, dans le cas actuel, on a

$$T - F' = P (\sin 30^\circ - 0{,}40 \cos 30^\circ)$$
$$= P (0{,}50 - 0{,}346)$$

c'est-à-dire que la force accélératrice est positive; le corps ne s'arrêtera donc jamais.

L'accélération est $j = \frac{T - F'}{m} = g(\sin \alpha - f' \cos \alpha)$

Remarque. Si cette accélération était négative, il y aurait lieu de rechercher le temps d'arrêt et le chemin parcouru; on opérerait comme dans la première partie du problème.

Problème 346

Travail consommé dans une heure par le frottement d'une roue hydraulique sur ses tourillons : la roue pèse 18000^{k}, *elle fait* 6 *tours par minute; le diamètre des tourillons est* 0^{m}20; *les coussinets étant en bronze, le coefficient de frottement est* 0,09.

Nous généralisons cette question en même temps que nous la traitons dans le cas particulier donné.

Cherchons le frottement pour un tour.

La force de frottement est

$$18000 \times 0{,}09 = f'N.$$

Le chemin parcouru $2\pi \times 0{,}10 = 2\pi r$

Le travail pour un tour est (n° 56) *

$$(18000 \times 0{,}09) \times 2\pi \times 0{,}10 = f'N \times 2\pi r$$

et *par heure* $18000 \times 0{,}09 \times 2\pi \times 0{,}10 \times (6 \times 60)$

ou, n étant le nombre de tours par minute,

$$f'N \times 2\pi r \times n \times 60$$

Rép. 36643^{kgm}.

Remarque. La force de frottement $f'N$ est indépendante du rayon du tourillon, mais il n'en est pas de même du travail, il augmente avec r; c'est pourquoi il faut donner aux tourillons le plus petit diamètre compatible avec la solidité.

Problème 347

Une voiture à deux roues pèse 1550^{k}, *le rayon des roues est* 0^{m}80, *le diamètre des tourillons est* 0^{m}07. *Quel sera le travail absorbé par le frottement de l'essieu, si la voiture a parcouru* 20^{km} ? *Le coefficient de frottement est* 0,09.

Le nombre de tours faits pour parcourir 20^{km} est

$$\frac{20000}{2\pi \times 0{,}80} = \frac{12500}{\pi}$$

---

* Voir n°s 53 et suivants.

Le travail absorbé par le frottement pendant 1 tour est, pour les deux roues ensemble, en remarquant que chacune d'elles ne porte que la moitié du poids (voir probl. 346),

$$2 \times 0{,}09 \times \frac{1550}{2} \times \pi \times 0{,}07$$

et pour les 20^{km},

$$2 \times 0{,}09 \times \frac{1550}{2} \times \pi \times 0{,}07 \times \frac{12500}{\pi}$$

Rép. 122062^{kgm}.

Problème 348

On place une sphère dont le poids est P *dans l'intérieur d'un angle dièdre dont l'arête est horizontale et qui est formé par deux lames rectangulaires également inclinées, homogènes, égales entre elles, libres de tourner autour de l'arête commune. Les bords supérieurs des deux lames sont réunis par un fil dont on augmente graduellement la tension. On demande la valeur de cette tension, lorsque la sphère commence à prendre un mouvement ascendant;* f' *est le coefficient du frottement sur chacune des lames; ces lames ont* b *pour largeur et font un angle* α *avec l'horizon; chacune pèse* Q^k.

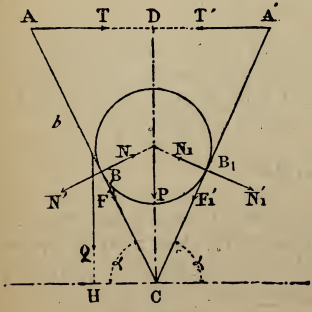


Fig. 465.

La tension T du fil et le poids P de la sphère déterminent en B et B_1 des pressions normales égales, N' et N_1'. A ces pressions correspondent des forces de frottement F et F_1' dirigées vers le bas.

A mesure que la tension grandit, les réactions normales augmentent, et il peut arriver un instant où la boule glisse sur les deux plans.

En projetant alors sur la verticale toutes les forces qui sollicitent la sphère, on a

$$P + 2f'N \sin \alpha - 2N \cos \alpha = 0$$

d'où

$$N = \frac{P}{2(\cos \alpha - f' \sin \alpha)}$$

ou, en posant $f' = \operatorname{tg} \varphi'$,

$$N = \frac{P \cos \varphi'}{2 \cos (\alpha + \varphi'}$$

Si nous considérons la lame AB, elle est en équilibre sous l'action de T, de la pression N' et de son poids Q. En prenant les moments par rapport à C, on a

$$Q \times CH + N \times BC - T \times CD = 0$$

ou
$$Q \frac{b}{2} \cos \alpha + Nr \operatorname{tg} \alpha = T \times b \sin \alpha$$

d'où
$$T = \frac{2Nr \operatorname{tg} \alpha + Qb \cos \alpha}{2b \sin \alpha}$$

En remplaçant N par sa valeur, on obtient

$$T = \frac{Pr \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi' + Qb \cos \alpha \cos (\alpha + \varphi')}{2b \sin \alpha \cos (\alpha + \varphi')}$$

Remarques. I. Supposons les lames non pesantes; alors

$$T = \frac{Pr \cos \varphi'}{2b \cos a \cos (\alpha + \varphi')} \qquad (1)$$

Si, de plus, il n'y a pas de frottement, on a

$$T = \frac{Pr}{2b \cos^2 \alpha}$$

II. Si l'on a $\alpha + \varphi' = 90^\circ$, la formule (1) donne pour T une valeur infinie, c'est-à-dire qu'il y a coincement pour une valeur de l'angle α complémentaire de l'angle de frottement.

Problème de l'échelle. — Problème 349

349. *On pose une barre* AB, *droite et homogène, d'un poids donné* P, *de manière qu'elle appuie son extrémité supérieure* B *contre un mur vertical* BC, *et son extrémité* A *sur un sol horizontal. Elle est d'ailleurs dans un plan perpendiculaire au mur. On demande :*

1° *Quel est l'angle* α *le plus grand qu'elle puisse faire avec le mur sans tomber, connaissant ses deux coefficients de frottement* f *et* f' *par rapport au sol et par rapport au mur ;*

2° *Les valeurs des réactions normales du sol et du mur au moment où l'angle* α *atteint sa valeur maxima ;*

3° *Dans l'hypothèse de* f = f', *on demande quelle relation*

il y a entre l'angle limite α et l'angle commun de frottement. (Douai, conc. Ens. sp.)

1° *Angle α le plus grand que puisse faire l'échelle avec le mur.*

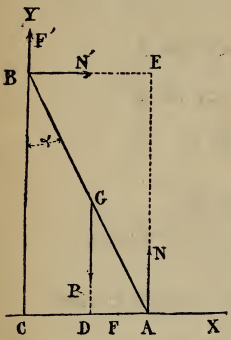


Fig. 466.

Soit P le poids de la barre.

Au moment où l'équilibre sera rompu, A ira à droite, B descendra ; en ces deux points, il y a des réactions normales N et N′ et des forces de frottement F, F′ qui y correspondent ; on a

$$F = Nf, \quad F' = N'f'$$

L'équilibre qui existe entre P, N, N′, F, F′ donne les trois équations

Proj. sur Y $\quad P - N - f'N' = 0 \qquad (1)$

Proj. sur X $\quad N' - fN = 0 \qquad (2)$

Moments par rapport au point A

$$P \times AD - N' \times AE - f'N' \times AC = 0 \qquad (3)$$

Cette dernière relation devient successivement

$$P \times \frac{AB}{2} \sin \alpha - N' \times AB \cos \alpha - f'N' \times AB \sin \alpha = 0$$

$$\frac{P}{2} \sin \alpha - N' \cos \alpha - f'N' \sin \alpha = 0$$

et en divisant par cos α

$$\operatorname{tg} \alpha \left(\frac{P}{2} - f'N' \right) = N' \qquad (4)$$

Or les équations (1) et (2) fournissent pour N et N′

$$N' = \frac{fP}{1 + ff'} \quad \text{et} \quad N = \frac{P}{1 + ff'}$$

La première valeur mise dans (4) donne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{1 - ff'}$$

2° *Valeurs des réactions.*

$$N' = \frac{fP}{1 + ff'}, \quad N = \frac{P}{1 + ff'}$$

3° *Cas où* f = f′.

Si $f = f'$, il vient $\quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{1 - f^2}$

Remarque. On a, en fonction de l'angle φ de frottement,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

ou $$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\varphi$$

d'où $$\alpha = 2\varphi$$

Ainsi, lors de l'équilibre, l'angle de la base avec le mur est double de l'angle de frottement.

Considérations géométriques. Ce dernier résultat peut être obtenu par la Géométrie.

A l'instant du démarrage, il y a les deux forces de frottement

$F = fN$ en A, $F' = fN'$ en B

Soient R et R' les résultantes de N et de fN, de N' et de fN; il est à remarquer qu'elles font un angle φ avec les normales AN et BN'.

Le poids P est précisément égal et de sens contraire à la résultante de R et de R'; le point I de rencontre de R et de R' est donc sur la verticale GP.

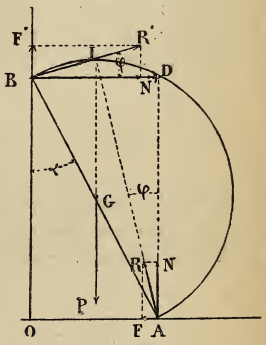


Fig. 467.

L'angle BIA est droit, car les angles IBD et DAI étant égaux tous deux à φ, et le côté DA perpendiculaire à DB, AI est par suite perpendiculaire à BI; donc une circonférence décrite sur AB comme diamètre contiendra les points I et D.

Or l'arc BI = arc ID

donc l'angle BAI = φ

par suite, on a $\alpha = \text{BAD} = \text{BAI} + \varphi = 2\varphi$

d'où $\alpha = 2\varphi$

Résultat déjà trouvé.

Discussion. Dans le cas où $f = f'$, on a

$$\alpha = 2\varphi$$

et encore $$N' = f \times \frac{P}{1 + f^2}, \quad N = \frac{P}{1 + f^2}$$

1° On voit que l'échelle peut être d'autant plus inclinée que le frottement est plus considérable, sans cependant pouvoir être horizontale. Cette horizontalité correspondrait en effet à $\alpha = 90°$, soit $\varphi = 45°$; mais $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 45° = 1$ donne $f = 1$; or le coefficient de frottement ne peut jamais atteindre 1. Le coefficient 1 dans cette question indiquerait une fixation des points A et B.

2° Les pressions normales en A et en B sont bien différentes, la seconde n'est que la fraction f de la première.

La pression en A, $N = \frac{P}{1 + f^2}$, décroît lorsque f croît ; sa valeur maximum a lieu quand $f = 0$, alors $N = P$ et l'échelle est verticale, car $\alpha = 2\varphi = 0$; le sol supporte tout, dans cette hypothèse. La relation N′ justifie encore ce résultat, car pour $f = 0$, elle fournit $N' = 0$.

Problème 350

Un point pesant est posé sur la circonférence d'un cercle dont le plan est vertical. Quelle est la plus basse des positions qu'il peut occuper, le coefficient de frottement au départ étant f?

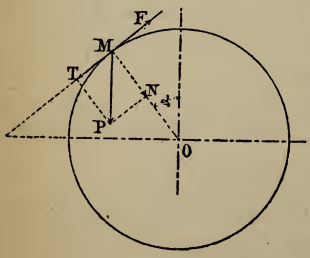


Fig. 468.

La position cherchée M sera déterminée, si l'on connaît l'angle α du rayon MO et de la verticale.

Le poids P se décompose en deux forces, l'une N suivant le rayon, l'autre tangentielle T ; la première donne lieu à une force de frottement $F = Nf$ qui doit égaler T lors du départ.

On a $Nf = T$

ou $P \cos \alpha \times f = P \sin \alpha$

d'où $f = \operatorname{tg} \alpha$

Or $f = \operatorname{tg} \varphi$; donc $\varphi = \alpha$

Rép. La plus basse position est celle pour laquelle le rayon fait avec la verticale un angle égal à l'angle de frottement au départ.

Problème 351

Une barre homogène AB *dont le poids est* P *et la longueur* l *repose par une de ses extrémités* A *sur un plan horizontal* HH'; *son autre extrémité* B *est soutenue par un fil qui s'enroule sans frottement sur une poulie fixe* C *et supporte un poids* Q. *On demande d'étudier les conditions d'équilibre de ce système, le coefficient de frottement au départ entre la barre et l'horizontale étant* f.

A l'extrémité A, la barre appuie sur le plan avec une force N qui donne naissance à une force de frottement F, et l'on a

$$F = Nf = N \operatorname{tg} \varphi$$

Supposons le mouvement sur le point de se produire.

La barre AB est en équilibre sous l'action de son poids P et de la tension Q du fil, de la réaction N et de la force de frottement F.

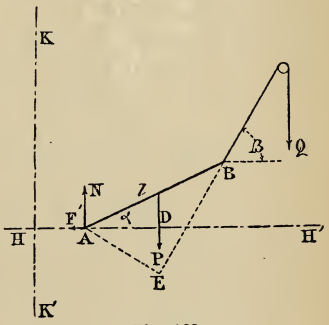


Fig. 469.

On aura donc

pr. (KK') $\quad P - Q \sin \beta - N = 0 \quad (1)$

pr. (HH') $\quad Q \cos \beta - fN = 0 \quad (2)$

moments (A) $\quad P \times AD - Q \times AE = 0 \quad (3)$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{Pl \cos \alpha}{2} - Ql \sin (\beta - \alpha) = 0$$

ou

$$P \cos \alpha = 2Q \sin (\beta - \alpha)$$

La valeur de N tirée de (1) et mise dans (2) fournit

$$Q (\cos \beta + f \sin \beta) = fP$$

ou, en remarquant que $f = \operatorname{tg} \varphi$,

$$Q \cos (\varphi - \beta) = P \sin \varphi$$

Il reste donc le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} P \cos \alpha = 2Q \sin (\beta - \alpha) & (5) \\ P \sin \varphi = Q \cos (\varphi - \beta) & (6) \end{array} \right.$$

de deux équations à deux inconnues α et β.

Ces angles étant trouvés, on obtient facilement une construction géométrique qui donne la position de la barre.

Remarque. La résolution directe du système précédent ne se fait pas aisément; nous allons procéder indirectement en donnant d'abord une relation entre α, β, P et Q.

En développant les équations, il vient

$$P \cos \alpha = 2Q (\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta) \qquad (7)$$

et

$$P \sin \varphi = Q (\cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta)$$

En multipliant la première par $\sin \varphi$ et la seconde par $\cos \alpha$, puis soustrayant, on a

$$0 = Q (\sin \beta \cos \alpha \sin \varphi - 2 \sin \alpha \cos \beta \sin \varphi - \cos \varphi \cos \beta \cos \alpha)$$

d'où

$$0 = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0$$

et

$$\operatorname{tg} \varphi (\operatorname{tg} \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha) = 1 \qquad (8)$$

De (8) on tire $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + 2 \operatorname{tg} \alpha$

et

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right)$$

Or (7) fournit $P = 2Q (\sin \beta - \operatorname{tg} \alpha \cos \beta)$

d'où, en remplaçant $\operatorname{tg} \alpha$ par sa valeur,

$$P = 2Q \left[\sin \beta - \cos \beta \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \beta - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \right) \right]$$

$$P = Q \left(\sin \beta + \frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \varphi} \right)$$

En résolvant par rapport à β et remplaçant $\operatorname{tg} \varphi$ par f, on trouve

$$\sin \beta = \frac{\dfrac{P}{Q} \pm \sqrt{f^2 - \dfrac{P^2}{Q^2} \times \dfrac{1}{f^2} + 1}}{1 + \dfrac{1}{f^2}}$$

La relation (8) fournira ensuite l'angle α.

Problème 352

Deux plans inclinés AB, AB′ *sont adossés l'un à l'autre; une petite poulie fixe est placée en* D *à une hauteur* h, *au-dessus de leur arête commune* A. *Cette poulie reçoit un fil très délié dont la longueur est* l *et aux extrémités duquel sont*

attachés deux poids P *et* P′ ; *ces poids reposent sur les deux plans.*

On demande quelle est leur position lorsque le premier est sur le point de glisser dans le sens AB.

Désignons par α et α' les inclinaisons des plans, et prenons pour inconnues les angles β et β' des cordons de la verticale. Les réactions N et N′ des deux plans donnent lieu à des forces de frottement $F = fN$, $F_1 = f_1N'$ en sens contraire du mouvement, f et f_1 désignant les coefficients de frottement au départ pour chacun des plans.

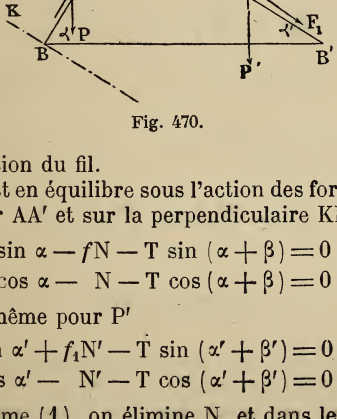


Fig. 470.

Soit T la tension du fil.

Le poids P est en équilibre sous l'action des forces P, N, fN, T.

Projetons sur AA′ et sur la perpendiculaire KK′

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pr. sur AB} & P \sin\alpha - fN - T\sin(\alpha+\beta) = 0 \\ \text{» KK′} & P\cos\alpha - N - T\cos(\alpha+\beta) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

On aura de même pour P′

$$\left.\begin{array}{l} P'\sin\alpha' + f_1N' - T\sin(\alpha'+\beta') = 0 \\ P'\cos\alpha' - N' - T\cos(\alpha'+\beta') = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dans le système (1), on élimine N, et dans le système (2) N′, on obtient alors les deux équations

$$P(\sin\alpha - f\cos\alpha) = T[\sin(\alpha+\beta) - f\cos(\alpha+\beta)]$$

$$P'(\sin\alpha' + f_1\cos\alpha') = T[\sin(\alpha'+\beta') + f_1\cos(\alpha'+\beta')]$$

Et en divisant membre à membre

$$\frac{P}{P'} \times \frac{(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{(\sin\alpha' + f_1\cos\alpha')} = \frac{\sin(\alpha+\beta) - f\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha'+\beta') + f_1\cos(\alpha'+\beta')}$$

ou, en remplaçant f_1 et f par leurs valeurs tg φ_1 et tg φ,

$$\frac{P}{P'} \times \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha' + \varphi_1)} = \frac{\sin(\alpha - \varphi + \beta)}{\sin(\alpha' + \varphi_1 + \beta')}$$

Posons $\alpha - \varphi = \delta, \quad \alpha' + \varphi_1 = \sigma$

on aura $$\frac{P}{P'} \times \frac{\sin\delta}{\sin\sigma} = \frac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(\sigma + \beta')}$$

Les triangles PSA, P'SA fournissent les relations

$$PS = \frac{h \cos\alpha}{\cos(\alpha + \beta)}, \quad P'S = \frac{h \cos\alpha'}{\cos(\alpha' + \beta')}$$

Or $$PS + P'S = l$$

d'où $$l = \frac{h \cos\alpha}{\cos(\alpha + \beta)} + \frac{h \cos\alpha}{\cos(\alpha' + \beta')} \qquad (2)$$

On a donc à résoudre par rapport à β et à β' le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{P}{P'} \times \dfrac{\sin\delta}{\sin\sigma} = \dfrac{\sin(\delta + \beta)}{\sin(\sigma + \beta')} \\ l = h\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos(\alpha + \beta)} + \dfrac{\cos\alpha'}{\cos(\alpha' + \beta')}\right) \end{array} \right.$$

Remarque. Si l'on ne tient pas compte du frottement, la première équation devient

$$\frac{P}{P'} \times \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha' + \beta')} \qquad \text{(V. Pr. 151.)}$$

Problème 353

Une tige homogène AB, *ayant* 1^m *de longueur et pesant* 4^k, *repose sur un sol horizontal* OA *et s'appuie contre un mur vertical* OB; *elle est située dans un plan perpendiculaire à l'intersection du mur avec le sol. A l'aide d'un corps pesant* AC, *posé sur le sol en* A, *on veut maintenir la tige en équilibre dans une position telle que* OA *soit égal à* 0^m80.

Quel doit être au minimum le poids de ce corps?

Le mur est parfaitement poli ; quant au sol, il exerce un frottement sur la tige et sur le corps AC; *les coefficients de ce frottement sont* 0^m40, *relativement à la tige, et* 0,70 *pour le corps.* (Beauvais et Nancy, Conc. sp. 1879.)

1re méthode. Les deux forces de frottement F et F′ relatives à la barre et au corps sont

$$F = N' \times 0{,}4, \quad F' = X \times 0{,}70$$

et elles sont dirigées en sens inverse du mouvement possible.

Dès lors la barre AB est en équilibre (fig. 472), sous l'action de son poids 4^k des forces de frottement F, F′ et des réactions normales en A et en B; on peut de suite remarquer que la réaction normale N en A est 4^k.

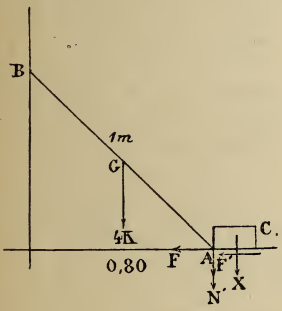


Fig. 471.

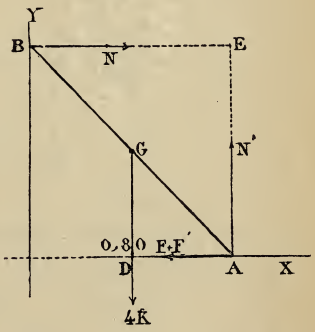


Fig. 472.

On aura les trois équations

Pr. sur X	$N - (F + F') = 0$	(1)
Pr. sur Y	$4 - N = 0$	(2)
Mom. A	$4 \times AD - N \times AE = 0$	(3)

La relation (1) fournit

$$N = N' \times 0{,}4 + X \times 0{,}70 = 4 \times 0{,}4 + X \times 0{,}70$$

et (3)

$$N = 4 \times \frac{AD}{AE} = 4 \times \frac{0^m40}{\sqrt{1 - \overline{0{,}8}^2}} = 4 \times \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}36}} = 4 \times \frac{4}{6}$$

Dès lors, en égalant les deux valeurs de N,

$$4 \times 0{,}4 + 0{,}70\,X = 4 \times \frac{2}{3}$$

d'où

$$X = \frac{\frac{8}{3} - 1{,}6}{0{,}7} = \frac{32}{21} = 1^k\,\frac{11}{21}$$

Rép. Le poids minimum est $1^k\,\frac{11}{21}$.

2e méthode. Le poids de 4^k se décompose en deux forces de 2^k appliquées en B et en A; en B les 2^k sont la résultante des deux forces N_1 et T, l'une normale et l'autre dirigée suivant la barre; N_1 est détruite par le plan, T se transporte en A, où elle se décompose en une force verticale de 2^k et une horizontale S égale à N_1.

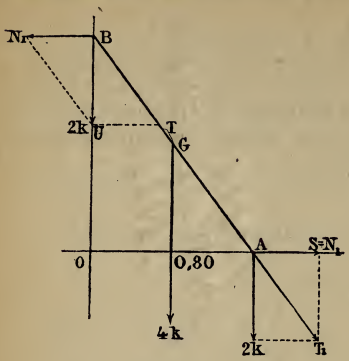


Fig. 473.

En A il y a une force normale de 4^k qui donne lieu à une force de frottement égale à

$$4^k \times 0{,}40 = 1^k60$$

Il faudra encore faire naître un frottement $S - 1^k60$ pour qu'il y ait équilibre.

Or les deux triangles N_1BU et OBA fournissent

$$\frac{N_1 \text{ ou } S}{BU} = \frac{0{,}80}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = \frac{0{,}80}{0{,}60} = \frac{8}{6}$$

d'où

$$S = BU \times \frac{4}{3} = 2 \times \frac{4}{3}$$

Dès lors la force de frottement à faire naître doit être

$$\frac{8}{3} - 1{,}60 = \frac{16}{15}$$

Or pour le corps que l'on doit mettre en A le coefficient de frottement est 0,70, ce qui nécessite que son poids soit de

$$\frac{16}{15} : 0{,}70 = 1^k \frac{11}{21}$$

Résultat trouvé précédemment.

FIN

30675. — TOURS, IMPR. MAME.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 069111406

COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Éléments d'Arithmétique.

Exercices d'Arithmétique (Livre du Maître).

Éléments d'Algèbre.

Exercices d'Algèbre (Livre du Maître).

Éléments de Géométrie.

Exercices de Géométrie (Livre du Maître).

Arpentage, Levé des plans et Nivellement.

Éléments de Trigonométrie rectiligne.

Compléments de Trigonométrie.

Éléments de Géométrie descriptive.

Exercices de Géométrie descriptive (Livre du Maître).

Éléments de Cosmographie.

Éléments de Mécanique.

Exercices de Mécanique (Livre du Maître).

Tables de Logarithmes.

Tours, impr. Mame.